Musterlösung **11. Jgst.** **6. Kursarbeit** **Datum: 14.06.2005**

Klasse: GY 04 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Exponential- und Logarithmusfunktionen

---

❶ **Der Punkt P liegt auf der Exponentialkurve** $f(x)=a^x$.
Berechnen Sie die Basis a.

$a)\quad P(-1\mid 5) \qquad b)\quad P\left(2 \,\middle|\, \frac{1}{16}\right)$

Lösung: $a)\quad f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x \qquad b)\quad f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

❷ **Die Punkte P und Q liegen auf der Exponentialkurve** $f(x)=c\cdot a^x$.
Berechnen Sie den Faktor c und die Basis a.

$a)\quad P\left(-5 \,\middle|\, \frac{1}{8}\right) \quad Q(2\mid 16) \qquad b)\quad P\left(1 \,\middle|\, \frac{5}{3}\right) \quad Q\left(-1 \,\middle|\, \frac{1}{15}\right)$

Lösung:

Teil a)

$I.)\quad \frac{1}{8}=c\cdot a^{-5} \Rightarrow c=\frac{1}{8}\cdot a^5 \qquad II.)\quad 16=c\cdot a^2 \quad\Rightarrow\quad I.)\,in\,II.)\quad 16=\frac{1}{8}\cdot a^5\cdot a^2$

$\Rightarrow \quad a=2 \quad\Rightarrow\quad c=4 \quad\Rightarrow\quad f(x)=4\cdot 2^x$

Teil b)

$I.)\quad \frac{5}{3}=c\cdot a \qquad II.)\quad \frac{1}{15}=c\cdot a^{-1} \Rightarrow c=\frac{1}{15}\cdot a \quad\Rightarrow\quad II.)\,in\,I.)\quad \frac{5}{3}=\frac{1}{15}\cdot a\cdot a$

$\Rightarrow \quad a=5 \quad\Rightarrow\quad c=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad f(x)=\frac{1}{3}\cdot 5^x$

❸ **Ein Computer verliert jährlich circa 20 % seines Wertes.**

a) Erstellen Sie die zugehörige Exponentialfunktion, die den jeweiligen Restbuchwert darstellt, wenn die Anschaffungskosten 10.000,00 € betrugen.

b) Wie hoch ist der Restbuchwert nach 3 Jahren?

c) Wie hoch ist die Abschreibung im 4. Jahr der Nutzung?

d) Nach wie viel Jahren und Monaten ist das Gerät nur noch 25 % des Anschaffungspreises wert?

Lösung:

Teil a) $f(x) = 10.000 \cdot 0,8^x$

Teil b) $f(3) = 10.000 \cdot 0,8^3 \Rightarrow f(3) = 5.120,00$

Teil c) $AfA_4 = 5.120 \cdot 0,2 \Rightarrow AfA_4 = 1.024,00$

Teil d) $2.500 = 10.000 \cdot 0,8^x \Rightarrow x = \dfrac{\ln(0,25)}{\ln(0,8)}$

$\Rightarrow x = 6,21 \Rightarrow x = 6[Jahre]\,2,5[Monate]$

❹ **Faustregel**

a) Begründen Sie folgende Faustregel zur Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$:

Ein x-Zuwachs um 10 bewirkt ungefähr eine Vertausendfachung des Funktionswertes.

b) In welchem praktischen Anwendungsgebiet spielt die Funktion $f(x) = 2^x$ eine wichtige Rolle (als Berechnungsgrundlage)?

Lösung:

Teil a) $2^{10} = 1.024 \qquad 2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10} \Rightarrow 2^{20} = 2^{10} \cdot 1.024$

Vertausendfachung des Funktionswertes

Teil b) Bei der Computertechnologie in der Byte-Darstellung

$$\text{Byte} \xrightarrow[\cdot 1.024]{\cdot 2^{10}} \text{Kilobyte} \xrightarrow[\cdot 1.024]{\cdot 2^{10}} \text{Megabyte} \xrightarrow[\cdot 1.024]{\cdot 2^{10}} \text{Gigabyte}$$

❺ Schreiben Sie den Funktionsterm f in der Form $f(x)=c\cdot a^x$

a) $f(x)=4^{0,5x+1}$

Lösung: $f(x)=4^{0,5x+1}=4^{0,5x}\cdot 4=2^x\cdot 4$

b) $f(x)=\dfrac{24}{4^{-0,5x+2}}$

Lösung: $f(x)=\dfrac{24}{4^{-0,5x+2}}=\dfrac{1}{4^{-0,5x}}\cdot\dfrac{24}{4^2}=2^x\cdot\dfrac{3}{2}$

