Musterlösung **12. Jgst.** **5. Test** **Datum: 19.05.2006**

Klasse: GY 04 c **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

Thema: **Rechenoperationen mit Determinanten; Cramer-Regel**

---

❶ **Ermitteln Sie den Wert der Determinanten aus den gegebenen Matrizen**

a) $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} -x & 2 \\ x^3 & x^2 \end{pmatrix}$

c) $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ d) $D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3-8 = -11$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -x & 2 \\ x^3 & x^2 \end{vmatrix} = -x^3-2x^3 = -3x^3$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} 28-10+0-60-0+42 = 0$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{I.)-2\cdot II.) \\ = \\ I.)\leftrightarrow II.)}}{} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|D| = 1\cdot(-3)\cdot 3\cdot 2\cdot \underset{\text{wegen Zeilentausch}}{(-1)} = 18$$

❷ **Für welche Werte von $a \in \Re$ sind die Matrizen regulär?**

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & a^3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & a \\ a & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2a \end{pmatrix}$

Lösung:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & a^3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3-3a^3 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow a = -1$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & a \\ a & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2a \end{vmatrix} \overset{Sarrus}{=} 12a-2+a^2-4a-3+2a^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow a_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{124}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{31}}{3}$$

$$\Rightarrow a_1 \approx 0,5226 \quad \wedge \quad a_2 \approx -3,1892$$

❸ **Lösen von LGS mit der Cramer-Regel**

Ermitteln Sie die Lösungen der LGS:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-5-8}{15-8} = -\frac{13}{7} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{6+2}{7} = \frac{8}{7}$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}} \overset{Sarrus}{=} \frac{35}{-10} = -3,5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}} \overset{Sarrus}{=} \frac{-35}{-10} = 3,5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}} \overset{Sarrus}{=} \frac{45}{-10} = -4,5$$

❹ Arbeiten mit Matrizen und Determinanten

a) Erstellen Sie je eine 2x2-Matrix, die den Determinantenwert 3 besitzt.

Lösung:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

b) Beweisen Sie, dass für die Matrix $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}, \text{ wenn } \det(A)\neq 0$$

Lösung:

$$Beweis: \quad A\cdot A^{-1}=E$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad Behauptung$$

c) Invertieren Sie mit Hilfe dieser Formel die

Matrix $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$

Lösung:

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{5-6}\cdot\begin{pmatrix}-5 & -2\\ -3 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

❺ Beweisen Sie folgende Aussagen mittels einer allgemeinen 2x2-Matrix bzw. Ihrer Determinante

a) $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(A^T)$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = ad - bc$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A^T) = ad - bc = \det(A)$$

b) $\mathrm{Det}(ka_1, \ldots, ka_i, \ldots, ka_n) = k^n \mathrm{Det}(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A) = ka \cdot kd - kb \cdot kc = k^2 ad - k^2 bc$$

$$\Rightarrow \det(A) = k^2 (ad - bc) = k^2 \det(A)$$