**Musterlösung** **12. Jgst.** **1. Kursarbeit** **Datum: 20.10.2005**

**Klasse: GY 04 c** **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

**Themen:** **Ganzrat. Parameterfunktionen, Steckbriefaufgaben, Extremwert-aufgaben und Newton-Iteration**

---

## 1.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

Gegeben sei die Funktionenschar $f_k$ mit

$$f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{k}x(k+2) \quad ; \qquad k > 0$$

(i) Untersuchen Sie die Funktion hinsichtlich folgender Kriterien:

a) Symmetrie

b) Nullstellen

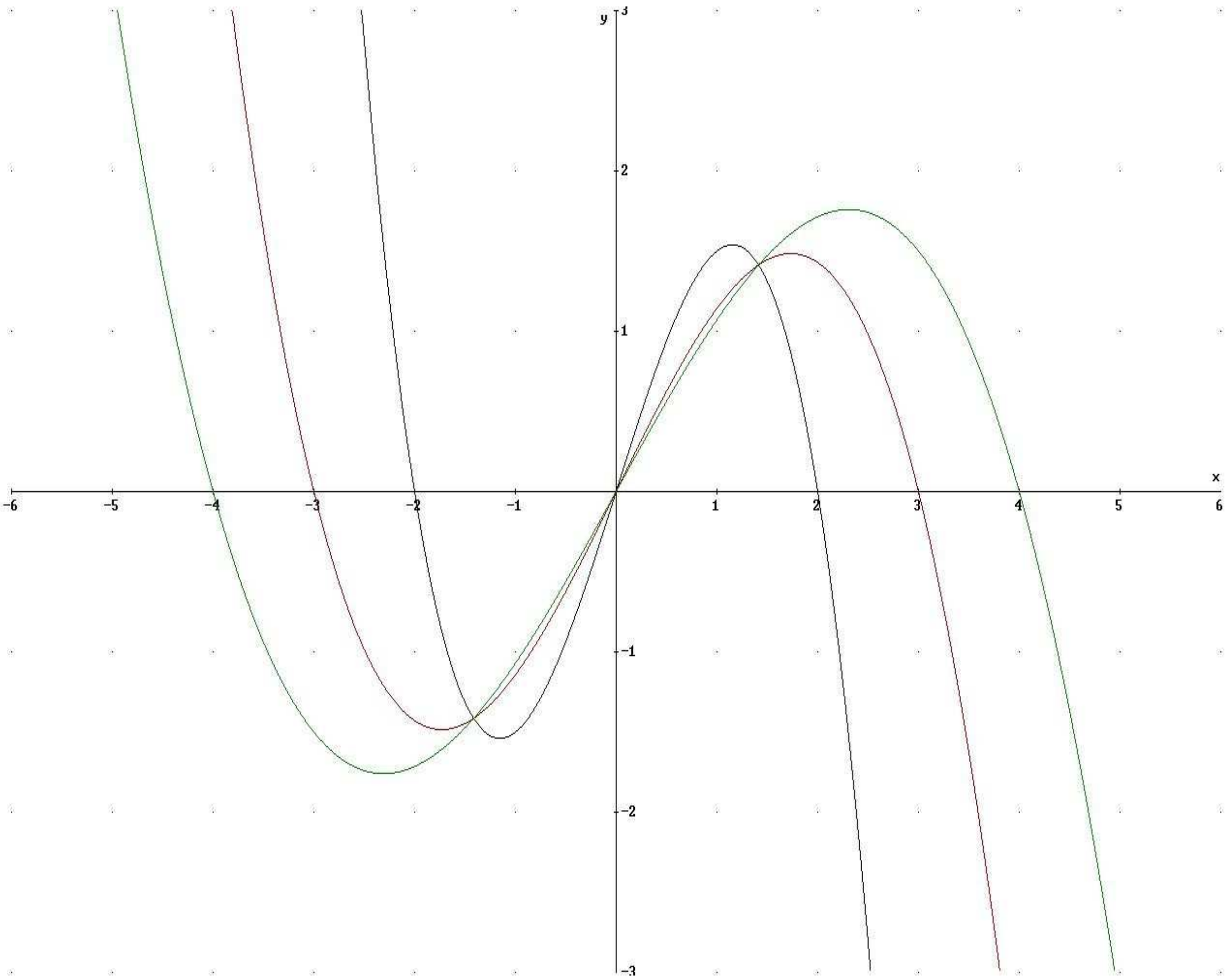
c) Extrem**stellen**

d) Wendepunkt

e) Wendetangente

f) Grenzwertverhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

**Lösung:** *Graph der Funktion*



*Symmetrie*:

