

- ❶ Erklären Sie die Begriffe „Stetigkeit“ und Differentialquotient.

Antwort:

Stetigkeit: Eine Funktion $f(x)$ heißt stetig an der Stelle x_0 , wenn gilt:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0+h \\ h \rightarrow 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0-h \\ h \rightarrow 0}} f(x) = f(x_0)$$

Differentialquotient:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h}$$

- ❷ Stetigkeitsanalyse: Bestimmen Sie s und t so, dass die Funktion stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} s \cdot x + 2 & \text{für } x < 1 \\ -2 & \text{für } x = 1 \\ t \cdot x^2 - x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

Antwort:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1+h \\ h \rightarrow 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1+h \\ h \rightarrow 0}} (tx^2 - x) = \lim_{h \rightarrow 0} [t(1+h)^2 - (1+h)] = t - 1$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1-h \\ h \rightarrow 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1-h \\ h \rightarrow 0}} (sx + 2) = \lim_{h \rightarrow 0} [s(1-h) + 2] = s + 2$$

wegen $f(1) = -2$ muss nun gelten:

$$t - 1 = -2 \Rightarrow t = -1 \quad \text{und} \quad s + 2 = -2 \Rightarrow s = -4$$

- ③ Stetigkeitsanalyse: Zeigen Sie, dass die Funktion stetig ist.

$$f(x) = |x + 3|$$

Antwort:

$$f(x) = |x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{für } x \geq -3 \\ -x - 3 & \text{für } x < -3 \end{cases}$$

$$f(-3) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -3-h \\ h \rightarrow 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -3-h \\ h \rightarrow 0}} (-x - 3) = \lim_{h \rightarrow 0} [-(-3-h) - 3] = 0$$

- ④ Differentialquotient:
Bilden Sie die Ableitung der Funktion mittels der h-Methode.

$$f(x) = x^2$$

Antwort:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x_0 + h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0 \end{aligned}$$

- ⑤ Ableitungen: Bilden Sie die erste Ableitung folgender Funktionen.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f(x) = ax^3 + 2x \\ \text{b)} & f(x) = \frac{1}{2}x - 3 \\ \text{c)} & f(x) = \frac{3}{4}bx^8 + \frac{2}{3}ax^6 \\ \text{d)} & f(x) = x^n \end{array}$$

Antwort:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & f'(x) = 3ax^2 + 2 \\ \text{b)} & f'(x) = \frac{1}{2} \\ \text{c)} & f'(x) = 6bx^7 + 4ax^5 \\ \text{d)} & f'(x) = nx^{n-1} \end{array}$$

⑥ Ableitungen:

Bestimmen Sie die Steigung und die Tangentengleichung der Funktion $f(x)$ in $x_0 = 2$.

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$$

Antwort:

(i) Steigung in $x_0 = 2$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x \Rightarrow f'(2) = -1$$

(ii) Tangentengleichung in $x_0 = 2$

$$m = f'(2) = -1;$$

$$\text{Funktionswert: } f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 4 + 2 = 1$$

$$1 = (-1) \cdot 2 + b \Rightarrow b = 3$$

$$t(x) = -x + 3$$