Musterlösung: **11. Jgst.** **4. Kursarbeit** **Datum: 15.03.2005**

Klasse: GY 04 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Themen: **Kurvendiskussion; Stetigkeit; Differenzierbarkeit**

---

❶ Untersuchung ganzrationaler Funktionen

Gegeben sei folgende Funktionsvorschrift: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3$

Untersuchen Sie die Funktion hinsichtlich folgender Kriterien:

a) Definitionsmenge **Lösung:** $D = \Re$

b) Symmetrie

Lösung: keine Symmetrie wegen gerader und ungerader Exponenten

c) Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

Lösung: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$

d) Nullstelle(n)

Lösung:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad (dreifach) \quad \wedge \quad x_2 = 2$$

e) Extremwerte

Lösung:

$$f'(x) = 2x^3 - 3x^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(2x - 3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad (doppelt) \quad \wedge \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad Steigungsverhalten?$$

$$f'(-1) = -5 \quad und \quad f'(1) = -1$$

da keine Änderung des Steigungsverhaltens vorliegt => Wendepunkt

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(\frac{3}{2} \,\middle|\, -\frac{27}{32}\right)$$

f) Wendepunkte

Lösung:

$$f''(x) = 6x^2 - 6x \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 6x(x-1) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 1$$

$$f'''(x) = 12x - 6$$

$$f'''(0) = -6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_1(0 \mid 0)$$

$$f'''(1) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W_2\left(1 \,\middle|\, -\frac{1}{2}\right)$$

g) Monotonieintervalle

Lösung:

$$I_1 = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[\quad \Rightarrow \quad \textit{momoton fallend}$$

$$I_2 = \left]\frac{3}{2}; \infty\right[\quad \Rightarrow \quad \textit{momoton steigend}$$

h) Schnittpunkt der Funktion mit der y-Achse

Lösung: $S_y(0 \mid 0)$

i) Schnittpunkte der Funktion mit $g(x) = 4x^2$

Lösung:

$$\frac{1}{2}x^4 - x^3 = 4x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2\left(\frac{1}{2}x^2 - x - 4\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad (\textit{doppelt}) \quad \wedge \quad x_{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{1}$$

$$x_{2/3} = 1 \pm 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4 \quad \wedge \quad x_3 = -2$$

$$S_1(0 \mid 0) \quad \wedge \quad S_2(4 \mid 64) \quad \wedge \quad S_3(-2 \mid 16)$$

j) Tangentengleichungen in $x_0 = 0$ und in $x_1 = 1$.

Lösung:

$t_1(x)\ in\ x_0 = 0$: $t(x) = 0$ $(x - Achse; Abszisse)$

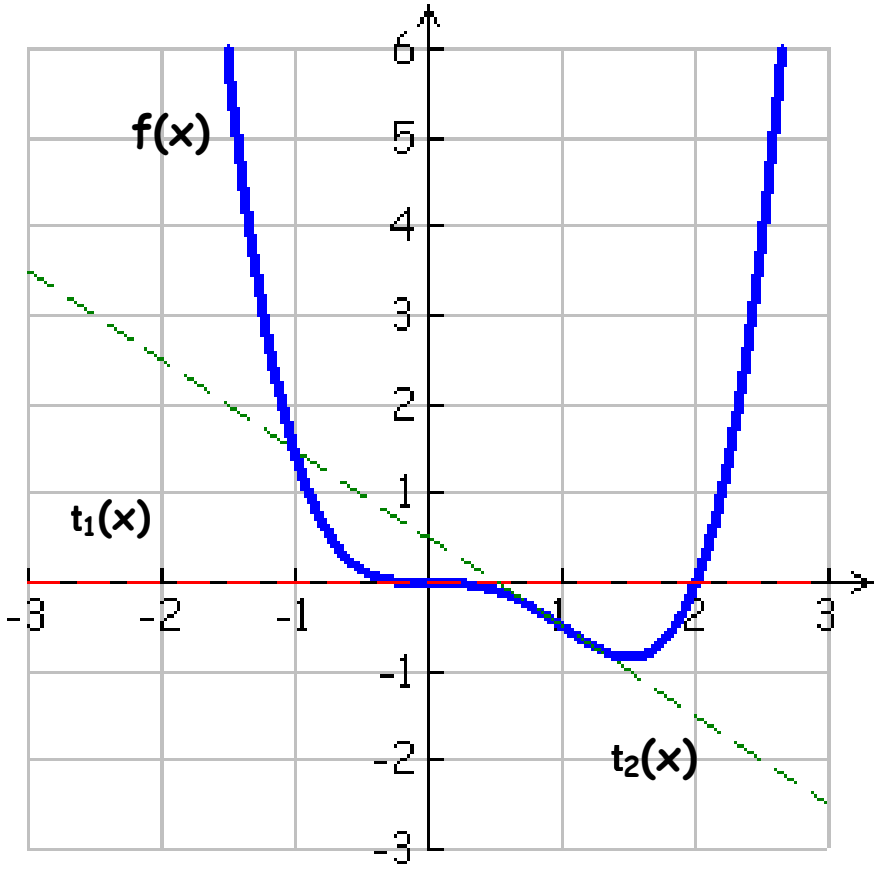
$t_2(x)\ in\ x_0 = 1$: $t(x) = -x + \frac{1}{2}$

Erklärung zu $t_2(x)$:

$$f'(1) = (-1) = m \quad und \quad -\frac{1}{2} = (-1)\cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

k) Zeichnung der Funktion f(x) und der beiden Tangenten

Lösung:



❷ **Untersuchung gebr.-rat. Funktionen**

Gegeben sei folgende Funktionsvorschrift: $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x}$

Untersuchen Sie die Funktion hinsichtlich folgender Kriterien:

a) Definitionsmenge

Lösung: $D = \Re \setminus \{0\}$

b) Symmetrie

Lösung:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - (-x) + 4}{(-x)} = -\frac{x^2 + x + 4}{x}$$

$$\neq f(x) \quad und \quad \neq -f(x) \Rightarrow keine\ Symmetrie$$

c) Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x-1+\frac{4}{x}\right) = \infty$$

Lösung:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x-1+\frac{4}{x}\right) = -\infty$$

d) Nullstelle(n)

Lösung:

$$x^2 - x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-16}}{2}$$

keine Nullstelle

e) Polstelle(n) und Asymptote

Lösung:

$$Polstelle: \quad x = 0 \quad mit\ VZW$$

$$Asymptote: \quad a(x) = x-1$$

f) Zeigen Sie dass der Ausdruck $g(x) = x-1+\frac{4}{x}$ die gleiche Funktionsvorschrift darstellt wie $f(x)$

Lösung: Aufteilen des Bruches in Einzelbrüche und Kürzen der Variablen

f) Ermitteln Sie die Extremwerte der Funktion f(x).

Lösung:

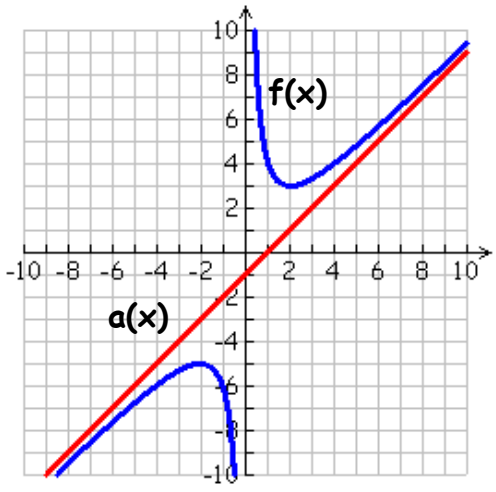
$$f'(x) = 1-\frac{4}{x^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = 2$$

$$f''(x) = \frac{8}{x^3}$$

$$f''(2) = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad Min(2 \mid 3)$$

$$f''(-2) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(-2 \mid -5)$$

Zeichnung:



❸ **Bestimmen Sie die erste Ableitung**

a) $f_k(x) = (-kx^2 + x)(x + k) = -kx^3 - k^2x^2 + x^2 + kx$

$Ableitung: \quad f_k'(x) = -3kx^2 - 2k^2x + 2x + k$

b) $f_k(x) = x^{2k} \qquad Ableitung: \quad f_k'(x) = 2kx^{2k-1}$

c) $f_k(x) = \frac{1}{4k+2}x^{2k+1} + \frac{2}{x} \quad Ableitung: \; f_k'(x) = \frac{1}{2}x^{2k} - \frac{2}{x^2}$

d) $f_k(x) = \left(\frac{k}{2}x - 3\right)^2 \quad Ableitung: \; f_k'(x) = k\left(\frac{k}{2}x - 3\right)$

❹ **Steigung einer Funktion**

Gegeben sei die Funktion dritten Grades $f(x) = x^3$.

a) In welchen Kurvenpunkten beträgt die Steigung der Funktion den Wert $\frac{4}{3}$?

$$f'(x) = 3x^2 = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad |x| = \frac{2}{3}$$

Lösung: $P_1\left(\frac{2}{3} \mid \frac{8}{27}\right) \quad \wedge \quad P_2\left(-\frac{2}{3} \mid -\frac{8}{27}\right)$

b) Welche Steigung hat die Funktion in $x_0 = -2$?

Lösung: $f'(-2) = 12 = m$

❺ **Stetigkeitsanalyse:**

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit.

a) $$f(x)=\begin{cases} -2x & \text{für } x\le 1 \\ x^2-x & \text{für } x>1 \end{cases}$$

Lösung:

$$f(1)=(-2)\cdot 1=-2$$

$$\lim_{\substack{x\to 1+h\\ h\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1+h\\ h\to 0}}\left(x^2-x\right)=\lim_{h\to 0}\left[(1+h)^2-(1+h)\right]$$

$$\lim_{\substack{x\to 1+h\\ h\to 0}} f(x)=0$$

$\Rightarrow$ Grenzwert $\neq$ Funktionswert

$\Rightarrow$ keine Stetigkeit

b) $$g(x)=\begin{cases} 1+x^2 & \text{für } x\le -1 \\ 1-x & \text{für } x>-1 \end{cases}$$

Lösung:

$$g(-1)=1+(-1)^2=2$$

$$\lim_{\substack{x\to -1+h\\ h\to 0}} g(x)=\lim_{\substack{x\to -1+h\\ h\to 0}}(1-x)=\lim_{h\to 0}\left[1-(-1+h)\right]$$

$$\lim_{\substack{x\to -1+h\\ h\to 0}} g(x)=2$$

$\Rightarrow$ Grenzwert = Funktionswert

$\Rightarrow$ Stetigkeit

❻ **Differentialquotient:**

Bilden Sie die Ableitung der Funktion mittels der h-Methode.

$$f\left(x\right)=x^2-x-2$$

Lösung:

$$f\left(x_0\right)=x_0{}^2-x_0-2 \quad und \quad f\left(x_0+h\right)=\left(x_0+h\right)^2-\left(x_0+h\right)-2$$

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\left(x_0+h\right)^2-\left(x_0+h\right)-2\right]-\left(x_0{}^2-x_0-2\right)}{h}$$

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{x_0{}^2+2x_0h+h^2-x_0-h-2-x_0{}^2+x_0+2}{h}$$

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{2x_0h+h^2-h}{h}$$

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(2x_0+h-1\right)}{h}$$

$$f'\left(x_0\right)=2x_0-1$$

❼ **Zuordnung: Ordnen Sie den Funktionen die jeweilige Ableitung zu.**

F1 => A3	**F2 => A5**	**F3 => A1**	**F4 => A7**
F5 => A2	**F6 => A6**	**F7 => A4**	**F8 => A8**