Musterlösung **12. Jgst.** **2. Kursarbeit** **Datum: 15.12.2005**

Klasse: GY 04 c **Fach: Mathematik (Leistungsfach)**

Thema: **Integralrechnung; Kurvenuntersuchung ganzrat. Parameterfunktionen**

1.) Ermitteln Sie für folgende Randfunktionen die Stammfunktion.

a) $f(x)=\frac{4}{5}x^3+\frac{2}{3}x^2-x$

Lösung:

$$f(x)=\frac{4}{5}x^3+\frac{2}{3}x^2-x \quad \rightarrow \quad F(x)=\frac{1}{5}x^4+\frac{2}{9}x^3-\frac{1}{2}x^2+c$$

---

b) $f(x)=\frac{4}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$

Lösung:

$$f(x)=\frac{4}{x}+\frac{2}{\sqrt{x}} \quad \rightarrow \quad F(x)=4\ln|x|+4\sqrt{x}+c$$

---

c) $f_t(x)=\frac{4x^3+t}{x}$

Lösung:

$$f_t(x)=\frac{4x^3+t}{x}=4x^2+\frac{t}{x} \quad \rightarrow \quad F(x)=\frac{4}{3}x^3+t\cdot\ln|x|+c$$

---

d) $f(x)=\sqrt[n]{x^3}$

Lösung:

$$f(x)=\sqrt[n]{x^3}=x^{\frac{3}{n}} \quad \rightarrow \quad F(x)=\frac{1}{\frac{3}{n}+1}x^{\frac{3}{n}+1}+c=\frac{n}{3+n}x^{\frac{3+n}{n}}+c \quad [\,\textit{für } n\geq 2]$$

---

e) $f(x)=(x-2)^4$

Lösung:

$$f(x)=(x-2)^4 \quad \rightarrow \quad F(x)=\frac{1}{5}(x-2)^5+c$$

f) $f(x)=\dfrac{\left(3-\frac{x}{2}\right)^2}{x}$

Lösung:

$$f(x)=\frac{\left(3-\frac{x}{2}\right)^2}{x}=\frac{9}{x}-3+\frac{1}{4}x \quad \rightarrow \quad F(x)=9\ln|x|-3x+\frac{1}{8}x^2+c$$

2.) Eigenschaften des Integrals

a) Welche Eigenschaft besitzt f(x), wenn gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \;=\; 0$$

Lösung: Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

b) Berechnen Sie vorteilhaft den Wert des Integrals:

$$\int_{-5}^{-3} 2x^2\,dx+2\int_{1}^{3} x^2\,dx+\int_{-3}^{1} 2x^2\,dx$$

Lösung:

$$\int_{-5}^{-3} 2x^2\,dx+2\int_{1}^{3} x^2\,dx+\int_{-3}^{1} 2x^2\,dx \overset{\text{zusammen-fassen}}{=} 2\int_{-5}^{3} x^2\,dx$$

$$\overset{\text{Stamm-funktion}}{=} \frac{2}{3}\left[x^3\right]_5^3 \;=\; \frac{304}{3} \;=\; 101\frac{1}{3}$$

3.) Für welche Werte $a \in \Re$ gilt?

a) $$\int_a^{2a} \left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x^2} \right) dx = a^2$$

Lösung:

$$\int_a^{2a} \left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x^2} \right) dx = a^2 \xrightarrow{\text{Stamm-funktion}} \left[\frac{1}{2a} x^2 + \frac{a}{x} \right]_a^{2a} = a^2 \xrightarrow{\text{auflösen}} a^2 - \frac{3}{2} a + \frac{1}{2} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{Lösungsformel für quadr. Gleichungen}} a_1 = 1 \quad \wedge \quad a_2 = \frac{1}{2}$$

b) $$\int_0^a \left(\frac{1}{2} ax - x^2 \right) dx = \frac{9}{4}$$

Lösung:

$$\int_0^a \left(\frac{1}{2} ax - x^2 \right) dx = \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{Stamm-funktion}} \left[\frac{1}{4} ax^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a = \frac{9}{4} \xrightarrow{\text{auflösen}} \frac{1}{4} a^3 - \frac{1}{3} a^3 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{12} a^3 = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad a^3 = -27 \quad \Rightarrow \quad a = -3$$

c) $$\int_0^a x^2 \, dx = \int_0^a x \, dx$$

Lösung:

$$\int_0^a x^2 \, dx = \int_0^a x \, dx \xrightarrow{\text{Stamm-funktion}} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^a = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^a \xrightarrow{\text{auflösen}} \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{2} a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a^2 \left(\frac{1}{3} a - \frac{1}{2} \right) = 0 \xrightarrow{\text{Satz: Nullprodukt}} a_1 = 0 \quad \wedge \quad a_2 = \frac{3}{2}$$