$$f_k(-x) = -\frac{1}{k}(-x)^3 + \frac{1}{k}(-x)(k+2) = \frac{1}{k}x^3 - \frac{1}{k}x(k+2) = -f_k(x)$$

$\Rightarrow \quad$ *Punktsymmetrie*

*Nullstellen*:

$$\frac{1}{k}x\left(-x^2+k+2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad |x| = \sqrt{k+2}$$

*Extremwertstellen*:

$$f_k'(x) = -\frac{3}{k}x^2 + \frac{1}{k}(k+2) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 \overset{!}{=} k+2$$

$$\Rightarrow \quad |x| = \sqrt{\frac{k+2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3(k+2)}$$

$$f_k''(x) = -\frac{6}{k}x \quad \Rightarrow \quad f_k''\left(\frac{1}{3}\sqrt{3(k+2)}\right) = -\frac{2}{k}\sqrt{3(k+2)} < 0$$

$$\Rightarrow \quad \textit{Max in } x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3(k+2)}$$

$$\Rightarrow \quad \textit{Min in } x_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3(k+2)} \quad \textit{wegen Punktsymmetrie}$$

*Wendepunkt*:

$$f_k''(x) = -\frac{6}{k}x \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$f_k'''(x) = -\frac{6}{k} \quad \Rightarrow \quad f_k'''(0) = -\frac{6}{k} \quad \Rightarrow \quad W(0 \mid 0)$$

*Wendetangente*:

$$f_k'(0) = \frac{1}{k}(k+2) = m \quad \xrightarrow{\text{da W(0/0) gilt, ist b = 0}} \quad t_k(x) = \frac{1}{k}(k+2)x = \left(1+\frac{2}{k}\right)x$$

*Grenzwertverhalten*:

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = -\infty \qquad \textit{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \infty$$

(ii) Die Funktion besitzt für $k_i \neq k_j \quad mit\ i, j \in N\ und\ i \neq j$ mehrere identische Funktionswerte, die von k unabhängig sind.

Beweisen Sie diese Behauptung und ermitteln Sie die gesuchten Werte.

**Lösung:**

$$f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{k}x(k+2) \quad ; \qquad k > 0$$

$$f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x) \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{k_1}x^3 + \frac{1}{k_1}x(k_1+2) = -\frac{1}{k_2}x^3 + \frac{1}{k_2}x(k_2+2)$$

$$\xrightarrow{+\frac{1}{k_2}x^3 - \frac{1}{k_2}x(k_2+2)} \quad \frac{1}{k_2}x^3 - \frac{1}{k_2}x(k_2+2) - \frac{1}{k_1}x^3 + \frac{1}{k_1}x(k_1+2) \quad = \quad 0$$

$$\xrightarrow{x\ ausklammern} \quad x\left[\frac{1}{k_2}x^2 - \frac{1}{k_2}(k_2+2) - \frac{1}{k_1}x^2 + \frac{1}{k_1}(k_1+2)\right] \quad = \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x^2\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right) \quad = \quad \frac{1}{k_2}(k_2+2) - \frac{1}{k_1}(k_1+2)$$

$$\xrightarrow{ausmultiplizieren} \quad x^2\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right) \quad = \quad 1 + \frac{2}{k_2} - 1 - \frac{2}{k_1}$$

$$\xrightarrow{\text{(1-1) verrechnen und 2 ausklammern}} \quad x^2\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right) \quad = \quad 2\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{da } k_1 \neq k_2 \text{ gilt, darf durch } \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \text{ geteilt weden}} \quad x^2 \quad = \quad 2$$

$$\Rightarrow \quad |x| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad Ergebnis: \quad S_1(0 \mid 0) \quad S_2\left(\sqrt{2} \mid \sqrt{2}\right) \quad S_3\left(-\sqrt{2} \mid -\sqrt{2}\right)$$

(iii) Der Ursprung O sowie die Punkte A (x / 0) und B (x / $f_k(x)$) bilden für k > 0 ein rechtwinkliges Dreieck im 1. Quadranten.