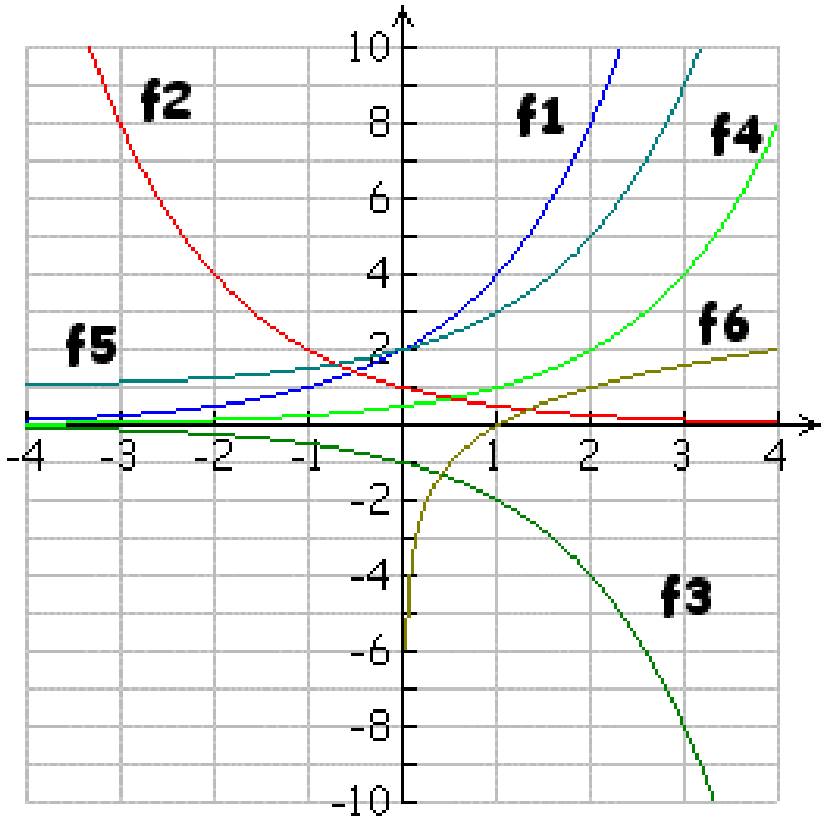
c) $f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 3^{-x+2}$

Lösung: $f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 3^{-x+2}=3^{-x}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 3^2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\cdot\dfrac{9}{2}$

❻ Graphen zeichnen

Färben und beschriften Sie die angegebenen Funktionen und Graphen im gegebenen Koordinatensystem mit 6 verschiedenen Farben:

$f1(x)=2^{x+1}$ $f2(x)=\dfrac{1}{2^x}$ $f3(x)=-2^x$ $f4(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 2^x$ $f5(x)=2^x+1$ $f6(x)=\log_2(x)$



❼ Bevölkerungsentwicklung im Sudan

Der Sudan hatte 1980 ca. 22 Mio. Einwohner. Der jährlich gemessene Bevölkerungszuwachs betrug etwa 3 %.

a) Wie lautet die zugehörige Exponentialfunktion?

Lösung: $f(x) = 22.000.000 \cdot 1,03^x$

b) Wie hoch sind die Einwohnerzahlen in folgenden Jahren?
(i) 1990 (ii) 2005 (iii) 2010 (iv) 1970 (v) 1900

Lösung:

$$f(10) = 29.566.160 \qquad f(-10) = 16.370.066$$
$$f(25) = 46.063.114 \qquad f(-80) = \ 2.067.496$$
$$f(30) = 53.399.774$$

c) In welchem Jahr wird sich der Bevölkerungsstand von 1980 verdoppelt haben?

Lösung: $2 = 1,03^x \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1,03)} \quad \Rightarrow \quad x = 23,45[Jahre]$

d) Wie heißt die Hauptstadt des Sudan?

Lösung: Karthoum

e) Auf welchem Kontinent liegt der Sudan?

Lösung: Afrika

f) Nennen Sie drei Nachbarstaaten des Sudan?

Lösung: Ägypten, Libyen, Tschad, Zentralafrika, Zaire, Uganda, Kenia, Äthiopien

g) Ermitteln Sie den Wachstumsfaktor zur Basis e.