4.) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall [a;b].

a) $\int_0^1 \left(\sqrt{x}-1\right) dx$

Lösung:

$$Nullstelle: \quad \sqrt{x}-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

$$Fläche: \quad \left|\int_0^1 \left(\sqrt{x}-1\right) dx\right| = \left|\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x\right]_0^1\right| = \left|\left(\frac{2}{3}-1\right)-0\right| = \frac{1}{3}$$

b) $\int_{-2}^{2} \left(x^3-4x\right) dx$

Lösung:

$$Nullstelle: \quad x\left(x^2-4\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad \wedge \quad x_2=2 \quad \wedge \quad x_3=-2$$

$$Fläche: \quad 2\cdot\left|\int_0^2 \left(x^3-4x\right) dx\right| = 2\cdot\left|\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_0^2\right| = 2\cdot\left|\left(4-8\right)-0\right| = 8$$

5.) Konsumenten und Produzentenrente

Gegeben seien die Angebotsfunktion $p_A(x)=\frac{1}{2}x^3+9x$ und die Nachfragefunktion $p_N(x)=38-4x^2$.
Man ermittle

a) das Marktgleichgewicht,

Lösung:

$$p_A(x)=p_N(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x^3+9x=38-4x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x^3+4x^2+9x-38=0$$

Lösung per Raten: x = 2; danach per Polynomdivision oder Horner-Schema allerdings gibt es keine weiteren Lösungen

$\Rightarrow \quad M\left(2 \mid 22\right)$

b) die Konsumentenrente bei p(x) = 22.

Lösung:

$$K_R = \int_0^2 \left(38 - 4x^2\right) dx - 2 \cdot 22 = \left[38x - \frac{4}{3}x^3\right]_0^2 - 44 = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$$

c) die Produzentenrente p(x) = 22.

Lösung:

$$P_R = 2 \cdot 22 - \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^3 + 9x\right) dx = 44 - \left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^2 = 24$$

6.) Uneigentliches Integral?!

Lösen Sie folgende drei Integrale:

a) $\lim_{a \to \infty} \int_2^a \frac{1}{x^3}\, dx$

Lösung:

$$\lim_{a \to \infty} \int_2^a \frac{1}{x^3}\, dx = \lim_{a \to \infty} \left[-\frac{2}{x^2}\right]_2^a = \underbrace{\lim_{a \to \infty} \left(-\frac{2}{a^2}\right)}_{\text{nach Grenzwertübergang: } 0} - \left(-\frac{2}{2^2}\right) = 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

b) $\lim_{a \to 1} \int_a^4 \frac{1}{x}\, dx$

Lösung:

$$\lim_{a \to 1} \int_a^4 \frac{1}{x}\, dx \underset{\text{Grenzwertübergang}}{=} \int_1^4 \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln|x|\right]_1^4 = \ln(4) - \ln(1) = \ln(4)$$

7.) Flächen zwischen Funktion und x-Achse

Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graph von f(x) und der x-Achse:

$$f\left(x\right)=x^4-3x^3+2x^2$$

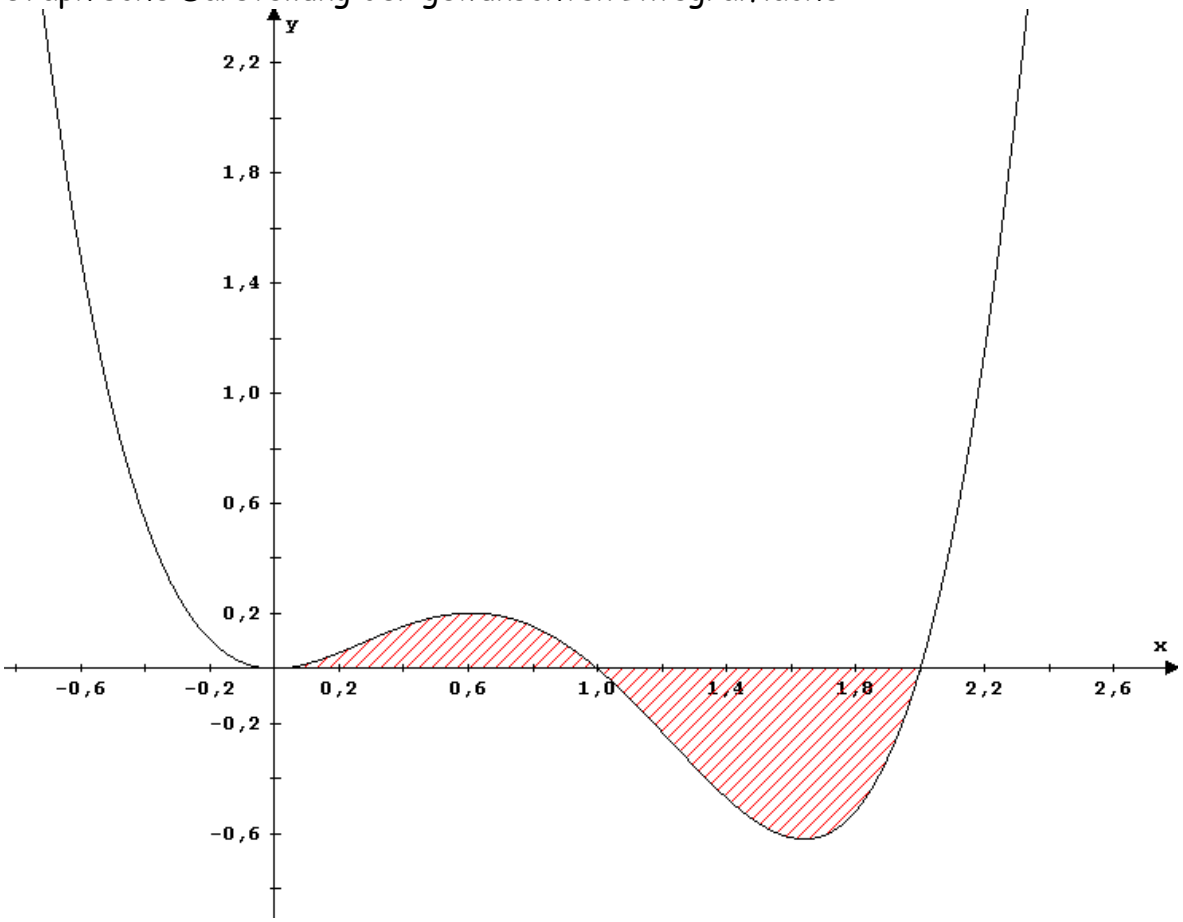
Lösung:

$$Nullstellen: \quad x^2\left(x^2-3x+2\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad \wedge \quad x_2=1 \quad \wedge \quad x_3=2$$

$$Fläche:$$

$$\int_0^1\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right)dx+\left|\int_1^2\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right)dx\right|=\frac{7}{60}+\left|-\frac{4}{15}-\frac{7}{60}\right|=\frac{1}{2}$$

Graphische Darstellung der gewünschten Integralfläche:



8.) Flächen zwischen zwei Funktionen

Berechnen Sie die Fläche zwischen den Graphen von f(x) und g(x):

$$f(x) = x^2 - 3 \qquad g(x) = -x^2 + 5$$

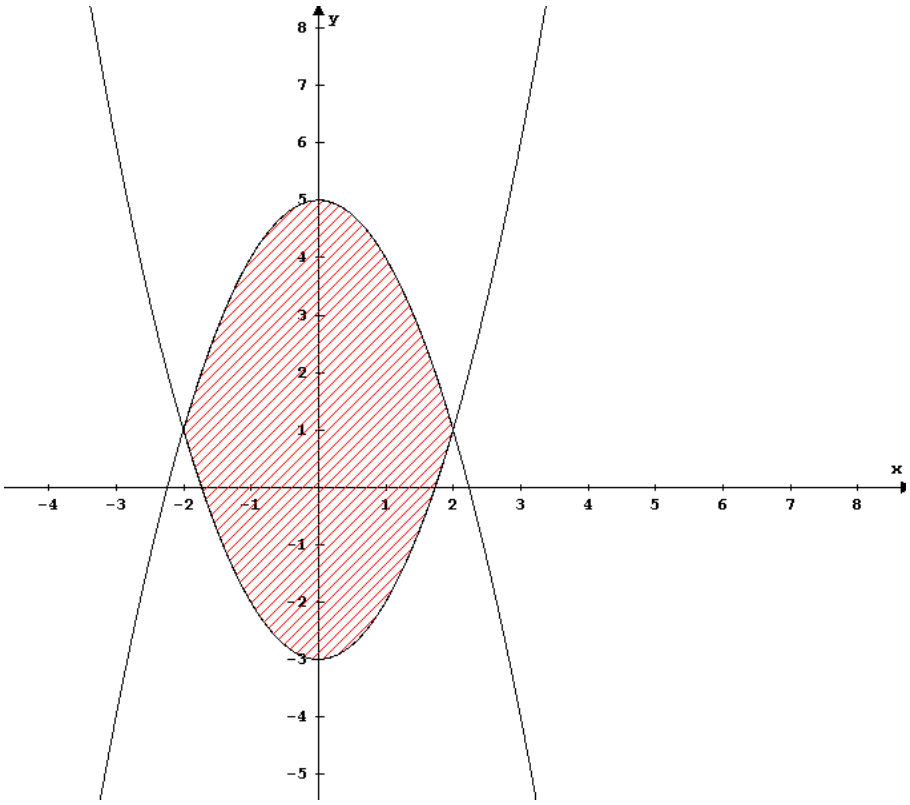
Lösung:

$$\textit{Schnittstellen}: \quad x^2 - 3 = -x^2 + 5 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2 \quad \wedge \quad x_2 = 2$$

$$\textit{Fläche}:$$

$$2 \cdot \int_0^2 \left(-2x^2 + 8\right) dx = 2 \cdot \left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x \right]_0^2 = 2 \cdot \left[-\frac{16}{3} + 16 \right]_0^2 = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$$

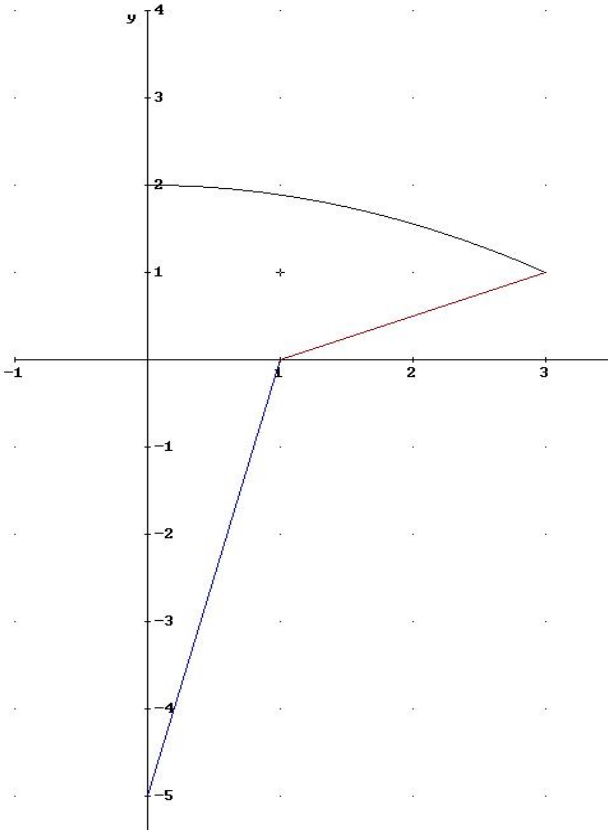
Graphische Darstellung der gewünschten Integralfläche:



9.) Berechnen Sie den Inhalt der dargestellten Flächen

a) Die Zeichnung setzt sich aus folgenden 3 Funktionen zusammen:

$$f(x)=5x-5 \qquad g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \qquad h(x)=-\frac{1}{9}x^2+2$$



Lösung:

$$Fläche\,1: \quad A_1=\left|\int_0^1 (5x-5)\,dx\right|=\left|\frac{5}{2}x^2-5x\right|_0^1=\frac{5}{2}$$

$$Fläche\,2: \quad A_2=\int_0^3\left(-\frac{1}{9}x^2+2\right)dx-\int_1^3\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)dx$$

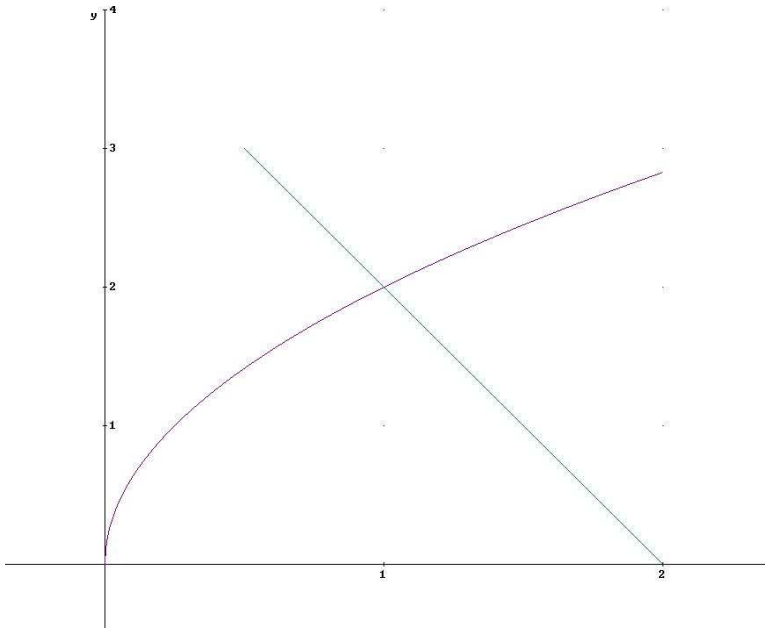
$$=\left[-\frac{1}{27}x^3+2x\right]_0^3-\left[\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\right]_1^3$$

$$= \quad 5-1 \quad = \quad 4$$

$$Gesamtfläche=6,5$$

b) Die Zeichnung setzt sich aus folgenden beiden Funktionen zusammen:

$$f(x) = 2\sqrt{x} \qquad 2x + y - 4 = 0$$



Lösung:

$$\textit{Schnittstelle}: \quad 2\sqrt{x} = -2x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$A = 2\int_0^1 \sqrt{x}\, dx + \int_1^2 (-2x+4)\, dx = 2\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1 + \left[-x^2 + 4x\right]_1^2$$

$$A = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

10.) Untersuchung von Funktionen I

Welche ganzrationale Funktion 4. Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente, schneidet die x-Achse an der Stelle x = 2 und schließt mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt 8 FE ein?

Lösung:

