Musterlösung: 11. Jgst. **Klasse:** GY 05 c **Datum:** 21.10.2005

Fach: Mathematik (Kernfach) 1. Kursarbeit

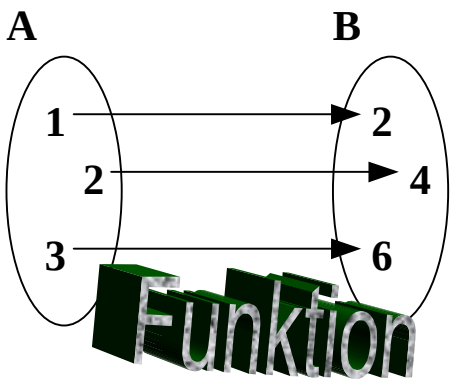
Thema: Funktionen (allgemein), Lineare Funktionen & Anwendungen

---

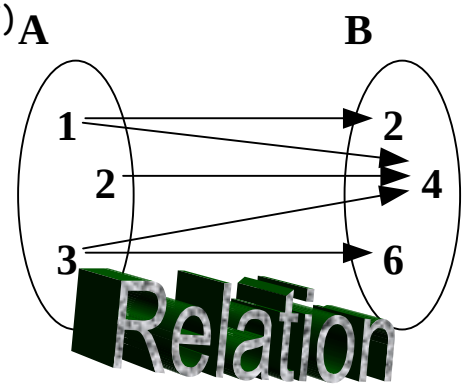
❶ Funktionen

a) Welche der folgenden Zuordnungen bzw. Graphen sind Funktionen?

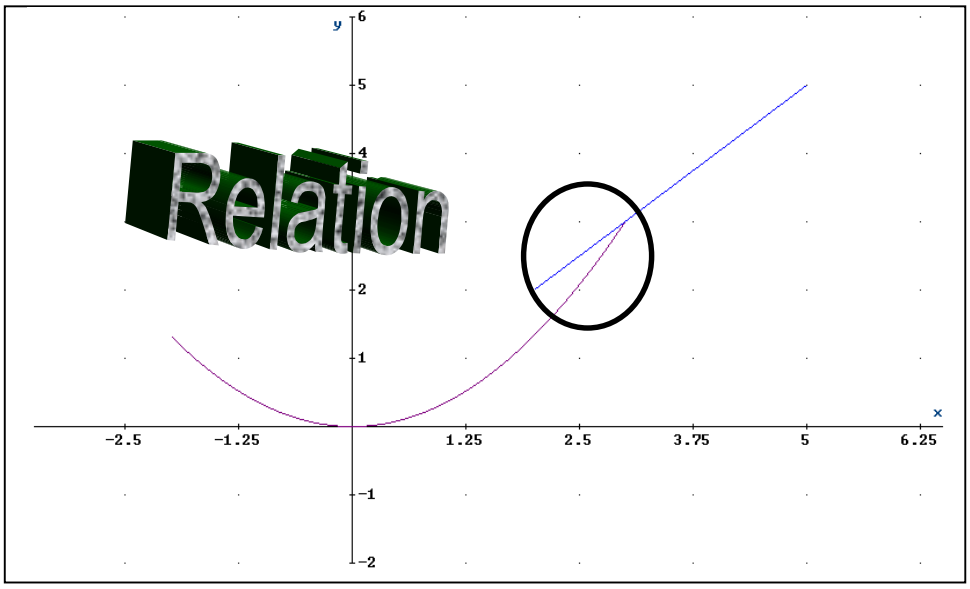
(i)