Lösung:

$$1,03 = e^x \quad \Rightarrow \quad x = \ln(1,03) \quad \Rightarrow \quad x = 0,02956 \quad \Rightarrow \quad x \approx 0,03$$

h) Im Jahr 2000 wurden bei einer Erhebung 45 Mio. Einwohner gezählt.

Wie hoch ist die gesamte prozentuale Veränderung und wie hoch ist die durchschnittliche jährliche prozentuale Erhöhung ausgehend vom Jahr 1980?

Lösung:

$$prozentuale\ Gesamtänderung = \left(\frac{45}{22} - 1\right) \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad \Delta_{gesamt} = 104,54[\%]$$

$$durchschnittliche\ Änderung = \left(\sqrt[20]{\frac{45}{22}} - 1\right) \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad \Delta_{Durchschnitt} = 3,64[\%]$$

⑧ Abkühlung einer Tasse Kaffee

Die Abkühlung einer Tasse Kaffee verläuft nach folgender empirischer Exponentialfunktion: $f(t) = f_0 \cdot e^{-k \cdot t} \quad (\text{t in Minuten})$

Nach 2 Minuten beträgt die Temperatur 64°, nach 5 Minuten ist sie auf 48° gefallen.

Bestimmen Sie die Werte f_0 und k.

Lösung:

$I.) \quad 64 = f_0 \cdot e^{-2k} \Rightarrow f_0 = 64 \cdot e^{2k} \qquad II.) \quad 48 = f_0 \cdot e^{-5k}$

$\Rightarrow \quad I.)\ in\ II.) \quad 48 = 64 \cdot e^{2k} \cdot e^{-5k}$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{3} \quad \Rightarrow \quad k = 0,0959 \quad \Rightarrow \quad f_0 = 77,53$$

⑨ Lösen von Log- und Exp-Gleichungen

a) $4^{x+1} = 32$

Lösung:

$$4^{x+1} = 32 \quad \Rightarrow \quad 2^{2x+2} = 2^5 \quad \Rightarrow \quad 2x+2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

b) $\frac{1}{27} \cdot 3^{2x-1} = \sqrt{3^5}$

Lösung:

$$\frac{1}{27} \cdot 3^{2x-1} = \sqrt{3^5} \quad \Rightarrow \quad 3^{-3} \cdot 3^{2x-1} = 3^{2,5}$$

$$\Rightarrow \quad 3^{2x-4} = 3^{2,5} \quad \Rightarrow \quad 2x-4 = 2,5 \quad \Rightarrow \quad x = 3,25$$

c) $e^{2x-1} = 2$

Lösung: $e^{2x-1} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2x-1 = \ln(2) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\left[\ln(2)+1\right]$

d) $3e^{x-1} = 0$

Lösung: $3e^{x-1} = 0 \quad \Rightarrow$ nicht lösbar wegen $\ln(0)$

e) $e^{2x} + e^x = 2$

Lösung:

$$e^{2x} + e^x = 2 \quad \Rightarrow \quad e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \xrightarrow[e^x := u]{Substitution} \quad u^2 + u - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_1 = 1 \quad \wedge \quad u_2 = -2$$

$$\xrightarrow{\text{Re}substitution} \quad u_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad e^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{Re}substitution} \quad u_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad e^x = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 \; nicht \; def.$$

f) $e^{\ln(3)} = x$

Lösung: $e^{\ln(3)} = x \quad \Rightarrow \quad x = 3$

g) $e^{2\ln(5)} = x$

Lösung: $e^{2\ln(5)} = x \quad \Rightarrow \quad e^{\ln 5^2} = x \quad \Rightarrow \quad x = 25$

h) $e^{\frac{1}{2}\ln(k)} = x$

Lösung: $e^{\frac{1}{2}\ln(k)} = x \quad \Rightarrow \quad e^{\ln\sqrt{k}} = x \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{k}$

ZUSATZ für Andreas Jacob und die übrigen Schüler:

Ab welchem Wert $x \in \mathbb{Z}$ gelten folgende Ungleichungen?

a) $2^x \leq 0,0002$

Lösung:

$$2^x \leq 0,0002 \Rightarrow x \leq \frac{\ln(0,0002)}{\ln(2)} \Rightarrow x \leq -12,29 \Rightarrow x \leq -13$$

b) $e^{x+1} \geq 25.000$

Lösung:

$$e^{x+1} \geq 25.000 \Rightarrow x+1 \geq \ln(25.000)$$
$$\Rightarrow x \geq \ln(25.000)-1 \Rightarrow x \geq 9,13 \Rightarrow x \geq 10$$