Musterlösung: **11. Jgst.** **4. Test** **Datum: 07.03.2005**

Klasse: GY 04 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Differenzierbarkeit; Kurvendiskussion ganzrat. Funktionen

---

❶ **Gegeben sei die Funktion f(x) mit der Funktionsvorschrift**

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-x^2+1$$

a) Bestimmen Sie $f(1),\ f'(-2)\ und\ f''\left(\frac{1}{2}\right).$

Lösung:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-x^2+1 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-2x \quad und \quad f''(x)=3x-2$$

$$\Rightarrow \quad f(1)=\frac{1}{2} \quad und \quad f'(-2)=10 \quad und \quad f''\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

b) Wo besitzt die Funktion die Steigung m = 2 ?

Lösung:

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-2x \overset{!}{=} 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}x^2-2x-2=0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1=2 \ \wedge \ x_2=-\frac{2}{3}$$

c) Welche Steigung hat die Funktion in $x_0=-4$?

Lösung: $f'(-4)=\frac{3}{2}\cdot(-4)^2-2\cdot(-4) \quad \Rightarrow \quad m=32$

❷ **Welche beiden Kriterien müssen gelten, damit eine Funktion mind. ein Extremum besitzt?**

Lösung:

$$f'(x_0)\overset{!}{=}0 \quad und \quad f''(x_0)>0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum in } x_0$$

$$f'(x_0)\overset{!}{=}0 \quad und \quad f''(x_0)<0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum in } x_0$$

Alternative zu $f''(x_0)$: Vorzeichenwechsel in $f'(x_0)$

❸ **Ableitungen: Bilden Sie die erste Ableitung folgender Funktionen.**

a) $f(x)=(ax+1)(x-2) \quad f'(x)=2ax-2a+1$

b) $f(x)=x^{2k+1} \quad f'(x)=(2k+1)x^{2k}$

c) $f(x)=kx^{k+1}+\frac{2}{x^k} \qquad f'(x)=k(k+1)x^k-\frac{2k}{x^{k+1}}$

d) $f(x)=\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2 \qquad f'(x)=\frac{1}{2}x-3$

❹ **Gegeben sei die Funktion g(x) mit der Funktionsvorschrift**

$$g(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x$$

a) Wie lautet der Definitionsbereich?

Lösung: $D=\Re$

b) Berechnen Sie die Nullstellen **<u>und</u>** den Schnittpunkt mit der y-Achse.

Lösung:

$$Nullstellen: \quad g(x)=x\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{3}{2}x+3\right)=0$$

$$x_1=0 \quad \wedge \quad x_{2/3}=\frac{\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}}{\frac{1}{3}} \Rightarrow x_2=6 \wedge x_3=3$$

$$y-Achsenschnittpunkt: \quad S_y(0\mid 0)$$

c) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von g(x).

$$g(-x)=\frac{1}{6}\cdot(-x)^3-\frac{3}{2}\cdot(-x)^2+3\cdot(-x)$$

Lösung:

$$g(-x)=-\frac{1}{6}\cdot x^3-\frac{3}{2}\cdot x^2-3\cdot x \quad \neq g(x) \quad und \quad \neq -g(x)$$

keine Symmetrie

d) Bestimmen Sie die x-Werte der Hoch- und Tiefpunkte.

Lösung:

$$g(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x \quad \Rightarrow \quad g'(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3 \quad \textit{und} \quad g''(x)=x-3$$

$$g'(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{9-6}}{1} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2}=3\pm\sqrt{3}$$

$$g''\left(3+\sqrt{3}\right)=3+\sqrt{3}-3=\sqrt{3}>0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Min in } x_1=3+\sqrt{3}$$

$$g''\left(3-\sqrt{3}\right)=3-\sqrt{3}-3=-\sqrt{3}<0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Max in } x_2=3-\sqrt{3}$$

e) Ermitteln Sie den Wendepunkt.

Lösung:

$$g(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x \quad \Rightarrow \quad g'(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3 \quad \textit{und} \quad g''(x)=x-3$$

$$g''(x)=x-3\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

$$g'''(x)=1 \quad \Rightarrow \quad g'''(3)=1\neq 0 \quad \Rightarrow \quad W(3\mid 0)$$

f) Bestimmen Sie die Tangentengleichung im Punkt P(3 / ?).