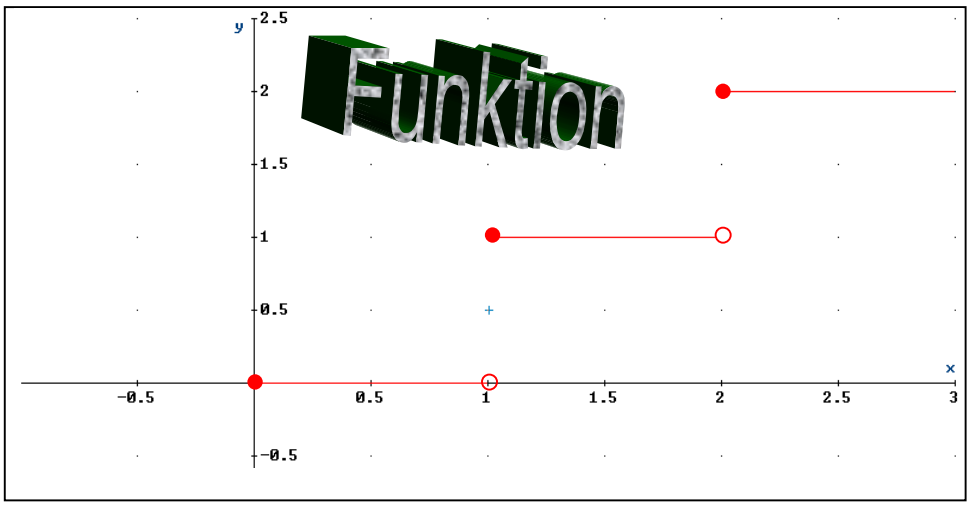
(ii)



(iii)



(iv)



b) Formulieren Sie für (i) eine Zuordnungsvorschrift.

Lösung: **f(x) = 2x**

c) Definieren Sie den mathematischen Begriff „Funktion".

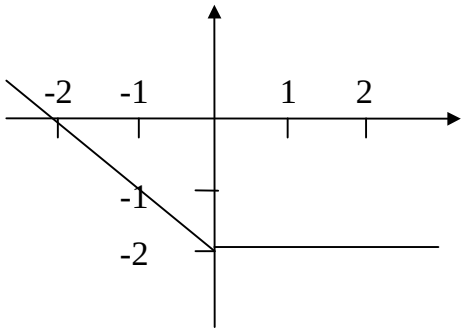
Lösung: Unter einer Funktion versteht man eine Vorschrift, bei der jedem Element aus der Menge X genau ein Element der Menge Y zugeordnet wird. Diese Zuordnung muss eindeutig sein.

d) Warum ist x = 4 keine Funktion im mathematischen Sinn?

Lösung: x = 4 ist ein Vertikale (Parallele zur y-Achse) und somit sind einem x-Wert (hier x = 4) unendlich viele y-Werte zugeordnet, was gegen die Eindeutigkeitsvorgabe einer Funktion verstößt.

❷ Lineare Funktionen

a) Bilden Sie die Funktionsvorschriften (abschnittsweise definieren) der hier dargestellten Funktion:



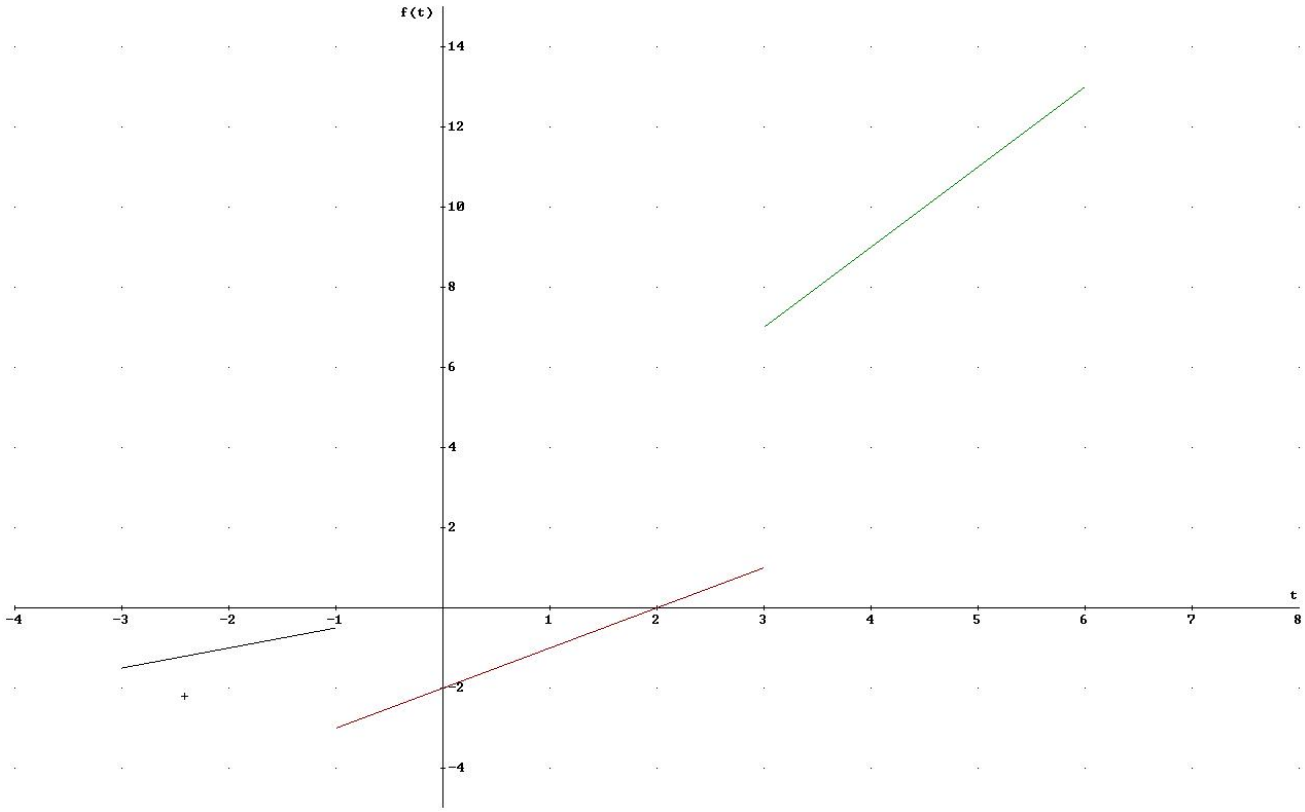
Lösung:

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{für } x \in]-\infty;0] \\ -2 & \text{für } x \in]0;\infty[\end{cases}$$

b) Zeichnen Sie die abschnittsweise definierte Funktion:

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}5t & \text{für } -3 \le x \le -1 \\ t-2 & \text{für } -1 < x \le 3 \\ 2t+1 & \text{für } 3 < x \le 6 \end{cases}$$

Lösung:



c) Ermitteln Sie die Geradengleichungen:

(i) P (-2 / 1); m = 0,25

Lösung:

$$f(x) = mx + b \xrightarrow{\text{Punkt P(- 2 / 1) und Steigung m = 0,25 einsetzen}} 1 = \frac{1}{4} \cdot (-2) + b$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

(ii) P (1 / 4); α = 45°

Lösung:

$$f(x) = mx + b \xrightarrow{\text{Punkt P(1 / 4) und Steigung m = 1 einsetzen}} 4 = 1 \cdot 1 + b$$

$$\Rightarrow \quad b = 3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x + 3$$

(iii) P (-2 / 3); $m_{Normale} = \frac{1}{4}$

Lösung:

$$m_{senkrecht} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{wegen } m_1 \cdot m_2 = -1} m = (-4)$$

$$f(x) = mx + b \xrightarrow{\text{Punkt P(- 2 / 3) und Steigung m = } (-4) \text{ einsetzen}} 3 = (-4)\cdot(-2) + b$$

$$\Rightarrow \quad b = (-5) \quad \Rightarrow \quad f(x) = (-4)x - 5$$

d) Gegeben sind die Punkte A (1 / 2) und B (4 / 1).

