Musterlösung: **11. Jgst. Klasse: GY 04 a** **Datum: 05.10.2004**

Fach: Mathematik (Kernfach) **1. Kursarbeit**

Thema: Mengen; Intervall; (Lineare) Funktionen

---

❶ Intervallbeschreibungen

Stellen Sie folgende Mengen in der Intervallschreibweise dar :

A = {x ∈ ℜ | x < 8} $\quad A =]-\infty;\ 8[$

B = {x ∈ ℜ | -1 ≤ x ≤ 8} $\quad B = [-1;\ 8]$

C = {x ∈ ℜ | -1 ≤ x < 8} $\quad C = [-1;\ 8[$

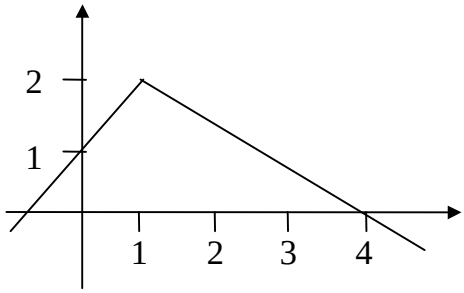
D = {x ∈ ℜ | $x^3 = 8$} $\quad D = \{2\}$

E = {x ∈ ℜ | $x^2 \le 9$} $\quad E = [-3;\ 3]$

❷ Lineare Funktionen

a) Bilden Sie die Funktionsvorschriften (abschnittsweise definieren) der hier dargestellten Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \in]-\infty;1] \\ -\frac{2}{3}x+\frac{8}{3} & \text{für } x \in [1;\infty[\end{cases}$$



b) Ermitteln Sie die Geradengleichungen:

(i) P (1 / 4); m = 0,5 ***Lösung:*** $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

(ii) P (1 / -7); α = 45° ***Lösung:*** $f(x) = x - 8$

(iii) P (2 / 3); $m_{Normale}$ = - ½ ***Lösung:*** $f(x) = 2x - 1$

d) Gegeben sind die Punkte A (1 / 2) und B (4 / 1).

(i) Bestimmen Sie die lineare Funktionsvorschrift die beide Punkte enthält.

Lösung: $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

(ii) Prüfen Sie, ob die Punkte C (-1 / $2\frac{2}{3}$) und D (5 / -2) auf der Geraden f(x) = $-\frac{1}{3}$ x + $\frac{7}{3}$ liegen.

Lösung:

$$\text{Punkt } C: \quad f(-1) = \frac{1}{3} + \frac{7}{3} = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad C \in f(x)$$

$$\text{Punkt } D: \quad f(5) = -\frac{5}{3} + \frac{7}{3} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad D \notin f(x)$$

(iii) Ergänzen Sie die fehlenden Koordinaten der Punkte E (-4 / ?) und F (? / $\frac{1}{3}$) , damit gilt: E ∈ f(x) und F ∈ f(x).

Lösung:

$$\text{Punkt } E: \quad f(-4) = \frac{4}{3} + \frac{7}{3} = \frac{11}{3} \quad \Rightarrow \quad E\left(-4 / \frac{11}{3}\right)$$

$$\text{Punkt } F: \quad \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad \Rightarrow \quad F\left(6 / \frac{1}{3}\right)$$

(iv) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die senkrecht auf f(x) steht und durch den Punkt A verläuft?

Lösung: $f_{senkrecht}(x) = 3x - 1$

(v) Nennen Sie die Funktionsvorschrift einer zu f(x) parallelen Geraden.

Lösung: $f_{parallel}(x) = -\frac{1}{3}x + a \quad mit\ a \in \Re \setminus \left\{\frac{7}{3}\right\}$

(vi) Wie groß ist der Abstand zwischen den Punkten A und B?

Lösung: $e = \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} \quad = \quad \sqrt{10}$

(vii) Ermitteln Sie die Koordinate des Mittelpunktes der Strecke $\overline{AB}$.

Lösung:

$$x_{m(\overline{AB})} \quad = \quad \frac{1}{2} \cdot [1+4] \quad = \quad \frac{5}{2}$$

$$y_{m(\overline{AB})} \quad = \quad \frac{1}{2} \cdot [2+1] \quad = \quad \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad M\left(\frac{5}{2} / \frac{3}{2}\right)$$

e) Die Temperatur im Erdinnern wächst zum Erdmittelpunkt hin auf je 100 m um rund 3°C an. In 25 m Tiefe beträgt sie 10°C.

(i) Welche Temperatur herrscht demnach in 875 m Tiefe?

$$t(x) = 0,03x + 9,25$$

Lösung:

$$t(875) = 0,03 \cdot 875 + 9,25 = 35,5$$

(ii) In welcher Tiefe schmilzt Zinn (Schmelztemperatur: 232°C)?

$$t(x) = 0,03x + 9,25$$

Lösung:

$$232 = 0,03x + 9,25 \quad \Rightarrow \quad x = 7.425\,[m]$$

f) Die Kosten für einen Leihwagen betragen incl. Benzinkosten 1,25 € je km. Ein entsprechendes eigenes Fahrzeug würde jährlich 9.900,00 € feste Kosten (Abschreibungen, Wartung etc.) verursachen. Je 100 km hätte das eigene Fahrzeug einen Verbrauch von 6 Litern; 1 Liter Benzin kostet 1,20 €.

(i) Ermitteln Sie die Funktionsvorschriften der beiden Kostenfunktionen.

$$k_{\text{Leasing}}(x) = \frac{5}{4}x$$

Lösung:

$$k_{\text{Eigentum}}(x) = 0,072x + 9.900$$

(ii) Bei welcher km-Anzahl sind die Kosten für beide Fahrzeuge gleich?

Lösung:

$$k_{\text{Leasing}}(x) = k_{\text{Eigentum}}(x)$$

$$\frac{5}{4}x = 0,072x + 9.900 \quad \Rightarrow \quad x \approx 8.404,07\,[km]$$

(iii) Wie hoch sind die Kosten beider Fahrzeuge bei einer Jahresnutzung von 9.000 km?

Lösung:

$$k_{\text{Leasing}}(9.000) = \frac{5}{4} \cdot 9.000 = 11.250,00\,[€]$$

$$k_{\text{Eigentum}}(9.000) = 0,072 \cdot 9.000 + 9.900 = 10.548,00\,[€]$$

g) Parameter bei Betragsfunktionen

$$f(x) = a \cdot |x-b| + c$$

Geben Sie für folgende Parameterwerte die Funktionsvorschrift an und zeichnen Sie die Funktion:

(i) b = c = 0; a = 1 (ii) a = b = 1; c = 0

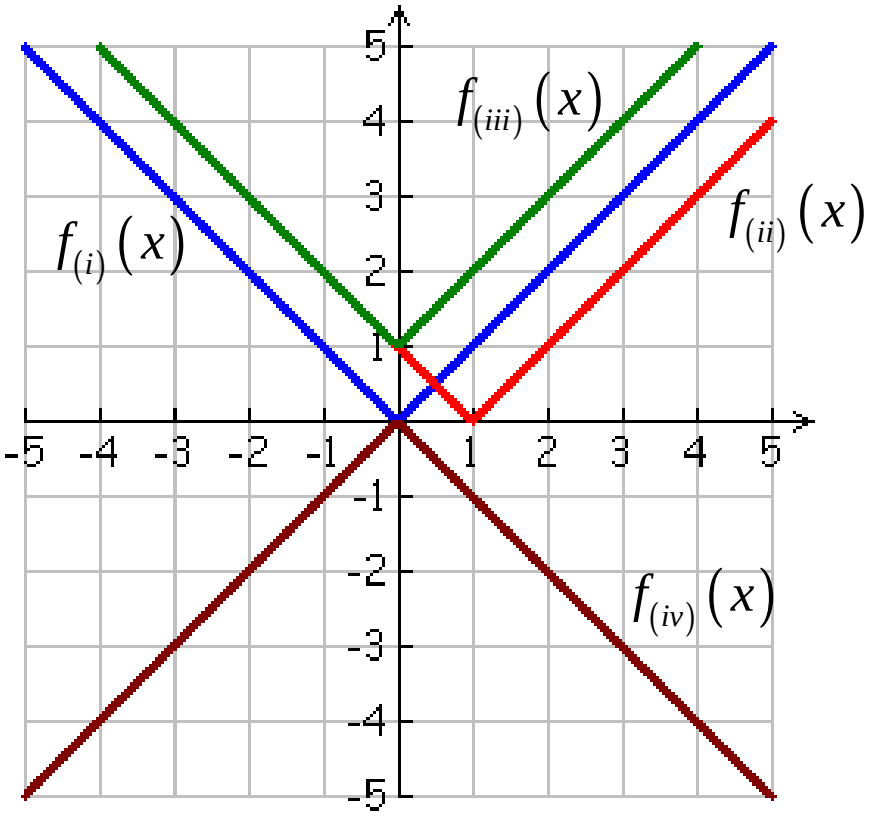
(iii) a = c = 1; b = 0 (iv) b = c = 0; a = (-1)