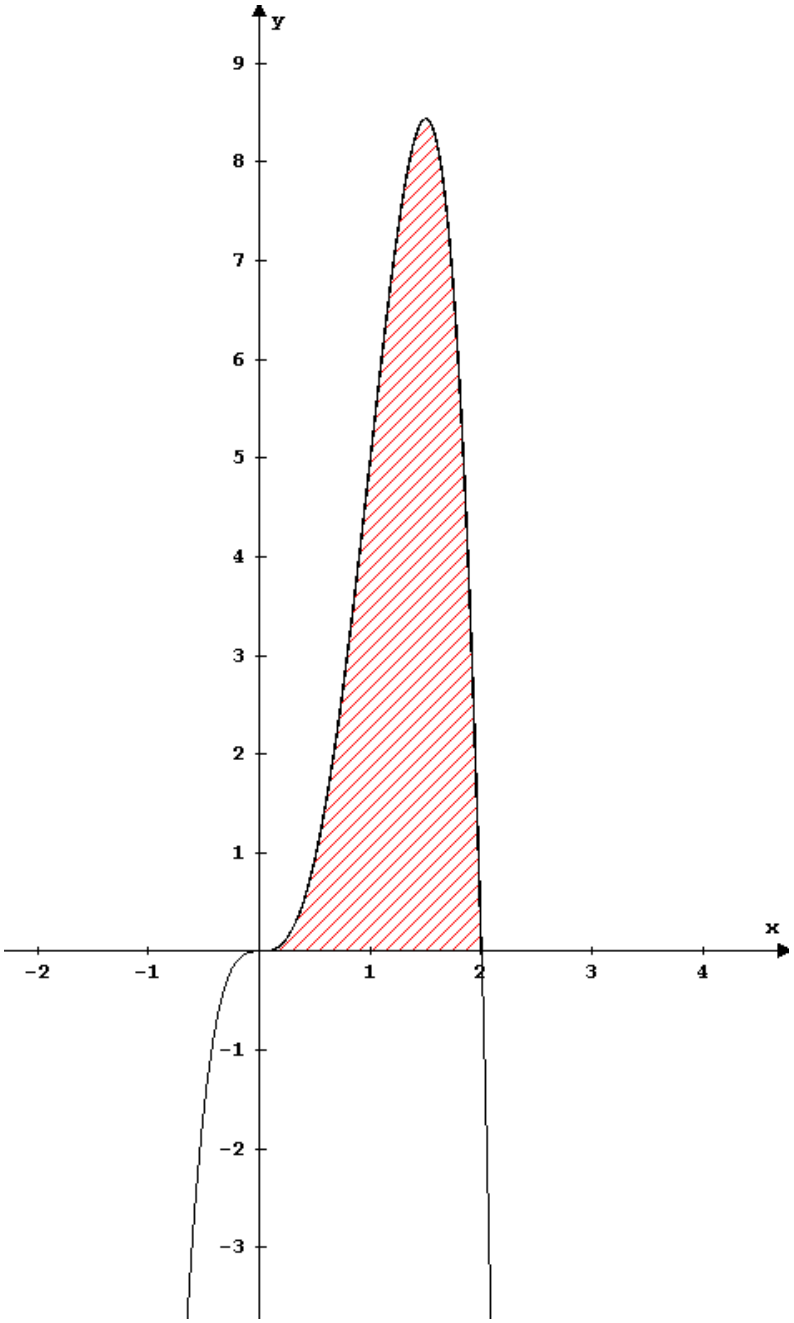
I.)	*Ursprung*	$f(0) = 0$	$\Rightarrow$	$e = 0$
II.)	W in x = 0	$f''(0) = 0$	$\Rightarrow$	$c = 0$
III.)	m = 0 in W	$f'(0) = 0$	$\Rightarrow$	$d = 0$
IV.)	x = 2 ist NS	$f(2) = 0$	$\Rightarrow$	$16a + 8b = 0$
V.)	Fläche ist 8	$F(x) = 8$	$\Rightarrow$	$\left[\frac{1}{5}ax^5 + \frac{1}{4}bx^4\right]_0^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad \frac{32}{5}a + 4b = 8$

$IV.)\quad 16a+8b=0 \quad\Rightarrow\quad b=-2a$

$V.)\quad \frac{32}{5}a+4b=8 \quad\Rightarrow\quad \frac{32}{5}a+4\cdot(-2a)=8$

$\Rightarrow\quad a=-5 \quad\Rightarrow\quad b=10$

$\Rightarrow\quad f(x) \;=\; -5x^5+10x^4$



OPTION: Von den Aufgaben 11 und 12 bitte nur eine bearbeiten!!!

11.) Untersuchung von Funktionen II

Für $k \in \Re^+$ ist die Funktionenschar f_k gegeben durch:

$$f_k(x) = kx^3 - x$$

(i) Untersuchen Sie die Funktion hinsichtlich folgender Kriterien:

a) Nullstellen b) Wendepunkt

c) Wendetangente

Lösung:

Nullstellen:

$$f_k(x) = kx^3 - x = x\left(kx^2 - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \wedge x_2 = \sqrt{\frac{1}{k}} \wedge x_3 = -\sqrt{\frac{1}{k}}$$

Wendepunkt:

$$f_k''(x) = 6kx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \wedge$$
$$f_k'''(0) = 6k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(0 \mid 0)$$

Wendetangente:

$$m = f_k'(0) = 3kx^2 - 1 = -1$$
$$\Rightarrow \quad t_w(x) = -x$$

(ii) Bestimmen Sie die Werte für k in den nebenstehenden Anlage.

Lösung:

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{k}} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{k}} = 1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{1}{k}} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad k_2 = 4$$

(iii) Für welchen Wertebereich von k, hat die Funktion Nullstellen im Intervall [1 ; 2]?

