Musterlösung **12. Jgst.** **4. Kursarbeit** **Datum: 12.06.2006**

Klasse: GY 04 c **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

Thema: **Stochastische Matrizen; Lineare Optimierung; Determinanten; Cramer-Regel; LGS; Rangkriterium**

---

❶ Ermitteln Sie die Determinante und die Inverse von A und B:

a) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & -3\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix}$

Lösung:

$$|A|=(-1)\cdot 2-(-2)\cdot 3=4 \qquad A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$|B| \overset{Sarrus}{=} -4-3+0+18-0-0=11$$

Invertierung von Matrizen

Eingabe der Matrix

1	-1	-3
0	2	1
3	0	-2

Ergebnis direkt

Inverse Matrix

- 4/11	- 2/11	5/11
3/11	7/11	- 1/11
- 6/11	- 3/11	2/11

Rechenweg

1	-1	-3	1	0	0
0	2	1	0	1	0
3	0	-2	0	0	1
1	-1	-3	1	0	0
0	2	1	0	1	0
3	0	-2	0	0	1
1	-1	-3	1	0	0
0	2	1	0	1	0
0	3	7	-3	0	1
1	-1	-3	1	0	0
0	1	1/2	0	1/2	0
0	3	7	-3	0	1
1	-1	-3	1	0	0
0	1	1/2	0	1/2	0
0	3	7	-3	0	1
1	0	-2 1/2	1	1/2	0
0	1	1/2	0	1/2	0
0	0	5 1/2	-3	-1 1/2	1
1	0	-2 1/2	1	1/2	0
0	1	1/2	0	1/2	0
0	0	1	- 6/11	- 3/11	2/11
1	0	0	- 4/11	- 2/11	5/11
0	1	0	3/11	7/11	- 1/11
0	0	1	- 6/11	- 3/11	2/11

Probe

			- 4/11	- 2/11	5/11
			3/11	7/11	- 1/11
			- 6/11	- 3/11	2/11
1	-1	-3	1	0	0
0	2	1	0	1	0
3	0	-2	0	0	1

Ergebnis der Probe

$$B^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-4 & -2 & 5\\ 3 & 7 & -1\\ -6 & -3 & 2\end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie den Wert der Determinante der Matrix C:

c) $$C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III.)-II.)\\ IV+3\cdot II.)}]{I.)+2\cdot II.)} \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{Zeilentausch\\ I.)\leftrightarrow II.)}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Det(C)} 1\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 9 & 1 & 3 \\ -13 & 5 & -2 \end{vmatrix} \overset{Sarrus}{=} -(10-78-45-13+75+36)=15$$

❷ **Für welche Werte von $a \in \Re$ sind die Matrizen regulär?**

a) $A = \begin{pmatrix} 16 & -a^4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$|A| = \begin{vmatrix} 16 & -a^4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -48+3a^4 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow |a| = 2$$

$$A \text{ regulär} \Leftrightarrow a \in \Re \setminus \{-2\,;\,2\}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & a \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} \overset{Sarrus}{=} 6-2+a^3-4a+3a-a = a^3-2a+4 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = -2$$

$$\xrightarrow{\substack{dann\ Polynomdivision \\ oder\ Horner-Schema}} a^2-2a+2 \overset{!}{=} 0 \rightarrow a_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = n.def.$$

$$B \text{ regulär} \Leftrightarrow a \in \Re \setminus \{-2\}$$

❸ **Lösen von LGS mit der Cramer-Regel**

Ermitteln Sie die Lösungen der LGS:

a) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+8}{-3+8} = \frac{9}{5} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6+2}{5} = \frac{8}{5}$$

b) $$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}} \overset{Sarrus}{=} \frac{-2+18+16-12+2-24}{4+6-16-4-4+24} \overset{Sarrus}{=} \frac{-2}{10} = -0,2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}} \overset{Sarrus}{=} \frac{-16+2+48+16+12+8}{4+6-16-4-4+24} \overset{Sarrus}{=} \frac{70}{10} = 7$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}} \overset{Sarrus}{=} \frac{-6-12-4-1+8-36}{4+6-16-4-4+24} \overset{Sarrus}{=} \frac{-51}{10} = -5,1$$

