Musterlösung: **11. Jgst. 3. Kursarbeit** **Datum: 11.01.2005**

Klasse: GY 04 a **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Thema: Gebrochen-rationale Funktionen; Grenzwerte

---

❶ Untersuchung gebr.-rat. Funktionen

Gegeben sei folgende Funktionsvorschrift: $f(x) = \frac{4x+5,5}{-2x+6}$

Untersuchen Sie die Funktion hinsichtlich folgender Kriterien:

a) Definitionsmenge

Lösung: $D = \Re \setminus \{3\}$

b) Symmetrie

Lösung:

$$f(-x) = \frac{4(-x)+5,5}{-2(-x)+6} = \frac{-4x+5,5}{2x+6} \neq f(x) \; und \neq -f(x)$$

=> **keine Symmetrie**

c) Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

Lösung:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x+5,5}{-2x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{5,5}{x}}{-2+\frac{6}{x}} \to -2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+5,5}{-2x+6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4+\frac{5,5}{x}}{-2+\frac{6}{x}} \to -2$$

d) Nullstelle(n)

Lösung:

$$4x+5,5 = 0 \Rightarrow x = -1,375 \Rightarrow N(-1,375 \mid 0)$$

e) Polstelle(n)

Lösung:

$$-2x+6 = 0 \Rightarrow x = 3 \; (Polstelle\ ohne\ VZW)$$

f) Asymptote

Lösung: aus der Grenzwertermittlung folgt: a(x) = -2

g) Schnittpunkt der Funktion mit der y-Achse

Lösung: $f(0) = \frac{5,5}{6} \approx 0,9167 \Rightarrow S(0 \mid 0,9167)$

h) Schnittpunkte der Funktion mit $g(x) = -x$

Lösung:

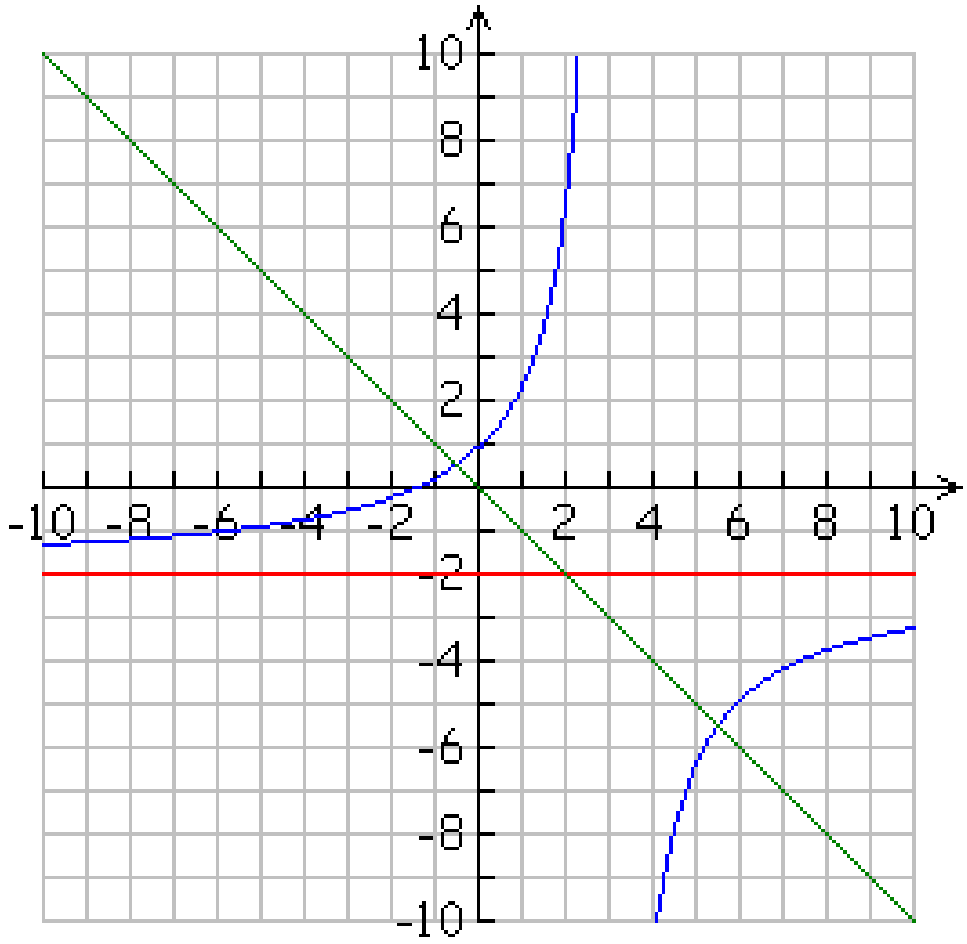
$$-x = \frac{4x+5,5}{-2x+6} \Rightarrow 2x^2 - 6x = 4x + 5,5$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 10x - 5,5 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 5,5 \wedge x_2 = -0,5$$

$$\Rightarrow S_1(5,5 \mid -5,5) \wedge S_2(-0,5 \mid 0,5)$$

i) Zeichnung der Funktion f(x), g(x) und der Asymptote



❷ Untersuchung gebr.-rat. Funktionen

Gegeben sei folgende Funktionsvorschrift: $f(x) = \frac{-x^4 - x^2 + 2}{x^3 + x}$