Für welches x hat dieses Dreieck einen maximalen Flächeninhalt, wenn k = 6 gilt? Wie groß ist dann die Fläche?

**Lösung:**

$$f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{k}x(k+2) \quad ; \qquad k > 0$$

$$\mathit{Flächenfunktion}: \quad f_\Delta(x) = \frac{1}{2}x \cdot f_k(x)$$

$$f_{\Delta,k}(x) \quad = \quad \frac{1}{2}x \cdot f_k(x) \quad = \quad \frac{1}{2}x \cdot \left[-\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{k}x(k+2)\right]$$

$$f_{\Delta,k}(x) \quad = \quad -\frac{1}{2k}x^4 + \frac{1}{2k}x^2(k+2)$$

$$f_{\Delta,k}'(x) \quad = \quad -\frac{2}{k}x^3 + \frac{1}{k}x(k+2) \quad \overset{!}{=} \quad 0$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{k}x \ \ ausklammern} \quad \frac{1}{k}x\left(-2x^2 + k + 2\right) \quad \overset{!}{=} \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad |x| = \sqrt{\frac{k}{2} + 1}$$

$$\xrightarrow{k=6 \ \ einsetzen} \quad f_{\Delta,6}(x) \quad = \quad -\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$\Rightarrow \quad f_{\Delta,6}'(x) \quad = \quad -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x \quad und \quad f_{\Delta,6}''(x) \quad = \quad -x^2 + \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad |x| = 2$$

$$\Rightarrow \quad f_{\Delta,6}''(2) \quad = \quad -\frac{8}{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad Max\left(2 \;\middle|\; \frac{4}{3}\right)$$

(iv) Bestimmen Sie die Werte für k in den nebenstehenden Anlage.

**Lösung:** Orientierung an den Nullstellen

$$f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{k}x(k+2) \quad ; \qquad k > 0$$

$$Nullstellen: \quad x = \sqrt{k+2}$$

$$Wert\ \ für\ k_1: \quad 2 = \sqrt{k+2} \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

$$Wert\ \ für\ k_2: \quad 3 = \sqrt{k+2} \quad \Rightarrow \quad k = 7$$

$$Wert\ \ für\ k_3: \quad 4 = \sqrt{k+2} \quad \Rightarrow \quad k = 14$$

(v) Für welchen Wertebereich von k, hat die Funktion Nullstellen im Intervall [1,5 ; 2]?

**Lösung:** Orientierung an den Nullstellen

Dabei werden die Intervallgrenzen in die Nullstellengleichung

eingesetzt und nach k aufgelöst.

$$f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{k}x(k+2) \quad ; \qquad k > 0$$

$$Nullstellen: \quad x = \sqrt{k+2}$$

$$Wert\ \ für\ k_1: \quad 2 = \sqrt{k+2} \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

$$Wert\ \ für\ k_2: \quad 1{,}5 = \sqrt{k+2} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{4}$$

**2.) Steckbrief I**

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades mit folgenden Eigenschaften:

O (0 / 0) ist Punkt des Graphen, W (2 / 4) ist Wendepunkt und die zugehörige Wendetangente hat die Steigung m = - 3.

**Lösung:**

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$I.)\quad P(0 \mid 0) \quad \Rightarrow \quad d = 0$$
$$II.)\quad W(2 \mid 4) \quad \Rightarrow \quad 8a + 4b + 2c = 4$$
$$III.)\quad \text{x = 2 ist Wendestelle} \quad \Rightarrow \quad 12a + 2b = 0$$
$$IV.)\quad \text{m = - 3 in x = 2} \quad \Rightarrow \quad 12a + 4b + c = -3$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \quad = \quad \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 12x$$

**3.) Untersuchung einer ganzrationalen Funktion**

a) Zeigen Sie, dass bei der Funktionenschar

$$f_k(x) = x^2 - kx \quad ; \qquad k > 0$$

die relative Extremstelle in der Mitte zwischen den Nullstellen liegt.