Lösung:

$$g(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x \quad \Rightarrow \quad g'(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3$$

$$g(3)=0 \quad g'(3)=-\frac{3}{2}$$

$$0=-\frac{3}{2}\cdot 3+b \quad \Rightarrow \quad b=\frac{9}{2}$$

$$t(x)=\left(-\frac{3}{2}\right)x+\frac{9}{2}$$

g) An welcher Stelle fällt der Graph von g(x) am stärksten?

Lösung: Im Wendepunkt (Minimum der ersten Ableitung)

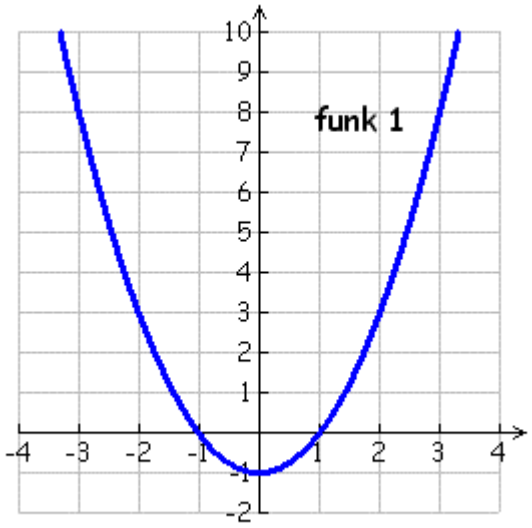
❺ Zuordnung: Ordnen Sie den Funktionen die jeweilige Ableitung zu.

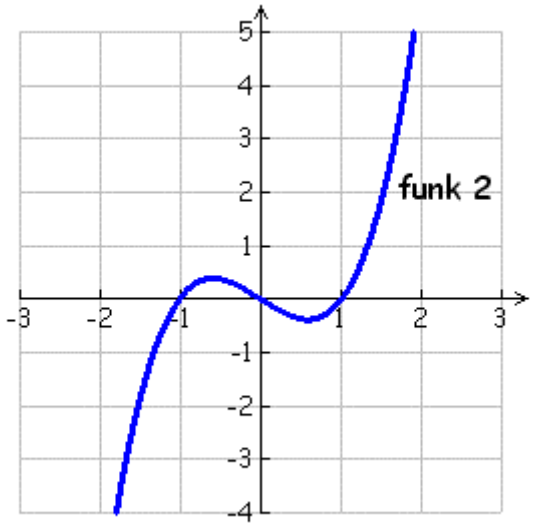
Lösung:

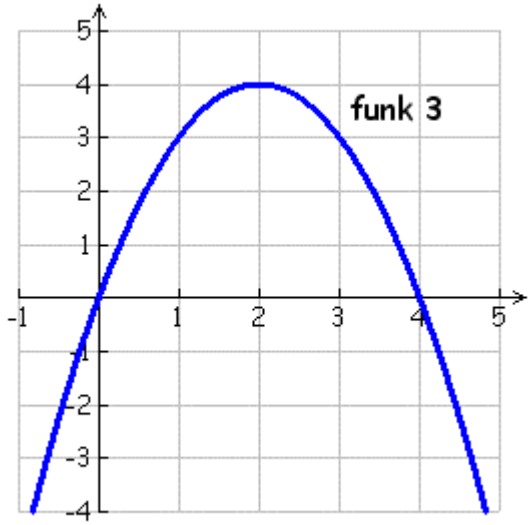
Zuordnung: **funk 1 = D** **funk 2 = A** **funk 3 = F**