❹ Lineare Optimierung I

Gesucht ist das Maximum der Funktion G(x,y) = 2x + 3y unter Berücksichtigung folgender Nebenbedingungen:

I.) $x + y \leq 15$ und II.) $x + 2y \leq 20$

a) Wie lauten die Nichtnegativitätsbedingungen?

b) Stellen Sie den Simplex-Raum graphisch dar.

c) Ermitteln Sie die Zielfunktion für G = 18 und zeichnen Sie diese.

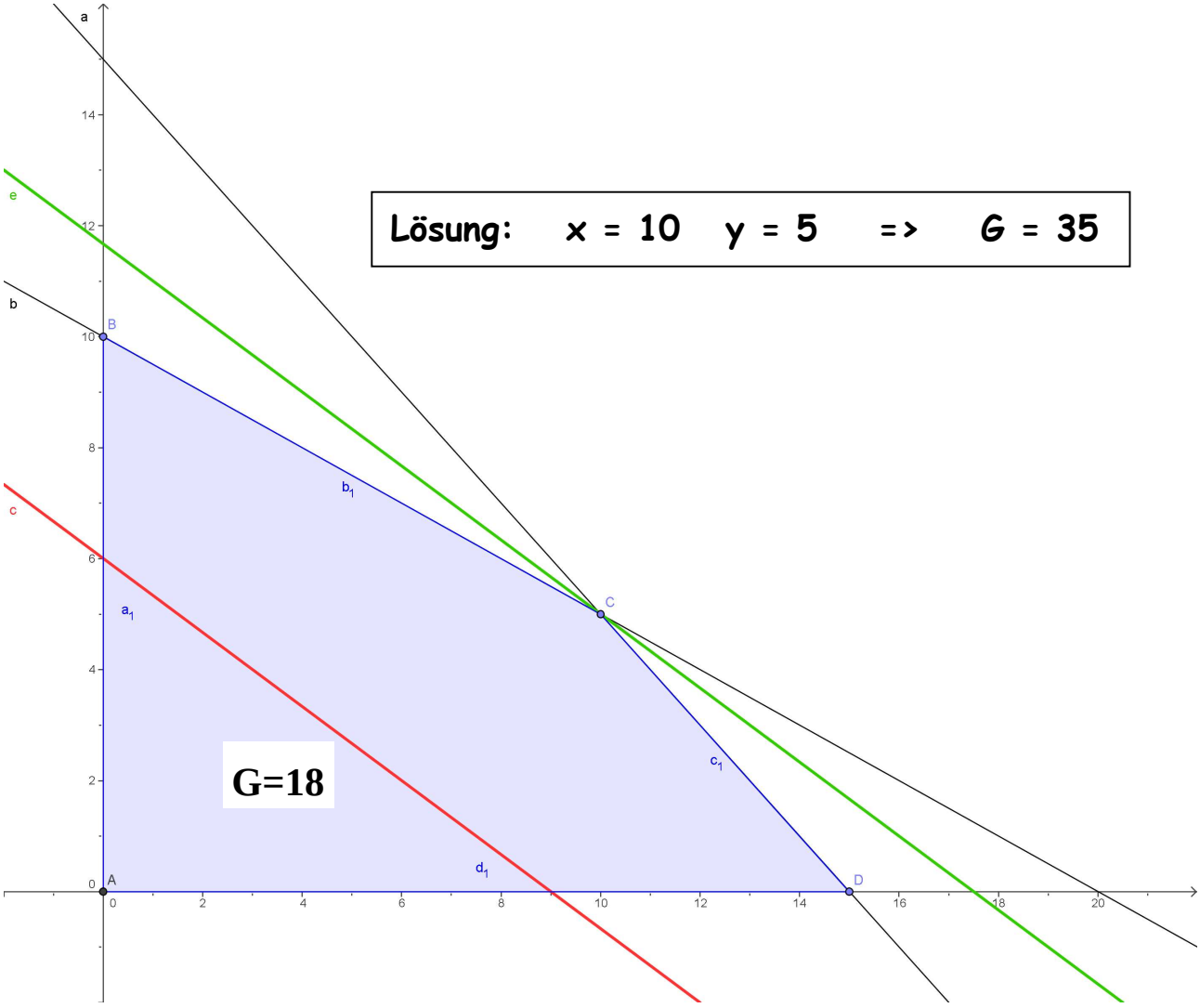
d) Bestimmen Sie graphisch das Maximum von G.