Untersuchen Sie die Funktion hinsichtlich folgender Kriterien:

a) Definitionsmenge

Lösung: $D = \Re \setminus \{0\}$

b) Symmetrie

Lösung:

$$f(-x) = \frac{-(-x)^4 - (-x)^2 + 2}{(-x)^3 + (-x)} = \frac{-x^4 - x^2 + 2}{-x^3 - x} = -f(x)$$

=> **Punktsymmetrie**

c) Grenzwerte für $x \to \pm\infty$

Lösung:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(-x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} \to -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(-x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} \to \infty$$

d) Nullstelle(n)

$$-x^4 - x^2 + 2 = 0 \Rightarrow -u^2 - u + 2 = 0$$

$$\Rightarrow u_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2}$$

Lösung:

$$\Rightarrow u_{1/2} = \frac{1 \pm 3}{-2} \Rightarrow u_1 = -2 \wedge u_1 = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \wedge x_2 = -1$$

e) Polstelle(n)

Lösung: $aus\ D = \Re \setminus \{0\}\ \text{folgt}: x = 0\ (Polstelle\ ohne\ VZW)$

❸ **Grenzwertbestimmung**

Bestimmen Sie die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ der Funktionen.

a) $f(x) = \dfrac{5}{x^2+1}$

Lösung: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5}{x^2+1} \to 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x^2+1} \to 0$

b) $f(x) = 2-\dfrac{3x}{x^2+1}$

Lösung:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3x}{x^2+1}\right) \to 2 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{3x}{x^2+1}\right) \to 2$

c) $f(x) = 2-\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$

Lösung:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \to -1 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \to 5$

d) $f(x) = a+\dfrac{b}{x}$

Lösung: $\lim\limits_{x\to\infty} a+\dfrac{b}{x} \to a \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} a+\dfrac{b}{x} \to a$

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{2^x}$

Lösung: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2^x} \to 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{2^x} \to \infty$

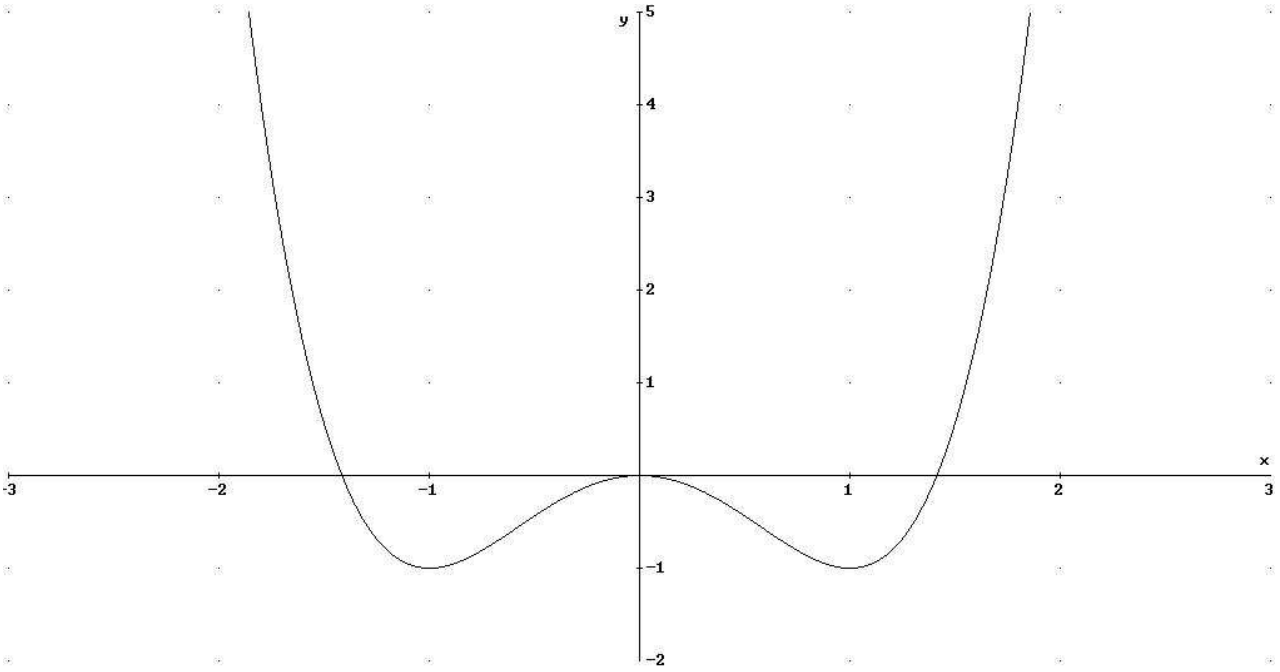
f) $f(x) = x+\dfrac{b}{x^2}$

Lösung: $\lim\limits_{x\to\infty} x+\dfrac{b}{x^2} \to \infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} x+\dfrac{b}{x^2} \to -\infty$