(i) Bestimmen Sie die lineare Funktionsvorschrift die beide Punkte enthält.

Lösung:

$$f(x) = mx + b \xrightarrow{\text{Punkte A und B einsetzen}}$$

$$I.) \quad 2 = m + b \qquad II.) \quad 1 = 4m + b \xrightarrow{\text{I.) - II.)}}$$

$$m = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{3} \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

(ii) Prüfen Sie, ob die Punkte C (-1 / $2\frac{2}{3}$) und D (5 / -2) auf der Geraden f(x) = $-\frac{1}{3}$ x + $\frac{7}{3}$ liegen.

Lösung:

$$Punkt\ C: \quad f(-1) = \frac{1}{3} + \frac{7}{3} = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad C \in f(x)$$

$$Punkt\ D: \quad f(5) = -\frac{5}{3} + \frac{7}{3} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad D \notin f(x)$$

(iii) Ergänzen Sie die fehlenden Koordinaten der Punkte E (-4 / ?) und F (? / $\frac{1}{3}$) , damit gilt: E ∈ f(x) und F ∈ f(x).

Lösung:

$$Punkt\ E: \quad f(-4) = \frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{11}{3} \quad \Rightarrow \quad E\left(-4 / \frac{11}{3}\right)$$

$$Punkt\ F: \quad \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad \Rightarrow \quad F\left(6 / \frac{1}{3}\right)$$

(iv) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die senkrecht auf f(x) steht und durch den Punkt A verläuft?

Lösung:

$$m = -\frac{1}{3} \xrightarrow{\text{wegen } m_1 \cdot m_2 = -1} m_{senkrecht} = 3$$

$$f(x) = mx + b \xrightarrow{\text{Punkt A und Steigung m = 3 einsetzen}} 2 = 3 \cdot 1 + b$$

$$\Rightarrow \quad b = (-1) \quad \Rightarrow \quad f_{senkrecht}(x) = 3x - 1$$

(v) Nennen Sie die Funktionsvorschrift einer zu f(x) parallelen Geraden.

Lösung: $$f_{parallel}(x) = -\frac{1}{3}x + a \quad mit\ a \in \Re \setminus \left\{\frac{7}{3}\right\}$$

(vi) Wie groß ist der Abstand zwischen den Punkten A und B?

Lösung: $$e = \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} \quad = \quad \sqrt{10}$$

(vii) Ermitteln Sie die Koordinate des Mittelpunktes der Strecke $\overline{AB}$.

Lösung:

$$x_{m(\overline{AB})} \quad = \quad \frac{1}{2} \cdot [1+4] \quad = \quad \frac{5}{2}$$

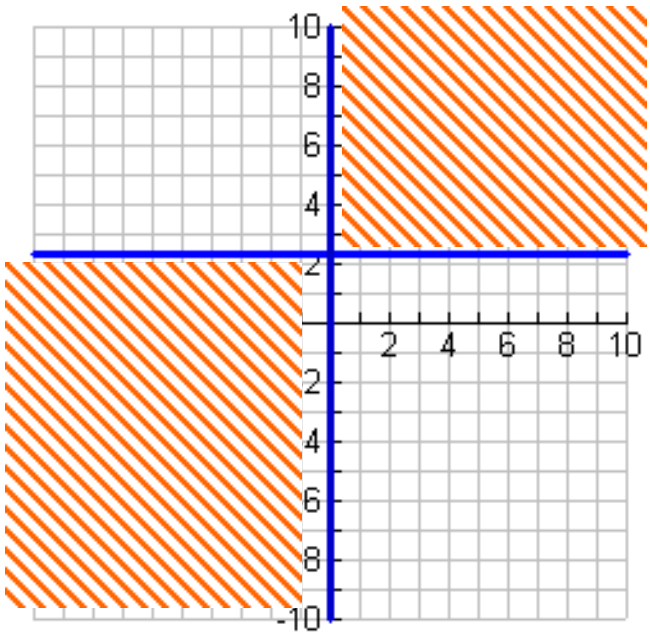
$$y_{m(\overline{AB})} \quad = \quad \frac{1}{2} \cdot [2+1] \quad = \quad \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad M\left(\frac{5}{2} / \frac{3}{2}\right)$$