e) Bestimmen Sie das Maximum mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

Lösung:

a) *Nichtnegativitätsbedingungen*: $x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0$

b) – d)



e)

Bedingungen: **x = Anzahl der Produkte P_1 und y = Anzahl der Produkte P_2**

$x+y \leq 15$

$x+2y \leq 20$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$x \geq 0$ *und* $y \geq 0$

Zielfunktion: $2x+3y = Z \rightarrow \max.$

	x	y	u_1	u_2	b	
I.)	1	1	1	0	15	
II.)	1	2	0	1	20	$\xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot II.)}$
G:	2	3	0	0	Z	

I.)	1	1	1	0	15	$\xrightarrow{I.)-II.)}$
II.)	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	10	
G:	2	3	0	0	Z	$\xrightarrow{G-3\cdot II.)}$

I.)	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	5	$\xrightarrow{2\cdot I.)}$
II.)	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	10	
G:	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$Z-30$	

I.)	1	0	2	-1	10	
II.)	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	10	$\xrightarrow{II.)-\frac{1}{2}\cdot I.)}$
G:	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$Z-30$	$\xrightarrow{G-\frac{1}{2}\cdot I.)}$

I.)	1	0	2	-1	10
II.)	0	1	-1	1	5
G:	0	0	-1	-1	$Z-35$

	A	B	C	D	E	F	G
1	Aufgabe 4						
2		x	y	tatsächlich	Restriktion		
3	Bed. 1	1	1	15	15		
4	Bed. 2	1	2	20	20		
5							
6	Gewinn	2	3	35			
7							
8	Anzahl	10	5				
9							
10	Microsoft Excel 9.0 Antwortbericht						
11	Tabelle: [arbeit4_gy04c_lk.xls]Aufgabe 4						
12	Bericht erstellt am: 10.06.2006 13:52:09						
13							
14							
15	Zielzelle (Max)						
16		Zelle	Name	Ausgangswert	Lösungswert		
17		$D$6	Gewinn	5	35		
18							
19							
20	Veränderbare Zellen						
21		Zelle	Name	Ausgangswert	Lösungswert		
22		$B$8	Anzahl x	1	10		
23		$C$8	Anzahl y	1	5		
24							
25							
26	Nebenbedingungen						
27		Zelle	Name	Zellwert	Formel	Status	Differenz
28		$D$3	Bed. 1	15	$D$3<=$E$3	Einschränkend	0
29		$D$4	Bed. 2	20	$D$4<=$E$4	Einschränkend	0
30		$B$8	Anzahl x	10	$B$8>=0	Nicht einschränkend	10
31		$C$8	Anzahl y	5	$C$8>=0	Nicht einschränkend	5

Solverlösung in Excel

❺ Lineare Optimierung II

Geflügelzüchter Kurt Schwan zieht Hühner, Enten und Gänse auf. Die Kosten für die Aufzucht eines Huhns betragen 2,00 €, einer Ente 6,00 € und einer Gans 10,00 €. Im Durchschnitt erhält der Züchter beim Verkauf eines Huhns 6,00 €, einer Ente 18,00 € und einer Gans 26,00 €.