**Lösung:**

$$Nullstellen: \quad x(x-k) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = k$$

$$Extremwertstelle: \quad f_k'(x) = 2x - k \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k}{2}$$

$$Ergebnis: \quad x = \frac{k}{2} \text{ ist Mittelwert des Intervalls } [0\,;k].$$

b) Ermitteln Sie die Ortskurve der Extremwerte der Funktionen-

schar $f_k(x) = \frac{x^2}{k} + \frac{k^2}{x} \quad ; \qquad k > 0$.

**<u>Lösung:</u>**

$$f_k(x) = \frac{x^2}{k} + \frac{k^2}{x} \quad ; \qquad k > 0$$

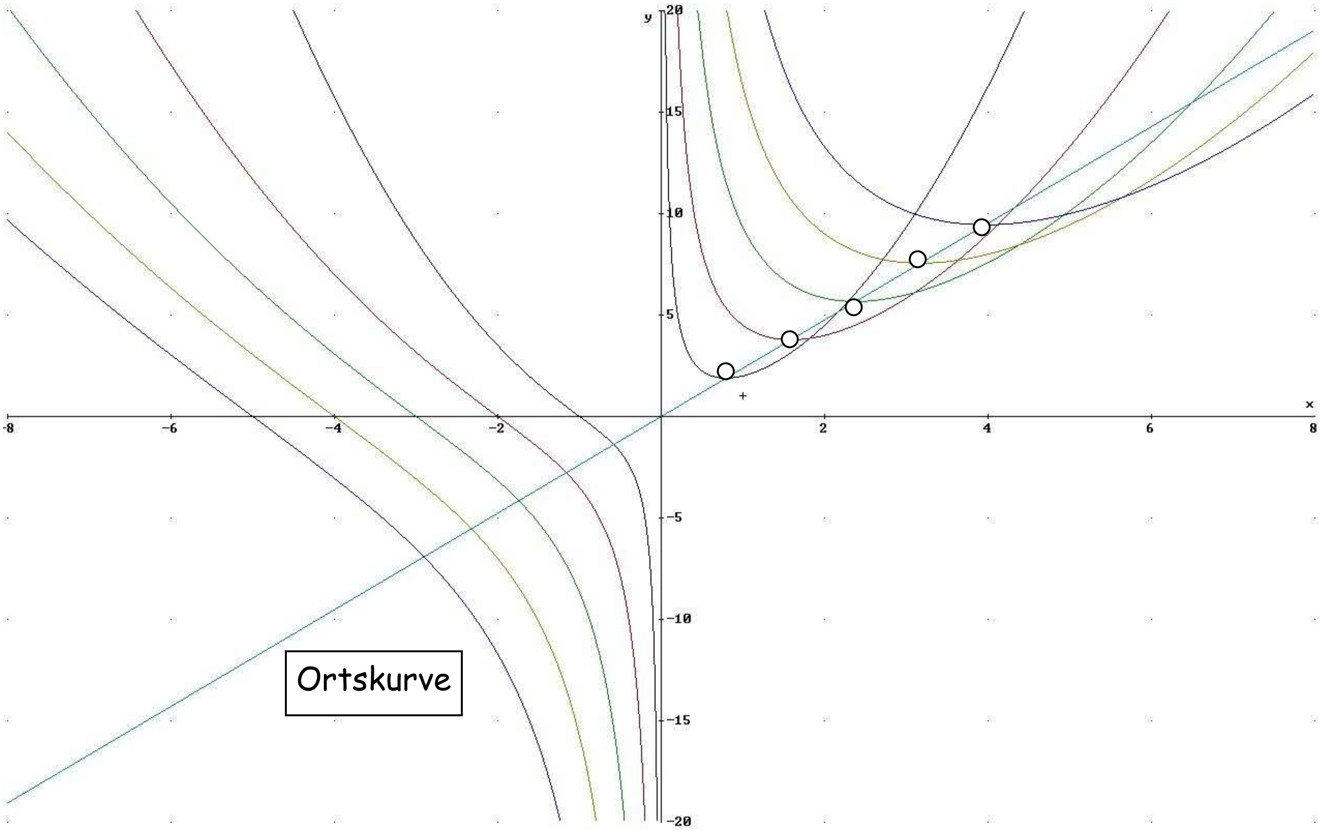
$$f_k{}'(x) = \frac{2x}{k} - \frac{k^2}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{k} = \frac{k^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^3 = \frac{1}{2}k^3$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\, k \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt[3]{2}\, x$$

$$\xrightarrow{\text{k in Funktion eingesetzt}} \quad f_{k=\sqrt[3]{2}\,x}(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{2}\,x} + \frac{\left(\sqrt[3]{2}\,x\right)^2}{x}$$

$$\Rightarrow \quad f_{k=\sqrt[3]{2}\,x}(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{4}\,x \overset{\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}}{=} \frac{x}{\sqrt[3]{2}} + \frac{2\,x}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3x}{\sqrt[3]{2}}$$

graphische Veranschaulichung:



**4.) Steckbrief II**

Der Graph einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3 berührt die x-Achse im Ursprung und hat den Hochpunkt H (2 / 2).

Wie lautet die Funktionsvorschrift?

**Lösung:**

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$I.)\quad P(0 \mid 0) \quad \Rightarrow \quad d = 0$$
$$II.)\quad \text{x = 0 ist Extremstelle} \quad \Rightarrow \quad c = 0$$
$$III.)\quad \text{x = 2 ist Extremstelle} \quad \Rightarrow \quad 12a + 4b = 0$$
$$IV.)\quad H(2 \mid 2) \quad \Rightarrow \quad 8a + 4b = 2$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \quad = \quad -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

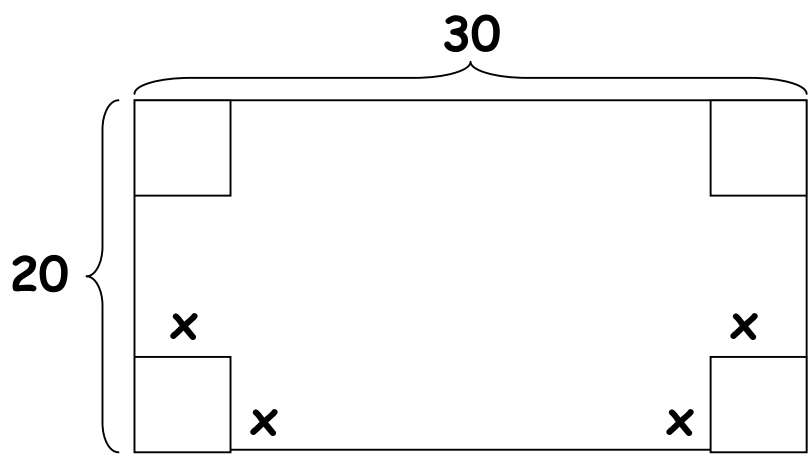
**5.) Extremwert I**

Aus einem rechteckigen Stück Pappe mit der Länge 30 cm und der Breite 20 cm soll man einen Kasten ohne Deckel herstellen, indem man an jeder Ecke ein Quadrat ausschneidet und die entstehenden Seitenflächen nach oben biegt.
Der Kasten soll ein möglichst großes Volumen haben.

a) Fertigen Sie ein Planskizze an, die als Lösungsgrundlage dienen soll.

b) Ermitteln Sie das maximale Volumen.

**Lösung:**



$$Nebenbedingung: \quad I.)\ c = x \qquad II.)\ a = 20 - 2x \qquad III.)\ b = 30 - 2x$$

$$Zielfunktion: \qquad V(a,b,c) = a \cdot b \cdot c$$

$$\xrightarrow{NB\ in\ ZF} \quad V(x) \quad = \quad (20-2x)\cdot(30-2x)\cdot x \quad = \quad 4x^3 - 100x^2 + 600x$$

$$\xrightarrow{Ableitung} \quad V'(x) \quad = \quad 12x^2 - 200x + 600 \quad \overset{!}{=} \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 12,74 \quad \wedge \quad x_2 = 3,924$$

$$V''(x) \quad = \quad 24x - 200 \quad \Rightarrow \quad V''(3,924) \quad = \quad -105,83 \quad < \quad 0$$

$$\Rightarrow \quad Max(3,924 \mid 1.056,31)$$

$$Randwerte: \quad D = [0\,;10] \quad ; \quad V(0) = 0 \quad und \quad V(10) = 0$$

**6.) Newton I**

Ermitteln Sie den Wert für $\sqrt{10}$ auf drei Stellen genau mit Hilfe des Newton-Iterationsverfahrens.

**Lösung:**

$f(x) = 1x^2 -10x^0$ $\qquad$ $f'(x) = 2x^1$

| n | $x_{n+1}$ | $f(x_n)$ | $f'(x_n)$ | $x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | -1 | 6 | 3.16666 |
| 1 | 3.1666 | 0.027777 | 6.33333 | 3.16228 |
| 2 | 3.1622 | 1.92366E-005 | 6.32456 | 3.16227 |
| 3 | 3.16227 | 9.25304E-012 | 6.32455 | 3.16227 |

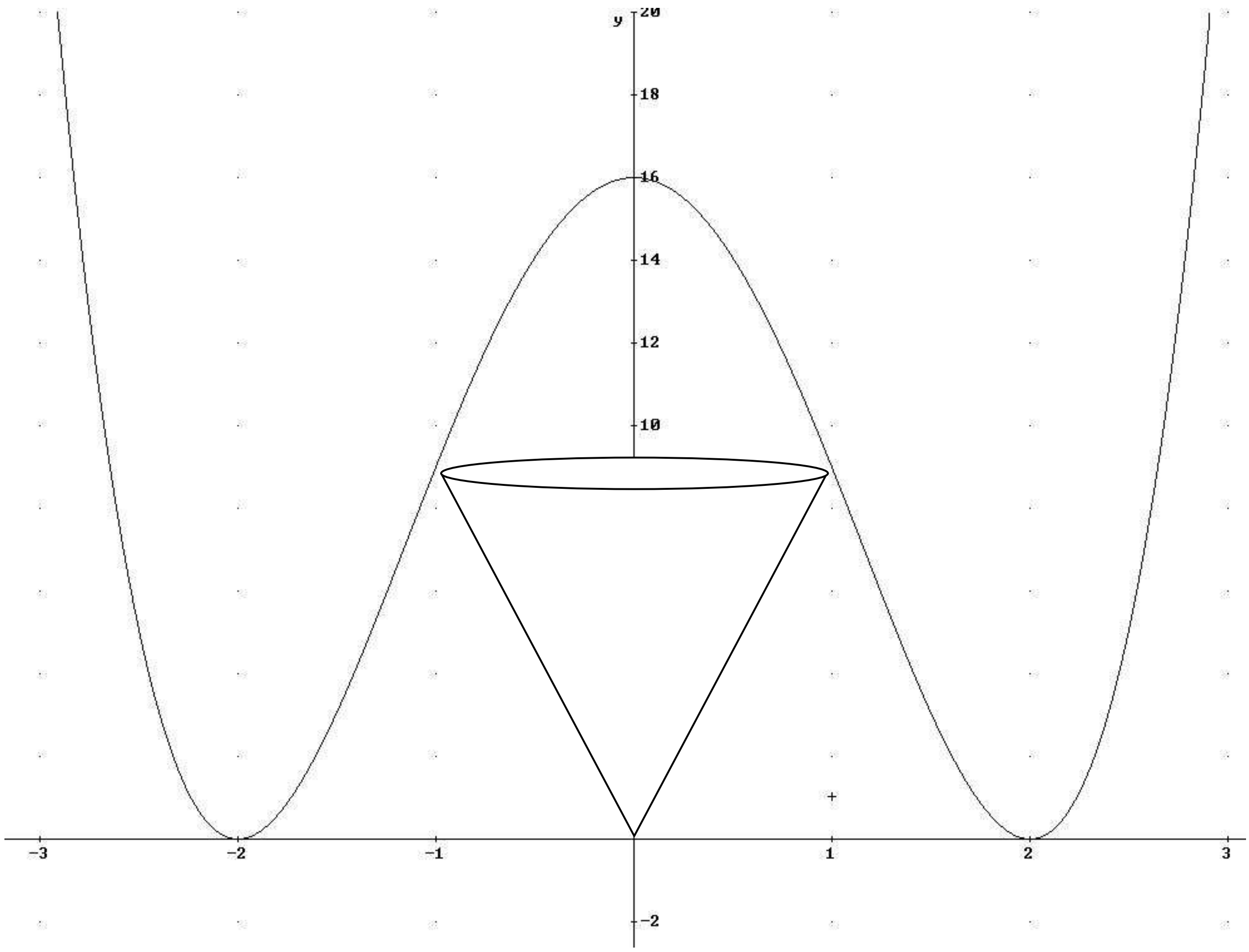
***OPTION: Von den Aufgaben 7 und 8 bitte nur eine bearbeiten!!!***

**7.) Extremwert II**

Der Graph der Funktion f mit $f(x)=(x^2-4)^2$ schließt mit der Abszisse (x-Achse) eine Fläche ein. Dieser Fläche kann man Dreiecke einbeschreiben, die gleichschenklig und symmetrisch zur Ordinate (y-Achse) sind und deren Spitze im Ursprung liegt.

Lässt man diese Dreiecke um die Ordinate rotieren, entstehen Kegel.

Welcher Kegel hat das größte Volumen?



**Lösung:**

$$Nebenbedingung: \quad I.)\ r = x \qquad II.)\ h = f(x)$$

$$Zielfunktion: \qquad V_{Kegel}(r,h) = \frac{1}{3} r^2 \pi\, h$$

$$\xrightarrow{NB\ in\ ZF} \quad V(x) \;=\; \frac{1}{3}\pi\, x^2 \left(x^2 - 4\right)^2 \;=\; \frac{1}{3}\pi\, x^2 \left(x^4 - 8x^2 + 16\right)$$

$$\Rightarrow \quad V(x) \;=\; \frac{1}{3}\pi \left(x^6 - 8x^4 + 16x^2\right)$$

$$\xrightarrow{Ableitung} \quad V'(x) \;=\; \frac{1}{3}\pi \left(6x^5 - 32x^3 + 32x\right) \;\stackrel{!}{=}\; 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x\left(3x^4 - 16x^2 + 16\right) \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$\xrightarrow{Substitution:\ x^2 = u} \quad 3u^2 - 16u + 16 \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = 3 \quad \wedge \quad u_2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad |x| = \sqrt{3} \quad \wedge \quad |x| = 1$$

$$V''(x) \;=\; \frac{1}{3}\pi \left(30x^4 - 96x^2 + 32\right)$$

$$\Rightarrow \quad V''(1) \;=\; -\frac{34}{3}\pi \;<\; 0 \quad \Rightarrow \quad Max(1 \mid 3\pi)$$

$$\Rightarrow \quad V''\left(\sqrt{3}\right) \;=\; \frac{14}{3}\pi \;>\; 0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(\sqrt{3} \mid \pi\right)$$

**8.) Newton II**

Ein Quader habe die Kantenlängen a = 6 cm, b = 4 cm und c = 3 cm. Jede Kante soll um x cm vergrößert werden.

Wie groß muss man x wählen, damit ein viermal so großer Quader entsteht?

*Anmerkung:*

*Die Lösung sollte auf 3 Dezimalstellen genau angegeben werden.*

**Lösung:**

$$f(x) = (6+x)(4+x)(3+x) \overset{!}{=} 288$$

$$f(x) = x^3 + 13x^2 + 54x + 72 - 288$$

$$f(x) = x^3 + 13x^2 + 54x - 216$$

$$f'(x) = 3x^2 + 26x + 54$$

$$Newton - Iteration:$$

| n | $x_{n+1}$ | $f(x_n)$ | $f'(x_n)$ | $x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | -48 | 118 | 2.4067 |
| 1 | 2.40677 | 3.21123 | 133.9540 | 2.3828 |
| 2 | 2.38280 | 0.01160 | 132.9862 | 2.3827 |