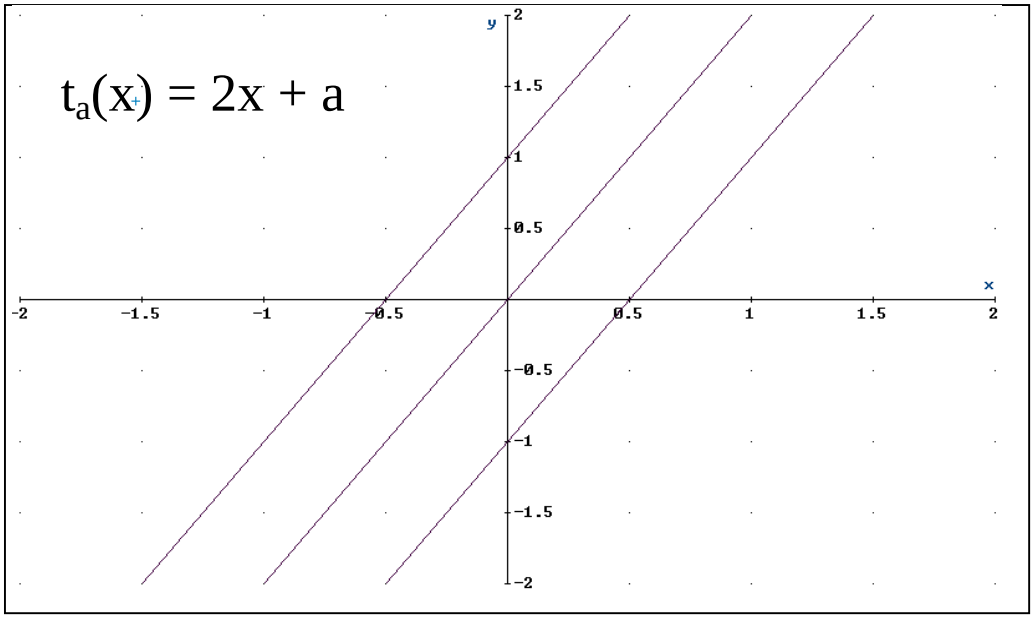
❸ Lineare Parameterfunktionen

(i) Markieren Sie den Bereich des Koordinatensystems, den das entstehende Geradenbüschel $g_k(x) = kx + \frac{7}{3}$ abdeckt, wenn gilt: $k \in [0;\infty[$.

Lösung: $m \in [0;\infty[$



(ii) In der Anlage I ist die Parametergerade $t_a(x)$ für drei konkrete Werte für den Parameter a dargestellt.
Ermitteln Sie die gesuchten Parameterwerte a.



Lösung: Ablesen der y-Achsenabschnitte aus der Zeichnung

$a \in \{-1;0;1\}$

❹ Anwendungen zu linearen Funktionen

a) Die Temperatur im Erdinnern wächst zum Erdmittelpunkt hin auf je 1 m um rund 0,03° C an.
In 25 m Tiefe beträgt sie 10° C.

(i) Welche Temperatur herrscht demnach in 875 m Tiefe?

Lösung:

$$t(x) = mx + b \xrightarrow{\text{Punkt P(25 / 10) und Steigung m = } \frac{3}{100} \text{ einsetzen}} 10 = \frac{3}{100} \cdot 25 + b$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{37}{4} \quad \Rightarrow \quad t(x) = \frac{3}{100} x + \frac{37}{4}$$

$$t(875) \;=\; \frac{3}{100} \cdot 875 + \frac{37}{4} \;=\; 35{,}5$$

(ii) In welcher Tiefe schmilzt Zinn (Schmelztemperatur: 232°C)?