Mehr als 800 Enten und mehr als 400 Gänse kann er nicht verkaufen. Außerdem darf er aus hygienischen Gründen nicht mehr als insgesamt 1000 Tiere halten.

Ermitteln Sie die Nebenbedingungen und die Zielfunktion, wenn Kurt Schwan einen maximalen Gewinn erzielen möchte.

Lösung:

Bedingungen:

x = Anzahl der Hühner

y = Anzahl der Enten

z = Anzahl der Gänse

$$I.) \quad y \leq 800$$

$$II.) \quad z \leq 400$$

$$III.) \quad x + y + z \leq 1.000$$

$$Z: \quad g(x, y, z) = 4x + 12y + 16z \rightarrow \max.$$

$$NNB: \quad x, y, z \geq 0$$

❻ Lineare Optimierung III

Ermitteln Sie den maximalen Wert für das Optimierungsproblem:

$$\begin{pmatrix} 8 & 16 & 0 \\ 0 & 8 & 16 \\ 16 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 100 \\ 600 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$Z(x, y, z) = 4x + 12y + 8z$$

Lösung:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Aufgabe 6						
2		x	y	z	tatsächlich	Restriktion	
3	Bed. 1	8	16	0	100	100	
4	Bed. 2	0	8	16	450	600	
5	Bed. 3	16	0	8	200	200	
6							
7	ZF:	4	12	8	275		
8							
9	Anzahl	0	6,25	25			
10							
11	**Microsoft Excel 9.0 Antwortbericht**						
12	**Tabelle: [Mappe1]Tabelle1**						
13	**Bericht erstellt am: 09.06.2006 13:00:54**						
14							
15	Zielzelle (Max)						
16		**Zelle**	**Name**	**Ausgangswert**	**Lösungswert**		
17		$E$6	ZF	24	275		
18							
19							
20	Veränderbare Zellen						
21		**Zelle**	**Name**	**Ausgangswert**	**Lösungswert**		
22		$B$8	Anzahl x	1	0		
23		$C$8	Anzahl y	1	6,25		
24		$D$8	Anzahl z	1	25		
25							
26							
27	Nebenbedingungen						
28		**Zelle**	**Name**	**Zellwert**	**Formel**	**Status**	**Differenz**
29		$E$2	Bed. 1	100	$E$2<=$F$2	Einschränkend	0
30		$E$3	Bed. 2	450	$E$3<=$F$3	Nicht einschränkend	150
31		$E$4	Bed. 3	200	$E$4<=$F$4	Einschränkend	0
32		$B$8	Anzahl x	0	$B$8>=0	Einschränkend	0
33		$C$8	Anzahl y	6,25	$C$8>=0	Nicht einschränkend	6,25
34		$D$8	Anzahl z	25	$D$8>=0	Nicht einschränkend	25

Solverlösung in Excel

Simplexalgorithmus:

	x	y	z	u_1	u_2	u_3	b	
$I.)$	8	16	0	1	0	0	100	$\xrightarrow{\frac{1}{16}\cdot I.)}$
$II.)$	0	8	16	0	1	0	600	
$III.)$	16	0	8	0	0	1	200	
$Z:$	4	12	8	0	0	0	Z	

$I.)$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{25}{4}$	
$II.)$	0	8	16	0	1	0	600	$\xrightarrow{II.)-8\cdot I.)}$
$III.)$	16	0	8	0	0	1	200	
$Z:$	4	12	8	0	0	0	Z	$\xrightarrow{Z-12\cdot I.)}$

$I.)$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{25}{4}$	
$II.)$	-4	0	16	$-\frac{1}{2}$	1	0	550	
$III.)$	16	0	8	0	0	1	200	$\xrightarrow{\frac{1}{8}\cdot III.)}$
$Z:$	-2	0	8	$-\frac{3}{4}$	0	0	$Z-75$	