Lösung:

$$x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1 \quad \wedge \quad x_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{k}} = 2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad k \in \left[\frac{1}{4} ; 1 \right]$$

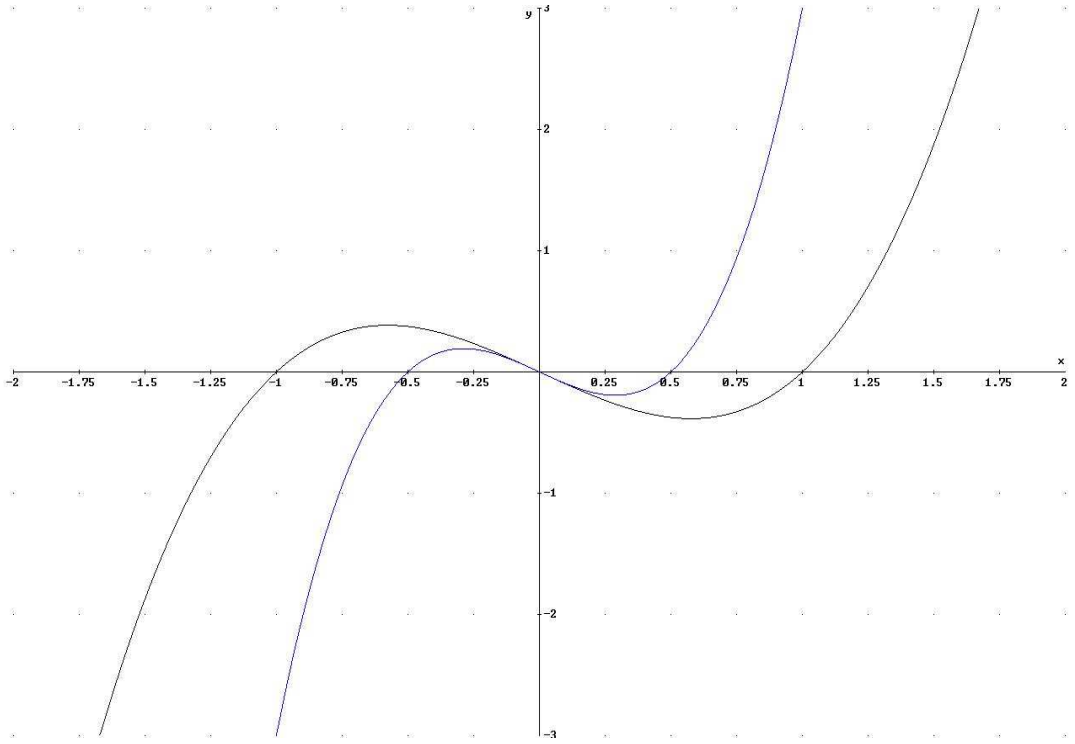
(iv) Bestimmen Sie k so, dass die Funktion mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt 1 einschließt.

Lösung:

$$A = 2 \cdot \left| \int_0^{\sqrt{\frac{1}{k}}} \left(kx^3 - x \right) dx \right| = 2 \cdot \left| \left[\frac{1}{4} kx^4 - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\sqrt{\frac{1}{k}}} \right| = 2 \cdot \left| \left(\frac{1}{4k} - \frac{1}{2k} \right) \right|$$

$$A = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \left| \left(\frac{1}{4k} - \frac{1}{2k} \right) \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \left| -\frac{1}{4k} \right| = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

Anlage zu Aufgabe 11.)