Lösung:

$$t(x) = \frac{3}{100} x + \frac{37}{4} \xrightarrow{t(x) = 232 \text{ einsetzen}} 232 = \frac{3}{100} x + \frac{37}{4}$$

$$\xrightarrow{-\frac{37}{4}} \quad \frac{891}{4} = \frac{3}{100} x \quad \xrightarrow{\cdot \frac{100}{3}} \quad x = \frac{891 \cdot 100}{4 \cdot 3}$$

$$\Rightarrow \quad x = 7.425\,[m]$$

b) Die Kosten für einen Leihwagen betragen inkl. Benzinkosten 1,25 € je km.
Ein entsprechendes eigenes Fahrzeug würde jährlich 9.900,00 € feste Kosten (Abschreibungen, Wartung etc.) verursachen.
Je 100 km hätte das eigene Fahrzeug einen Verbrauch von 6 Litern;
1 Liter Benzin kostet 1,50 €.

(i) Ermitteln Sie die Funktionsvorschriften der beiden Kostenfunktionen.

Lösung:

$$k_{\text{Leasing}}(x) \;=\; \frac{5}{4} x \qquad \textit{und} \qquad k_{\text{Eigentum}}(x) \;=\; \frac{9}{100} x + 9.900$$

(ii) Bei welcher km-Anzahl sind die Kosten für beide Fahrzeuge gleich?

Lösung:

$$k_{\text{Leasing}}(x) = k_{\text{Eigentum}}(x)$$

$$\frac{5}{4}x = \frac{9}{100}x + 9.900 \xrightarrow{-\frac{9}{100}x} \frac{125-9}{100}x = 9.900$$

$$\Rightarrow \quad x \approx 8.534,48\,[km]$$

(iii) Wie hoch sind die Kosten beider Fahrzeuge bei einer Jahresnutzung von 9.000 km?

Lösung:

$$k_{\text{Leasing}}(9.000) = \frac{5}{4} \cdot 9.000 = 11.250,00[€]$$

$$k_{\text{Eigentum}}(9.000) = \frac{9}{100} \cdot 9.000 + 9.900 = 10.710,00\,[€]$$

❺ Dreiecke

Gegeben seien folgende drei Funktionsvorschriften:

$f_1(x) = 5x - 3$ $\qquad$ $f_2(x) - 2 = -\frac{1}{2}x + 2$ $\qquad$ $f_3(x) = 2 * x^0$

Diese bilden ein Dreieck.

Ermitteln Sie rechnerisch die Eckpunkte des Dreiecks.

Lösung:

Schnittpunkt 1: f_1 mit f_2

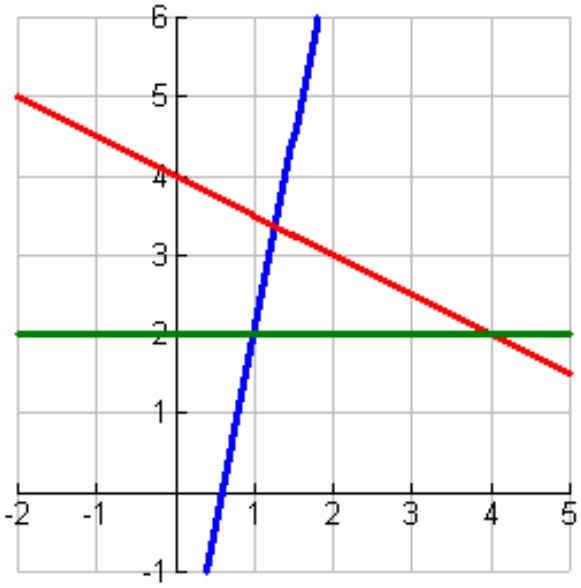
$$5x - 3 = -\frac{1}{2}x + 4 \quad \Rightarrow \quad S_1\left(\frac{14}{11} \,\middle|\, \frac{37}{11}\right)$$