$I.)$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{25}{4}$	
$II.)$	-4	0	16	$-\frac{1}{2}$	1	0	550	$\xrightarrow{II.)-16\cdot III.)}$
$III.)$	2	0	1	0	0	$\frac{1}{8}$	25	
$Z:$	-2	0	8	$-\frac{3}{4}$	0	0	$Z-75$	$\xrightarrow{Z-8\cdot III.)}$

$$
\begin{array}{lrrrrrr|l}
I.) & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & \frac{25}{4} \\
II.) & -36 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -2 & 150 \\
III.) & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 25 \\
\hline
Z: & -18 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & -1 & Z-275
\end{array}
$$

Lösung: x = 0 y = 6,25 z = 25 u_2 = 150 => Z = 275

❼ LGS I

Gegeben seien die Matrix A_t und der Vektor $\vec{b}_t$

$$A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_t = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \Re$$

a) Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen LGS $A_3 \cdot \vec{x} = \vec{b}_3$.

Lösung:

$$
\begin{array}{l}
2x_1 = -6\ (1) \\
x_1 + 3x_2 = 2\ (2) \\
x_2 + 4x_3 = 3\ (3) \\
\hline
x_1 = -3\ (1) \\
x_1 + 3x_2 = 2\ (2) \\
x_2 + 4x_3 = 3\ (3) \\
\hline
x_1 = -3\ (1) \\
3x_2 = 5\ (2) \\
x_2 + 4x_3 = 3\ (3) \\
\hline
x_1 = -3\ (1) \\
x_2 = 5/3\ (2) \\
x_2 + 4x_3 = 3\ (3)
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{l}
x_1 = -3\ (1) \\
x_2 = 5/3\ (2) \\
4x_3 = 4/3\ (3) \\
\hline
x_1 = -3\ (1) \\
x_2 = 5/3\ (2) \\
x_3 = 1/3\ (3) \\
\hline
\textbf{Genau eine Lösung} \\
x_1 = -3 \\
x_2 = 5/3 \\
x_3 = 1/3
\end{array}
$$

b) Worin unterscheiden sich homogene und inhomogene LGS?

Nennen Sie zwei Unterschiede!

Lösung:

1.) Der Ergebnisvektor der LGS ist immer der Nullvektor.

2.) Da immer Rang (A\|b) = Rang (A) gilt: gibt es immer mind. eine Lösung.

c) Für welche Werte $t \in \Re$ hat das inhomogene LGS $A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}_t$ keine Lösung?

Lösung:

$$Det\left(A_t\right) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t+1 \end{vmatrix} \overset{Sarrus}{=} t(t-1)(t+1) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = 0 \quad \wedge \quad t_2 = 1 \quad \wedge \quad t_3 = -1$$

Probe für t = 0:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{I.)+II.)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \textit{Widerspruch}$$

Probe für t = -1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{II.)+III.)} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{I.)+2\cdot II.)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ *Widerspruch*

Probe für t = 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \textit{Widerspruch}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung für $t \in \{-1; 0; 1\}$

d) Geben Sie eine Lösung für das zugehörige **homogene** LGS

$A_1 \cdot \vec{x} = ??$ an.

Wählen Sie dabei y als freie Variable.

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \quad x = -y \quad \wedge \quad z = -\frac{1}{2}y$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -y & y & -\frac{1}{2}y \end{pmatrix}^T$$

❽ LGS II

Gegeben sind die Matrix C_k und der Vektor $\vec{d}$

$$C_k = \begin{pmatrix} 2 & k+2 & 2 \\ -3 & 1 & k-1 \\ k & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad mit\ k \in \Re \quad \text{und} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{x} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ eine Lösung für

die Gleichung $C_2 \cdot \vec{x} = \vec{d}$ darstellt.

Lösung:

$$C_2 \cdot \vec{x} = \vec{d} \quad \xrightarrow[\text{und nachrechnen}]{k=2 \text{ einsetzen}} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Für welche Werte von k hat das inhomogene LGS

$$C_k \cdot \vec{x} = \vec{d}$$

(i) keine Lösung?

(ii) genau eine Lösung?