Lösung:

$$f(x) = a \cdot |x-b| + c$$

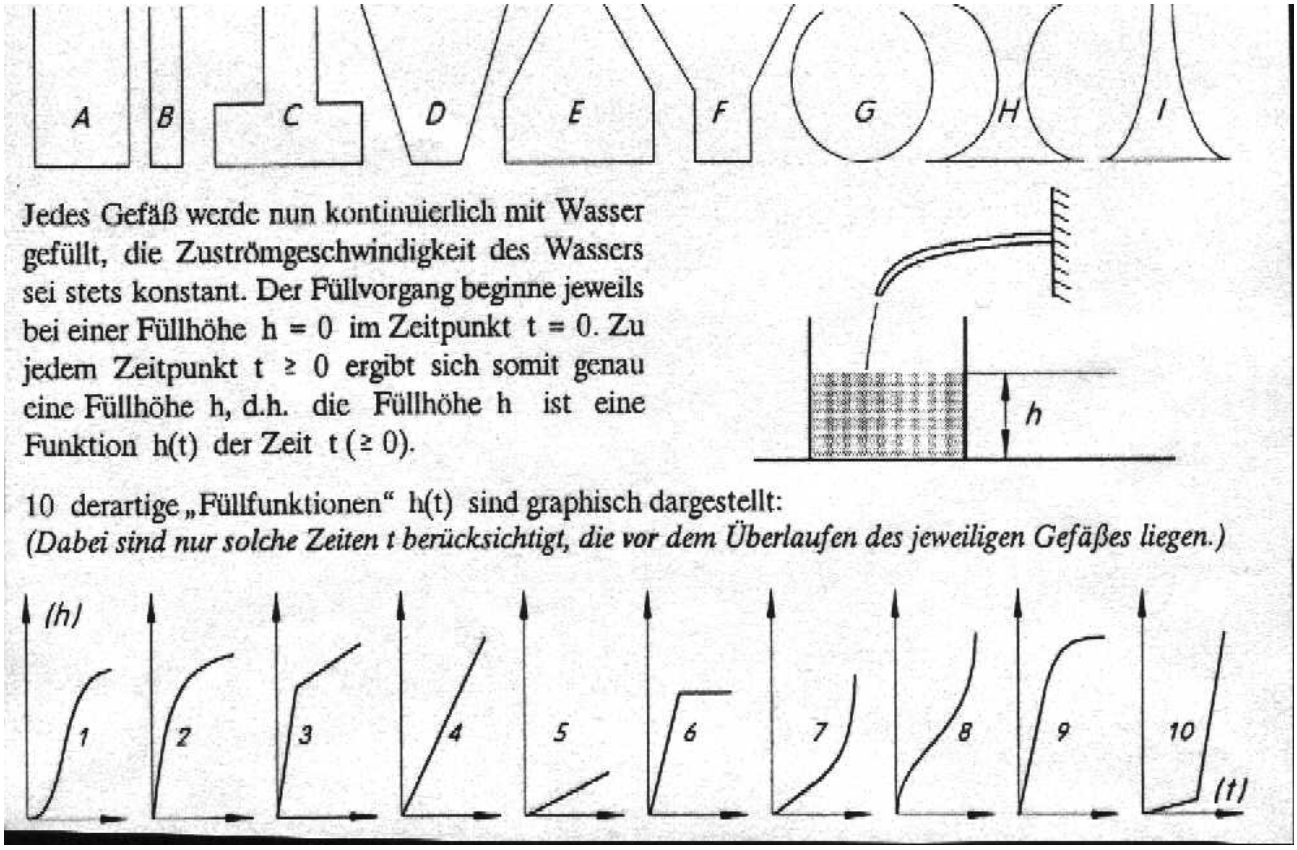
$$f_{(i)}(x) = |x| \qquad f_{(ii)}(x) = |x-1|$$

$$f_{(iii)}(x) = |x|+1 \qquad f_{(iv)}(x) = -|x|$$



❸ **Gefäße und Füllfunktionen ...**

Gegeben sind die zunächst leeren Gefäße A bis I.

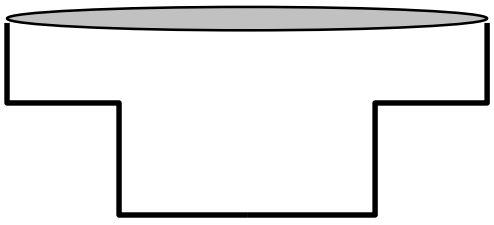


Jedes Gefäß werde nun kontinuierlich mit Wasser gefüllt, die Zuströmgeschwindigkeit des Wassers sei stets konstant. Der Füllvorgang beginne jeweils bei einer Füllhöhe $h = 0$ im Zeitpunkt $t = 0$. Zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ ergibt sich somit genau eine Füllhöhe h, d.h. die Füllhöhe h ist eine Funktion $h(t)$ der Zeit $t (\geq 0)$.

10 derartige „Füllfunktionen" $h(t)$ sind graphisch dargestellt:
(Dabei sind nur solche Zeiten t berücksichtigt, die vor dem Überlaufen des jeweiligen Gefäßes liegen.)

a) Ordnen Sie den 9 Gefäßen je eine der zehn Füllfunktion zu.

Lösung: ***A/5*** ***B/4*** ***C/10*** ***D/2*** ***E/7***
F/9 ***G/8*** ***H/1*** ***I/6***

b) Eine Funktion kann nicht zugeordnet werden. Zeichnen Sie das dazu fehlende Gefäß.

Lösung: ***Funktion 3 kann nicht zugeordnet werden***