Schnittpunkt 2: f_1 mit f_3

$$5x - 3 = 2 \quad \Rightarrow \quad S_1(1 \mid 2)$$

Schnittpunkt 3: f_2 mit f_3

$$-\frac{1}{2}x + 4 = 2 \quad \Rightarrow \quad S_1(4 \mid 2)$$



❻ Schulweg-Geschichten

a) Entscheiden Sie, zu welcher der drei Schulweg-Geschichten welcher der vier Graphen am besten passt.
Fügen Sie die Ziffer in die entspr. Zeichnung.

① „Ich ging gemütlich los. Als mir klar wurde, wie spät es schon war, beeilte ich mich."

② „Ich hatte gerade das Haus verlassen, als ich bemerkte, dass ich mein Pausenbrot vergessen hatte. Also ging ich zurück, um es zu holen.

③ „Zuerst ging es mir gut. Doch dann bekam ich wieder starke Schmerzen im Knie und konnte kaum noch laufen."

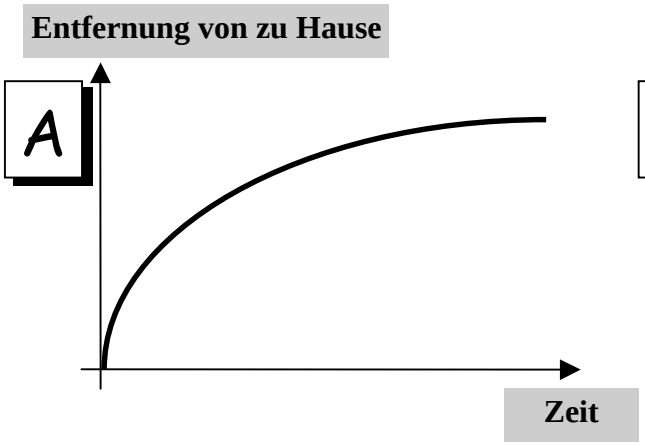
Lösung: ① => **C** ② => **D** ③ => **A**

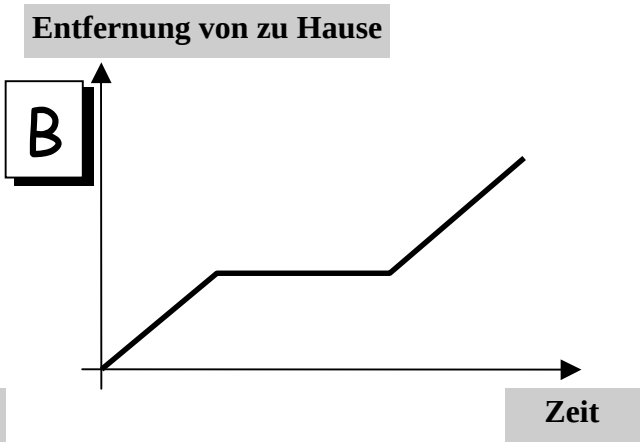
b) Ein Graph bleibt noch übrig.

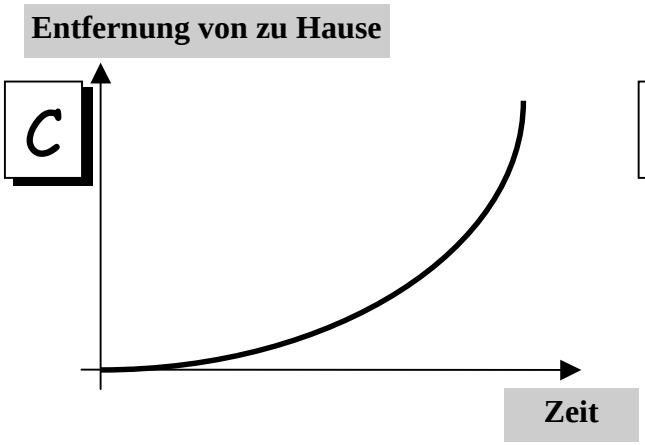
Benennen Sie den Buchstaben und schreiben Sie selbst eine kurze Geschichte dazu.