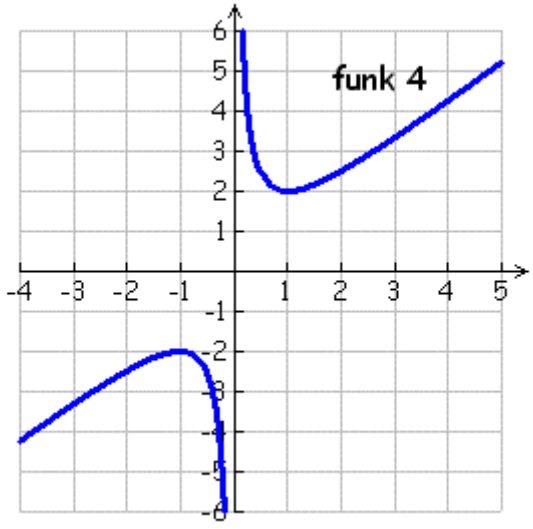
funk 4 = B **funk 5 = C** **funk 6 = E**

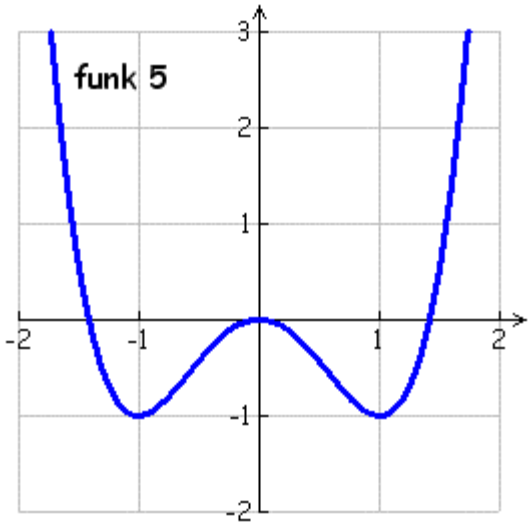
Funktionen:

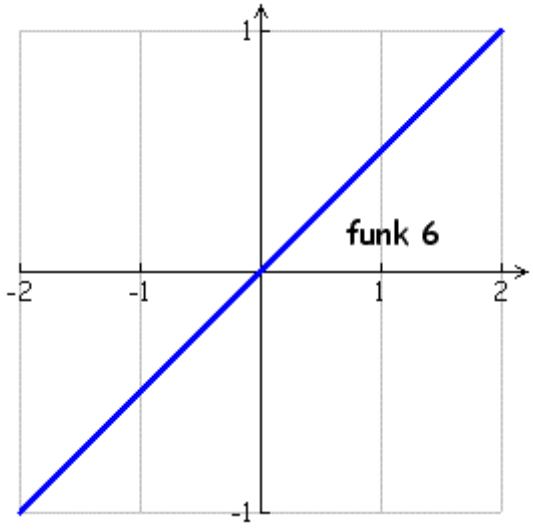
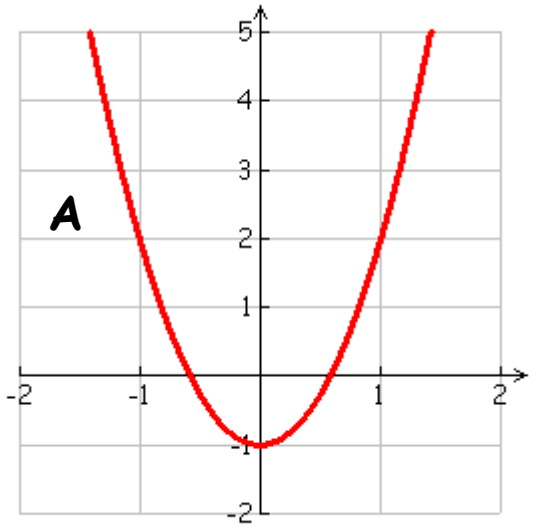
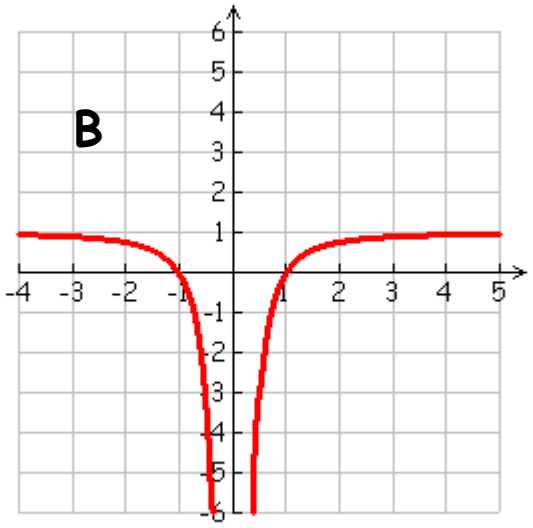
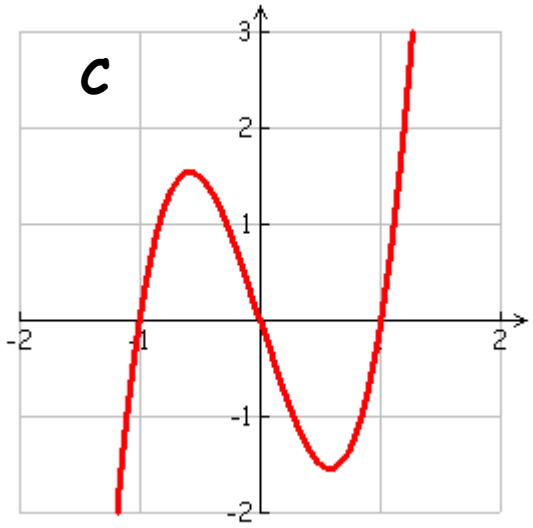
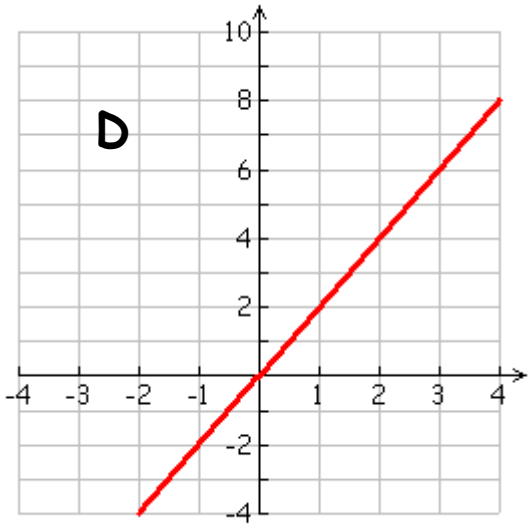
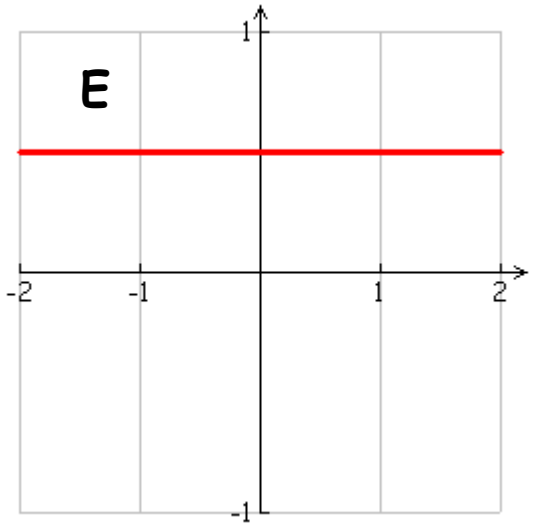
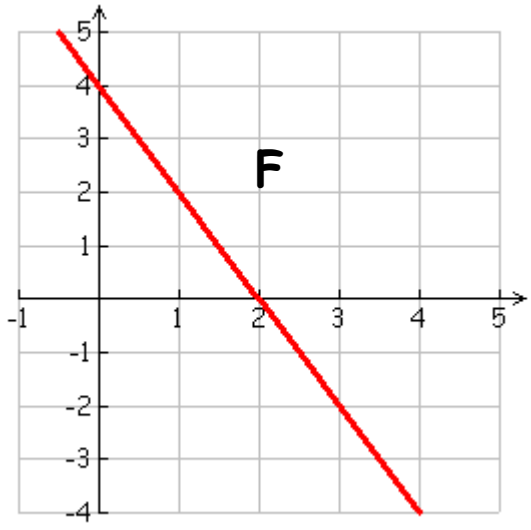












Ableitungen: