Musterlösung **11. Jgst.** **2. Kursarbeit** **Datum: 06.12.2005**

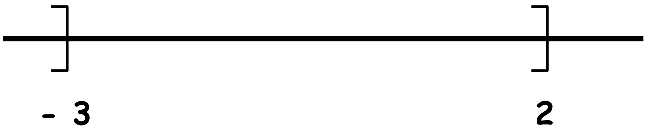
Klasse: GY 05 c **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: **Gebr.-rat. Funktionen und Grenzwerte und Mengen**

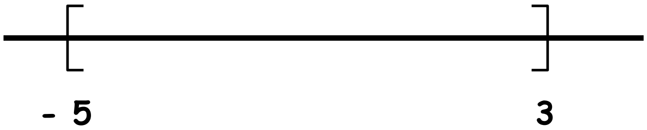
---

❶ **Intervalle: Stellen Sie die Abschnitte in Intervall- *und* in Mengenschreibweise dar**

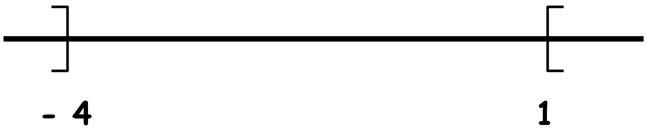
a)



b)



c)



d)

Lösung:

a) $A = \left] -3\,;2\,\right]$ $\quad A = \{x \in \Re \mid -3 < x \leq 2\}$

b) $B = \left[\,-5\,;3\,\right]$ $\quad B = \{x \in \Re \mid -5 \leq x \leq 3\}$

c) $C = \left] -4\,;1\,\right[$ $\quad C = \{x \in \Re \mid -4 < x < 1\}$

d) $D = \left[\,-4\,;5\,\right[$ $\quad D = \{x \in \Re \mid -4 \leq x < 5\}$

❷ **Intervall: Schreiben Sie die Mengen als Intervalle**

a) $A = \{x \in \Re \mid x < 3\}$ b) $B = \{x \in \Re \mid x^2 \leq 4\}$

c) $C = \{x \in \Re \mid x \geq -1\}$ d) $D = \{x \in \Re \mid x^2 > 9\}$

Lösung:

a) $A=\{x\in\Re \mid x<3\} \quad\Rightarrow\quad A=\left]-\infty\,;3\right[$

b) $B=\{x\in\Re \mid x^2\le 4\} \quad\Rightarrow\quad B=\left[-2\,;2\right]$

c) $C=\{x\in\Re \mid x\ge -1\} \quad\Rightarrow\quad C=\left[-1\,;\infty\right[$

d) $D=\{x\in\Re \mid x^2>9\} \quad\Rightarrow\quad D=\Re\setminus\left[-3\,;3\right]$

oder

$D=\{x\in\Re \mid x^2>9\} \quad\Rightarrow\quad D=\left]-\infty\,;-3\right[\cup\left]3\,;\infty\right[$

❸ **Symmetrie I**

Definieren Sie den Begriff „Achsensymmetrie" und veranschaulichen Sie dies graphisch.

Lösung:

Eine Funktion ist achsensymmetrisch, wenn sie folgender Bedingung genügt:

$$f(-x) \;=\; f(x) \qquad oder \qquad f(-x+a) \;=\; f(x+a)$$

Graphisch bedeutet dies eine Achsenspiegelung an der y-Achse oder an einer zur y-Achse Parallelen mit der Gleichung x = a.

❹ **Symmetrie II**

Untersuchen Sie die Symmetrie der gegebenen Funktionen:

a) $f(x) \;=\; 2x^3-x^2$ b) $g(x) \;=\; 2x^5-2$

c) $h(x) \;=\; 2x^6-x^2+1$ d) $k(x) \;=\; \dfrac{2x^2}{x^3-x}$

Lösung:

a) $f(-x) \;=\; 2(-x)^3-(-x)^2 \;=\; -2x^3-x^2 \;\neq\; -f(x) \;\; und \;\; \neq \;\; f(x)$

