Musterlösung **12. Jgst.** **3. Test** **Datum: 24.02.2006**

Klasse: GY 04 c **Fach: Mathematik (Leistungsfach)**

Thema: **Diskussion nicht-rationaler Funktionen;**
Mac Laurin-Reihe; Partielle Integration

---

❶ **Bestimmen Sie die Stammfunktion mittels Partieller Integration.**

a) $f(x) = x \cdot e^x$ b) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

Lösung:

$$\int f(x)\,dx = \int \left(x \cdot e^x\right) dx = x \cdot e^x - \int \left(1 \cdot e^x\right) dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

Substitution:

$u(x) = x \qquad v(x) = e^x$

$u'(x) = 1 \qquad v'(x) = e^x$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \left[\ln(x)\right]^2 - \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \left[\ln(x)\right]^2 + c$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\ln(x)\right]^2 + c$$

Substitution:

$u(x) = \ln(x) \qquad v(x) = \ln(x)$

$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$

❷ **Mac Laurin-Reihe**

Bestimmen Sie die Potenzreihe an der Stelle x = 0 für die Funktion $f(x)=e^{2x}$ bis zum 6. Reihenelement.

Lösung:

Ableitungen:

$$f(x) = e^{2x} \qquad f^{i}(x) = 2e^{2x} \qquad f^{ii}(x) = 4e^{2x}$$

$$f^{iii}(x) = 8e^{2x} \qquad f^{iv}(x) = 16e^{2x} \qquad f^{v}(x) = 32e^{2x}$$

Formel:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\cdot f^{i}(0)\cdot x^{i}$$

$$f(x) = \frac{1}{0!}\cdot f^{0}(0)\cdot x^{0}+\frac{1}{1!}\cdot f^{i}(0)\cdot x^{1}+\frac{1}{2!}\cdot f^{ii}(0)\cdot x^{2}+\frac{1}{3!}\cdot f^{iii}(0)\cdot x^{3}$$
$$+\frac{1}{4!}\cdot f^{iv}(0)\cdot x^{4}+\frac{1}{5!}\cdot f^{v}(0)\cdot x^{5}$$

$$f(x) = 1\cdot 1\cdot x^{0}+1\cdot 2\cdot x^{1}+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x^{2}+\frac{1}{6}\cdot 8\cdot x^{3}+\frac{1}{24}\cdot 16\cdot x^{4}+\frac{1}{120}\cdot 32\cdot x^{5}$$

$$f(x) = 1+2x+2x^{2}+\frac{4}{3}x^{3}+\frac{2}{3}x^{4}+\frac{4}{15}x^{5}$$

❸ Untersuchung einer nicht-rationalen Funktion

Gegeben sei die Funktion $f_k(x)=\frac{k^2x+k}{e^{kx}} \quad mit\ k>0$

a) Definitionsbereich

Lösung: $D=\Re$ weil gilt: $e^{kx}\neq 0$

b) Schnittpunkte mit den Achsen

Lösung:

$$Nullstelle: \quad f_k(x)=\frac{k^2x+k}{e^{kx}}=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{k}$$

$$S_y: \quad f_k(0)=\frac{k^2\cdot 0+k}{e^{k\cdot 0}}=k \quad \Rightarrow \quad S_y(0\mid k)$$

c) Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs

Lösung:

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) \quad = \quad \lim_{x\to\infty}\frac{k^2x+k}{e^{kx}} \quad \overset{L'Hospital}{=} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{k^2}{ke^{kx}} \quad \to \quad 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) \quad = \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{k^2x+k}{e^{kx}} \quad = \quad \lim_{x\to\infty}\left[k^2(-x)+k\right]e^{kx} \quad \to \quad -\infty$$

d) Zeigen Sie, dass die beiden ersten Ableitungen der Funktion folgende Form annehmen:

$$f_k'(x)=\frac{-k^3x}{e^{kx}} \qquad und \qquad f_k''(x)=\frac{k^4x-k^3}{e^{kx}}$$

Lösung:

$$f_k'(x) \quad = \quad \frac{k^2\cdot e^{kx}-\left(k^2x+k\right)e^{kx}\cdot k}{\left(e^{kx}\right)^2} \quad = \quad \frac{k^2-k^3x-k^2}{e^{kx}} \quad = \quad \frac{-k^3x}{e^{kx}}$$

$$f_k''(x) \quad = \quad \frac{-k^3e^{kx}-\left(-k^3x\right)\cdot e^{kx}\cdot k}{\left(e^{kx}\right)^2} \quad = \quad \frac{-k^3+k^4x}{e^{kx}} \quad = \quad \frac{k^4x-k^3}{e^{kx}}$$

e) Bestimmen Sie den Extremwert.

Lösung:

$$f_k'(x) = \frac{-k^3 x}{e^{kx}} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f_k''(0) = -k^3 < 0 \Rightarrow Max(0 \mid k)$$

f) Ermitteln Sie den Wendepunkt.