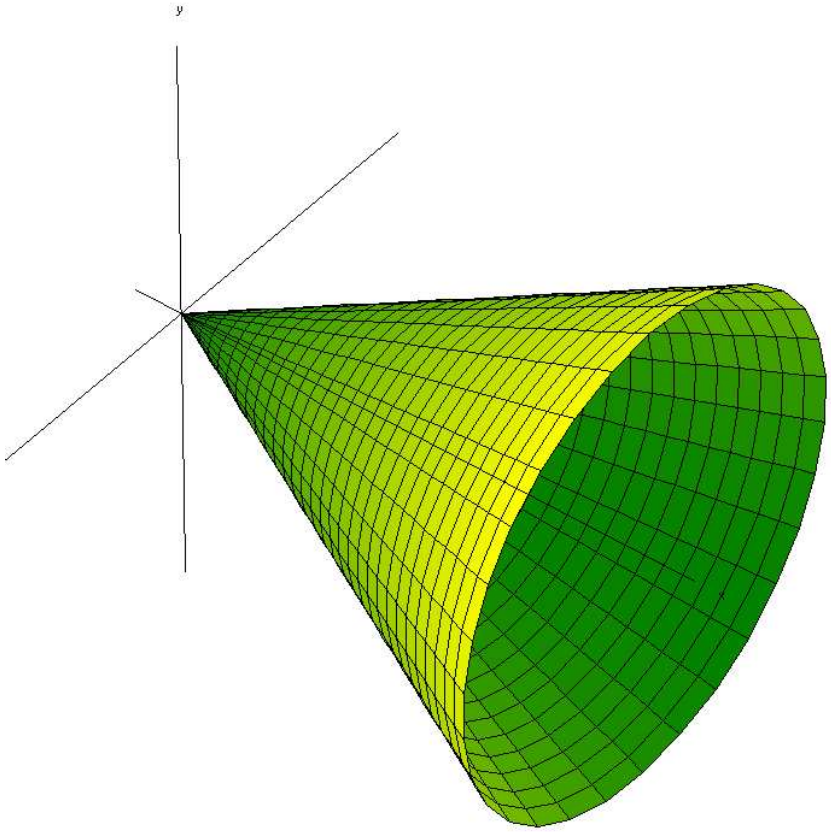
12.) Rotationskörper

a) Die Volumenformel des Kegels beträgt $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$.

Leiten Sie diese Formel mittels Rotationsvolumina her.

Anmerkung:

Fertigen Sie zuerst eine Skizze an, bei der Sie Radius und Höhe in der Randfunktion festlegen!

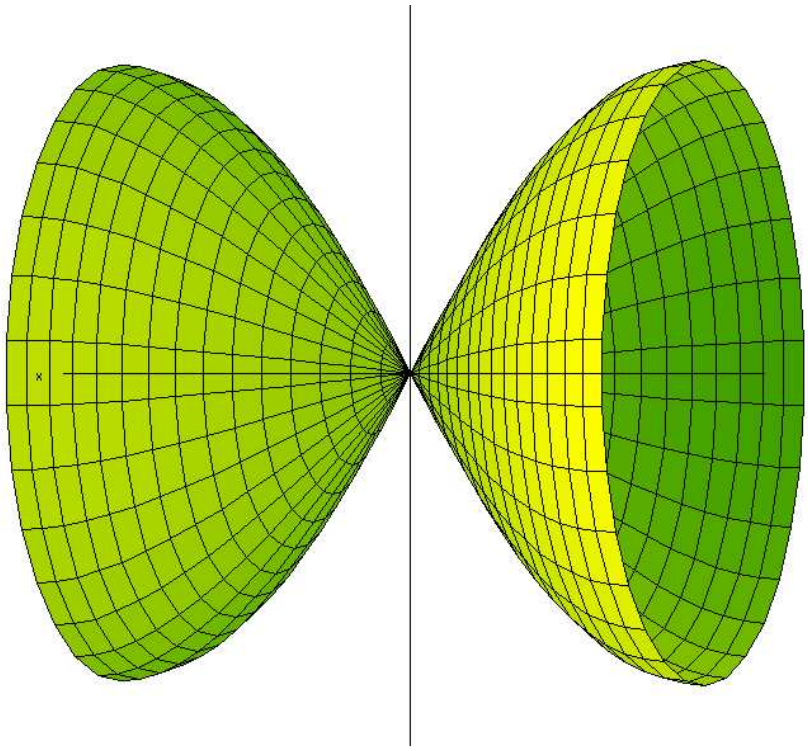


Lösung:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3} \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \left[x^3 \right]_0^h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot h^3 = \frac{1}{3} r^2 \pi h$$

b) Ermitteln Sie das Volumen des gegebenen Rotationskörpers mit der Randfunktion $f(x) = x^3 - 3x$ in den Grenzen von [-1;1].



Lösung:

$$V = 2\pi \int_0^1 \left(x^3 - 3x\right)^2 dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 \left(x^6 - 6x^4 + 9x^2\right) dx$$

$$V = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{6}{5}x^5 + 3x^3\right]_0^1$$

$$V = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{6}{5} + 3\right) = \frac{136}{35}\pi = 3\frac{31}{35}\pi$$