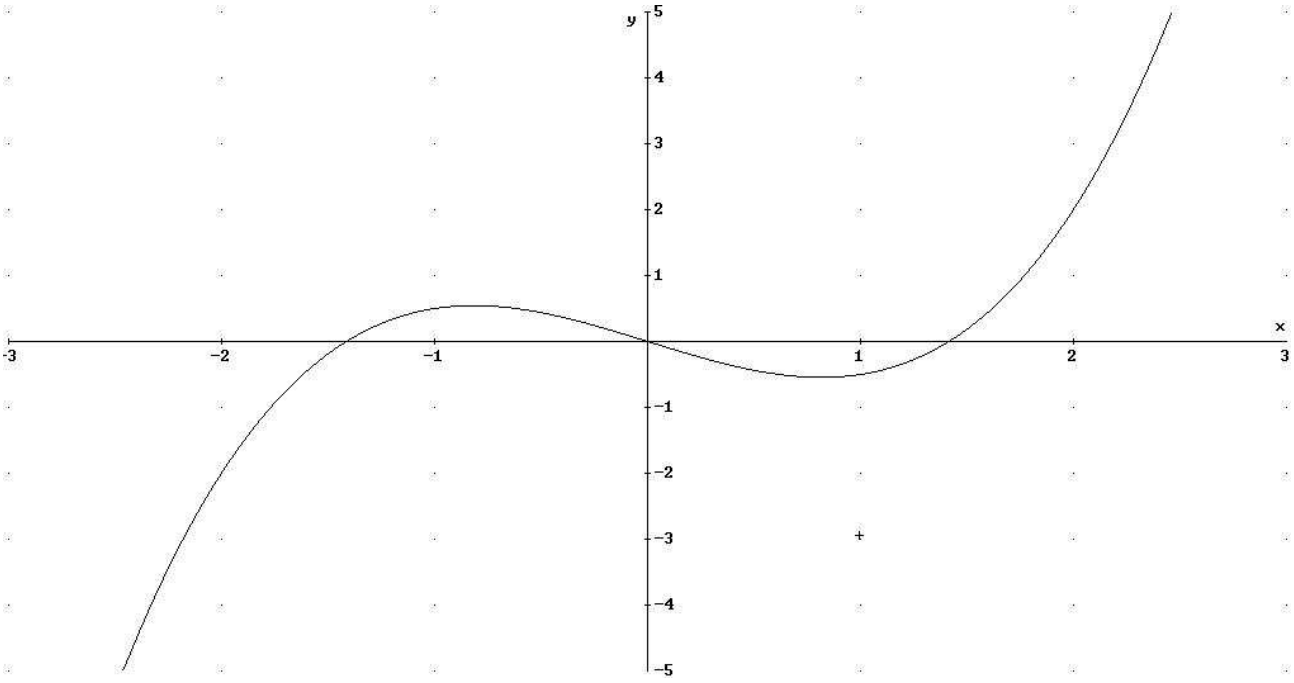
❹ Symmetrie

Vervollständigen Sie die gegebenen Graphen

a) f sei achsensymmetrisch



b) f sei punktsymmetrisch



❺ Abstandsberechnung Funktion zu Asymptote

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x}{x+1}$ und der Asymptote a(x) = 1.

Ab welchen Werten für $x \to \pm\infty$ ist der Abstand zur Asymptoten kleiner

als 0,001?

Lösung:

$$\left|f(x)-a(x)\right| \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x}{x+1}-1\right| \leq \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{-1}{x+1}\right| \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{|-1|}{|x+1|} \leq \frac{1}{1000}$$

$$Fall\,1: \quad x+1>0 \Rightarrow x>-1$$

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow 1000 \leq x+1 \Rightarrow \boxed{999 \leq x}$$

$$Fall\,2: \quad x+1<0 \Rightarrow x<-1$$

$$-\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow -1000 \geq x+1 \Rightarrow \boxed{-1001 \geq x}$$

❻ Lösen Sie folgende Gleichungen

a) $2x^4+6x^2-3=5$

Lösung:

$$2x^4+6x^2-3=5 \Rightarrow 2x^4+6x^2-8=0$$
$$\Rightarrow 2u^2+6u-8=0$$
$$\Rightarrow u_1=1 \wedge u_2=-4$$
$$\Rightarrow x_1=1 \wedge x_2=-1$$

b) $x+2\sqrt{x}-1=7$

Lösung:

$$x+2\sqrt{x}-1=7 \Rightarrow x+2\sqrt{x}-8=0$$
$$\Rightarrow u^2+2u-8=0$$
$$\Rightarrow u_1=2 \wedge u_2=-4$$
$$\Rightarrow x_1=4$$