$\Rightarrow \quad keine\ Symmetrie$

b) $g(-x) = 2(-x)^5 - 2 = -2x^5 - 2 \neq -g(x) \quad und \quad \neq g(x)$

$\Rightarrow$ *keine Symmetrie*

c) $h(-x) = 2(-x)^6 - (-x)^2 + 1 = 2x^6 - x^2 + 1 = h(x)$

$\Rightarrow$ *Achsensymmetrie*

d) $k(-x) = \dfrac{2(-x)^2}{(-x)^3 - (-x)} = \dfrac{2x^2}{-x^3 + x} = -\dfrac{2x^2}{x^3 - x} = -k(x)$

$\Rightarrow$ *Punktsymmetrie*

❺ **Grenzwerte**

Bestimmen Sie die Grenzwerte für $x \to \infty$ folgender Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{5x-1}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{5x-1}{x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2+1}$ d) $f(x) = \dfrac{2x^3}{(x^2-1)}$

Lösung:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x-1}{x} = 5$ ***Grund: Zählergrad = Nennergrad***

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x-1}{x^2} = 0$ ***Grund: Zählergrad < Nennergrad***

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2-1}{x^2+1} = 2$ ***Grund: Zählergrad = Nennergrad***

d) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3}{x^2-1} = \infty$ ***Grund: Zählergrad > Nennergrad***

❻ **Untersuchung gebr.-rat. Funktionen**

Untersuchen Sie die folgenden gebr.-rat. Funktionen hinsichtlich folgender Eigenschaften:

- => Definitionsbereich,
- => Nullstellen,
- => Polstellen,
- => Schnittpunkt mit der y-Achse,
- => Grenzwert und Asymptote.

a) $f(x) = \frac{2-4x}{2x-4}$

b) $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$

c) $f(x) = \frac{3x+6}{(x-1)^2(x+4)}$

Lösung:

Kriterium	**Funktion 1** $f(x) = \frac{2-4x}{2x-4}$	**Funktion 2** $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$	**Funktion 3** $f(x) = \frac{3x+6}{(x-1)^2(x+4)}$
Definitions-bereich	$D = \Re \setminus \{2\}$	$D = \Re \setminus \{2\}$	$D = \Re \setminus \{-4;1\}$
Nullstelle(n)	$x = \frac{1}{2}$	$x_1 = 1 \wedge x_2 = 3$	$x = -2$
Polstellen	$x = 2\,(\text{einfach})$	$x = 2\,(\text{doppelt})$	$x = 1\,(\text{doppelt})$ $x = -4\,(\text{einfach})$
Schnittpunkt mit y-Achse	$S_y\left(0 \mid -\frac{1}{2}\right)$	$S_y\left(0 \mid \frac{3}{4}\right)$	$S_y\left(0 \mid \frac{3}{2}\right)$
Grenzwert & Asymptote	$\lim_{x\to\infty} f(x) = -2$ $a(x) = -2$	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ $a(x) = 1$	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ $a(x) = 0$

❼ **Bilden von Funktionsvorschriften**

Bilden Sie je eine gebr.-rat. Funktion mit den gegebenen Eigenschaften:

a) Funktion 1: Nullstelle bei x = 2;
(ungerade) Polstelle mit VZW bei x = 1

b) Funktion 2: Nullstelle bei x = - 3;
(gerade) Polstelle ohne VZW bei x = 2

c) Funktion 3: Nullstelle bei x = 1;
(gerade) Polstelle ohne VZW bei x = - 3
(ungerade) Polstelle mit VZW bei x = 4

Lösung:

a) $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{x+3}{(x-2)^2}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{(x+3)^2(x-4)}$

❽ **Ablesen von Funktionsvorschriften**

a) Markieren Sie in den beiden Schaubildern die Nullstellen, Polstellen und Asymptoten und tragen Sie die Werte in die Tabelle ein:

Lösung:

Kriterium	**Funktion 1**	**Funktion 2**
Nullstelle(n)	$x=0$	$x_1=-1 \wedge x_2=1$
Polstellen	$x_1=-1 \wedge x_2=1$ **jeweils einfach**	$x_1=-2 \wedge x_2=2$ **jeweils einfach**
Asymptote	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ $a(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1$ $a(x) = -1$

b) Bilden Sie aus den gegebenen Schaubildern die Funktionsvorschrift

<u>Lösung:</u>

Funktion 1: $$f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

Funktion 2: $$f(x) = \frac{-(x^2-1)}{x^2-4} = \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$$