(iii) unendlich viele Lösungen?

Lösung:

$$Det\left(C_k\right) = \begin{vmatrix} 2 & k+2 & 2 \\ -3 & 1 & k-1 \\ k & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{Sarrus}{=} k^3 + k^2 - 8k - 12 \overset{!}{=} 0$$

$$\xrightarrow[\text{oder Horner-Schema}]{\text{Polynomdisivion}} k_1 = 3 \quad \wedge \quad k_2 = -2$$

Probe für k = -2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[II.) - \frac{3}{2} \cdot III.)]{I.) + III.)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & -5 \\ -2 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \textit{Widerspruch}$$

Probe für k = 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[II.)+III.)]{I.)-III.)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III.) + 3 \cdot I.)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 10 & 8 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ mehrdeutig lösbar, da $\text{Rang}\left(A \mid \vec{b}\right) = \text{Rang}\left(A\right) < 3$

$\Rightarrow$ keine Lösung für $k = \{-2\}$

$\Rightarrow$ genau eine Lösung für $k \in \Re \setminus \{-2\,;\,3\}$

$\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen für $k = \{3\}$

c) Geben Sie eine Lösung für das LGS $C_3 \cdot \vec{x} = \vec{d}$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[II.)+III.)]{I.)-III.)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III.)+3\cdot I.)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 10 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 14+8z \\ 8-10z \\ 17z \end{pmatrix}$$

genauer / ausführlicher Rechenweg:

$$\begin{array}{l} 2\ x_1 + 5\ x_2 + 2\ x_3 = 4\ (1) \\ -3\ x_1 + x_2 + 2\ x_3 = -2\ (2) \\ 3\ x_1 - x_2 - 2\ x_3 = 2\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 + 5/2\ x_2 + x_3 = 2\ (1) \\ -3\ x_1 + x_2 + 2\ x_3 = -2\ (2) \\ 3\ x_1 - x_2 - 2\ x_3 = 2\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 + 5/2\ x_2 + x_3 = 2\ (1) \\ 17/2\ x_2 + 5\ x_3 = 4\ (2) \\ 3\ x_1 - x_2 - 2\ x_3 = 2\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 + 5/2\ x_2 + x_3 = 2\ (1) \\ 17/2\ x_2 + 5\ x_3 = 4\ (2) \\ -17/2\ x_2 - 5\ x_3 = -4\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 + 5/2\ x_2 + x_3 = 2\ (1) \\ x_2 + 10/17\ x_3 = 8/17\ (2) \\ -17/2\ x_2 - 5\ x_3 = -4\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 - 8/17\ x_3 = 14/17\ (1) \\ x_2 + 10/17\ x_3 = 8/17\ (2) \\ -17/2\ x_2 - 5\ x_3 = -4\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 - 8/17\ x_3 = 14/17\ (1) \\ x_2 + 10/17\ x_3 = 8/17\ (2) \\ 0 = 0\ (3) \end{array}$$

Unendlich viele Lösungen: 1 Parameter wählbar

$x_1 = 14/17 + 8/17\ x_3$

$x_2 = 8/17 - 10/17\ x_3$

x_3 beliebig wählbar

d) Der Vektor $\vec{w}^{T}$ ist definiert durch: $\vec{w}^{T} = (1 \quad 1 \quad 1) \cdot C_k \cdot C_{-1}$

Ermitteln Sie den Vektor $\vec{w}^{T}$.

Lösung:

$$\vec{w}^{T} = (1 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & k+2 & 2 \\ -3 & 1 & k-1 \\ k & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}^{T} = (-1+k \quad k+2 \quad k-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}^{T} = (-2k-7 \quad k+2 \quad -2k-4)$$

❾ Statisches Gleichgewicht und Übergangsmatrizen I

Drei Firmen A, B und C führen neue Zahnpasten auf dem Markt ein.
Zu Beginn sind die Marktanteile wie folgt verteilt: A hat 40 %,
B hat 20 % und C hat 40 %.