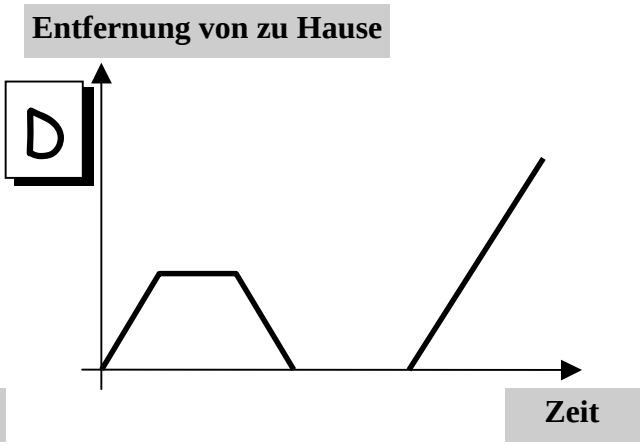
Lösung: Graph B bleibt übrig.

„Ich ging von zu Hause los, traf einen Freund und blieb stehen, um mich mit ihm zu unterhalten. Nach einiger Zeit ging ich wieter zur Schule."


Entfernung von zu Hause
A
Zeit


Entfernung von zu Hause
B
Zeit


Entfernung von zu Hause
C
Zeit


Entfernung von zu Hause
D
Zeit

❼ **Aus dem Internet:**

Thema: Steigung und Gefälle

Diskussionsgruppe: Plauderecke

Hallo Allerseits !! Ich hab´ da mal ´ne Frage: Ihr kennt doch alle dieses dreieckige Verkehrszeichen für Gefälle bzw Steigung, wo dann das Gefälle oder die Steigung in Prozent angegeben ist?! Gestern habe ich darüber mit einem Freund und wir sind uns nicht einig geworden, wie das mit den Prozenten gemeint ist.

Mein Freund sagt, er hat einen Freund, der Tiefbauingenieur ist und der sagt wiederum, dass 45 Grad 100% sind und dass das danach berechnet wird.

Damit bin ich aber nicht zufrieden. Wenn ich mir ein Quadrat vorstelle, dann haben doch alle vier Ecken einen Winkel von 90 Grad, oder? Also wären dann doch 90 Grad 100%? 45 Grad ergeben sich doch bei einer Diagonalen durch das Quadrat, oder nicht oder wie?
Ich meine, klar, wenn ich 100m fahre und gleichzeitig 100m steige, dann geht das senkrecht hoch. Aber das müssen dann doch 90 Grad sein. Nach meiner Vorstellung wären 45 Grad 50% Steigung.

Wer weiß, wie das ist mit dem Verkehrsschild??

Greetings eggneck

Von: eggneck
Datum: 25.03.2005, 13:27

Bitte nehmen Sie zu den in diesem Diskussionsbeitrag „Plauderecke" dargestellten Aussagen kurz Stellung und würdigen Sie diese kritisch aus mathematischer Sicht.

Lösung: Der Freund hat recht mit seiner Aussage, da auf eine Länge von 100 m gleichzeitig eine Höhe von 100 m erreicht wird vergleichbar einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck. Dadurch entsteht im Punkt A der Steigungswinkel 45 °, was einem Tangenswert von 1 entspricht. Da der Tangens durch

$$\tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$ definiert ist und in diesem besonderen Fall

$Gegenkathete = Ankathete$ gilt, folgt ein Seitenverhältnis von 1 : 1 bzw. ein Prozentwert von 100.