(notwendige Bedingung genügt!)

Lösung:

$$f_k''(x) = \frac{k^4 x - k^3}{e^{kx}} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{1}{k} \Rightarrow W\left(\frac{1}{k} \mid \frac{2k}{e}\right)$$

g) Ortskurve der Wendepunkte

Lösung:

$$W\left(\frac{1}{k} \mid \frac{2k}{e}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{k} \Rightarrow k = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{2k}{e} \Rightarrow y = \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{e} = \frac{2}{x \cdot e}$$

h) Durch $F_1(x)=\frac{ax+b}{e^x}$ ist eine Stammfunktion von $f_1(x)$ gegeben. Bestimmen Sie a und b.

Lösung:

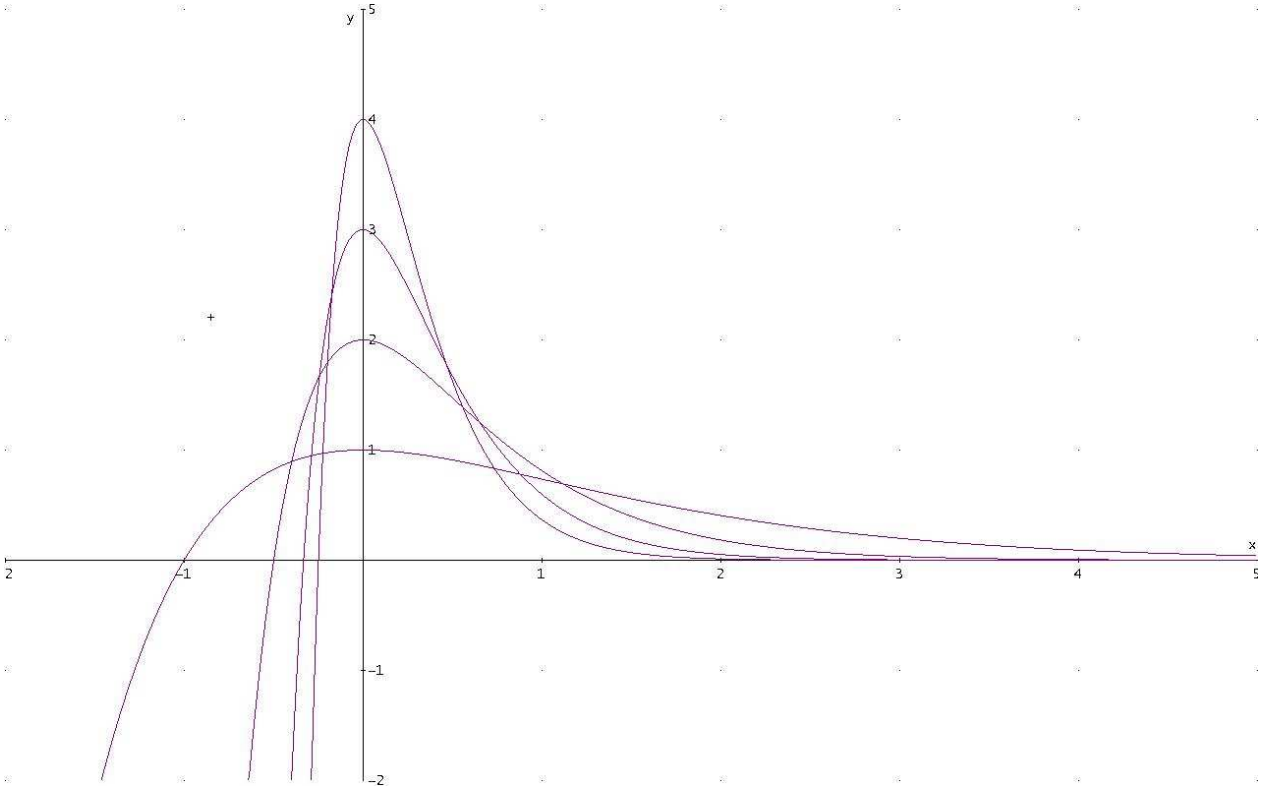
$$F_1(x)=\frac{ax+b}{e^x} \quad \Rightarrow$$

$$F_1'(x)=\frac{a\cdot e^x-(ax+b)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{a-(ax+b)}{e^x}=\frac{-ax+a-b}{e^x}=f_1(x)$$

für k = 1 gilt auch: $f_1(x)=\frac{x+1}{e^x}$

Koeffizientenvergleich:

$x+1 \quad \leftrightarrow \quad -ax+a-b$

$\Rightarrow \quad x=-ax \quad \Rightarrow \quad 1=-a \quad \Rightarrow \quad a=-1$

$\Rightarrow \quad 1=a-b \quad \Rightarrow \quad 1=-1+b \quad \Rightarrow \quad b=-2$