Während des ersten Jahres behält A 85 % seiner Kunden, verliert
5 % an B und 10 % an C;

B behält 75 % seiner Kunden, verliert 15 % an A und 10 % an C;

C behält 90 % und verliert an A und B jeweils 5 % seiner Kunden.

a) Man stelle eine Matrix, die den Übergang der Marktanteile im ersten Jahr beschreibt, und einen aktuellen Marktanteilsvektor auf.

Lösung:

$$U = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,1 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

b) Welche Anteile haben die einzelnen Firmen am Ende des ersten und des zweiten Jahres unter der Voraussetzung, dass die jährlichen Änderungen dieselben bleiben wie im ersten Jahr ?

Lösung:

$$\vec{p}_1 = U \cdot \vec{p}_0 \Rightarrow \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,1 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,39 \\ 0,19 \\ 0,42 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_2 = U \cdot \vec{p}_1 \Rightarrow \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,1 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,39 \\ 0,19 \\ 0,42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,381 \\ 0,183 \\ 0,436 \end{pmatrix}$$

c) Ermitteln Sie die *stationäre* Verteilung der Marktanteile für eine Konsumentengruppe von 10.000 Personen.

Lösung:

$$Ansatz: \quad (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{lrrr|l} I.) & -0,15 & 0,15 & 0,05 & 0 \\ II.) & 0,05 & -0,25 & 0,05 & 0 \\ III.) & 0,1 & 0,1 & -0,1 & 0 \end{array} \xrightarrow[10 \cdot III.)]{100 \cdot I.) \; 100 \cdot II.)}$$

$$\begin{array}{lrrr|l} I.) & -15 & 15 & 5 & 0 \\ II.) & 5 & -25 & 5 & 0 \\ III.) & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \xrightarrow[II.)-5 \cdot III.)]{I.)+15 \cdot III.)}$$

$$\begin{array}{lrrr|l} I.) & 0 & 30 & -10 & 0 \\ II.) & 0 & -30 & 10 & 0 \\ III.) & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \xrightarrow[\frac{1}{30} \cdot I.)]{II.)+I.)}$$

$$\begin{array}{lrrr|l} I.) & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ II.) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ III.) & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}z \quad \Rightarrow \quad x = -y + z = \frac{2}{3}z$$

$$\Rightarrow \quad (x \quad y \quad z) \;=\; \left(\frac{2}{3}z \quad \frac{1}{3}z \quad z\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3}z+\frac{1}{3}z+z \;\overset{!}{=}\; 10.000 \quad \Rightarrow \quad (x \quad y \quad z) \;=\; \left(\frac{10.000}{3} \quad \frac{5.000}{3} \quad 5.000\right)$$

⑩ Statisches Gleichgewicht und Übergangsmatrizen II

Die Umsätze zweier rivalisierender Firmen *A*, *B* entwickeln sich wie folgt:

In jedem neuen Jahr werden $^3/_4$ des bisherigen eigenen Umsatzes und $^1/_4$ des bisherigen Umsatzes der konkurrierenden Firma eingenommen.

a) Man stelle die zugehörige Übergangsmatrix M auf.

Lösung:

$$U \;=\; \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_0 \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Zu Beginn habe die Firma A keinen Umsatz und die Firma B den Umsatz U.

Welchen Umsatz haben die Firmen A und B am Ende des

(i) ersten Jahres (= Beginn des zweiten Jahres)?
(ii) zweiten Jahres?
(iii) n-ten Jahres?

Lösung:

$$\vec{p}_1 \;=\; U \cdot \vec{p}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_1 \;=\; \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_2 \;=\; U \cdot \vec{p}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_n \;=\; U \cdot \vec{p}_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_n \;=\; \frac{1}{4n}\begin{pmatrix} 2n-1 \\ 2n+1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \vec{p}_n \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{p}_n$ könnte auch mittels Ansatz "statisches Gleichgewicht" ermittelt werden.