Musterlösung **13. Jgst.** **4. Test** **Datum: 23.03.2006**

Klasse: GY 03 c **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

Thema: **Stochastik:** **Verteilungen; Stoch. Unabh.; Satz von Bayes**
Analysis: **Exp.-/Ganzrat. Fkt.**

---

❶ Exponentialfunktionen

Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = \frac{x^2+3x+k}{e^x} \quad mit\ k \in \Re$

a) Für welche Werte von k hat die Funktion

(i) eine Nullstelle?

(ii) die beiden Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = -1$?

(iii) keine Nullstellen?

<u>Lösung:</u>

$$f_k(x) = \frac{x^2+3x+k}{e^x} = 0 \Rightarrow x^2+3x+k = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{9-4k}}{2}$$

$$(i) \quad 9-4k=0 \Rightarrow k=\frac{9}{4}$$

$$(ii) \quad \frac{-3-\sqrt{9-4k}}{2}=-2 \wedge \frac{-3+\sqrt{9-4k}}{2}=-1 \Rightarrow k=2$$

$$(iii) \quad 9-4k<0 \Rightarrow k>\frac{9}{4}$$

b) Ermitteln Sie die Extremwert**stellen** der Funktion.
(notwendige Bedingung genügt)

<u>Lösung:</u>

$$f_k'(x) = \frac{(2x+3)e^x-\left(x^2+3x+k\right)e^x}{e^{2x}}$$

$$f_k'(x) = \frac{-x^2-x+3-k}{e^x} = 0 \Rightarrow x^2+x-3+k = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4(-3+k)}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{13-4k}}{2}$$

c) Wie lautet die Tangentengleichung in x = 1 an die Funktion.

Lösung:

$$f_k(1) \quad = \quad \frac{4+k}{e} \quad und \quad f_k'(1) \quad = \quad \frac{1-k}{e}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4+k}{e} \quad = \quad \frac{1-k}{e} \cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{4+k}{e} - \frac{1-k}{e} = \frac{3+2k}{e}$$

$$\Rightarrow \quad t(x) \quad = \quad \frac{1-k}{e} x + \frac{3+2k}{e}$$

d) Zeigen Sie, dass die Funktion für verschiedene Werte von k keine gemeinsamen Punkte besitzt.

Lösung:

$$Voraussetzung: \quad k_1 \neq k_2$$

$$f_{k_1}(x) \quad = \quad \frac{x^2+3x+k_1}{e^x} \quad und \quad f_{k_2}(x) \quad = \quad \frac{x^2+3x+k_2}{e^x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2+3x+k_1}{e^x} = \frac{x^2+3x+k_2}{e^x} \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2$$

$$\Rightarrow \quad \text{Widerspruch zur Voraussetzung}$$

Oh je, da kommt nun noch eine zweite Funktion:

$$g_k(x) \quad = \quad \frac{k}{e^x} \quad mit\ k \in \Re$$

e) Ermitteln Sie die Schnitt**punkte** zwischen $g_k(x)$ und $f_k(x)$.

Lösung:

$$f_k(x) \quad = \quad \frac{x^2+3x+k}{e^x} \quad und \quad g_k(x) \quad = \quad \frac{k}{e^x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2+3x+k}{e^x} = \frac{k}{e^x} \quad \Rightarrow \quad x(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_1(0 \mid k) \quad \wedge \quad S_2\left(-3 \mid ke^3\right)$$

f) Berechnen Sie die Fläche der Funktion $g_k(x)$ mit der x-Achse für $x \geq 0$

Lösung:

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t g_k(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{k}{e^x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{k}{e^x}\right]_0^t = 0-(-k) = k$$

❷ **Ganzrationale Funktion**

Gegeben sei die Funktion $f_k(x) = x^3 - kx^2 \quad mit\ k > 0$

a) Berechnen Sie den Wendepunkt.

Lösung:

$$f_k(x) = x^3 - kx^2 \quad mit\ k > 0$$

$$f_k'(x) = 3x^2 - 2kx$$

$$f_k''(x) = 6x - 2k \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}k$$

$$f_k'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow W\left(\frac{1}{3}k \;\middle|\; -\frac{2}{27}k^3\right)$$

b) Berechnen Sie die Ortskurve der Wendepunkte.

Lösung:

$$W\left(\frac{1}{3}k \;\middle|\; -\frac{2}{27}k^3\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}k \Rightarrow k = 3x$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{27}k^3 \xrightarrow{k=3x\ \ einsetzen} y = -2x^3$$

❸ Satz von Bayes

An einem Gymnasium gibt es 3 parallele Leistungskurse BWL, die von verschiedenen Lehrern geleitet werden. Die Abitur-Erfolgsquote bei Kurs 1 liegt voraussichtlich bei 97 %, bei Kurs 2 bei 92 % und beim dritten Kurs bei 80 %.

Die Schülerzahlen der drei Kurse sind 18 – 22 - 20.

a) Wie groß ist die voraussichtlich Erfolgsquote im Abitur?

Lösung:

$$P(\text{"Erfolg"}) = 0{,}97 \cdot \frac{18}{60} + 0{,}92 \cdot \frac{22}{60} + 0{,}8 \cdot \frac{20}{60} = \frac{53{,}7}{60} = 0{,}895$$

Hans Cyrbinski hat es leider nicht geschafft.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kam er aus Kurs 2?

Lösung:

$$P(\text{"Kurs 2"}) = \frac{0{,}08 \cdot \frac{22}{60}}{0{,}105} = \frac{0{,}0293}{0{,}105} = 0{,}2794 \approx 27{,}94\,[\%]$$

❹ Normalverteilung

Am 18.03.2006 wurde Lukas P. geboren. Er war 56 cm groß und 3.900 g schwer. Männliche Neugeborene besitzen normalerweise eine Durchschnittsgröße von 53 cm (Varianz = 4) und ein Durchschnittsgewicht von 3.600 g (Varianz = 10.000).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborener mindestens so groß ist wie Lukas?

Lösung:

$$P(k \geq 56) = 1 - P(k < 56)$$

$$x = \frac{56-53}{2} \Rightarrow x = 1{,}5 \Rightarrow \Phi(1{,}5) = 0{,}93319$$

$$P(k \geq 56) = 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}93319 = 0{,}06681$$

$$P(k \geq 56) \approx 6{,}681\,[\%]$$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborener höchstens so schwer ist wie Lukas?

Lösung:

$$P(k \leq 3.900)$$

$$x = \frac{3.900-3.600}{100} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \Phi(3) = 0{,}99865$$

$$P(k \leq 3.900) = \Phi(3) = 0{,}99865 = 99{,}865\,[\%]$$

c) Bestimmen Sie die Grenzen des $Intervalls\ [53-k\,;53+k]$ der Körpergrößen bei einer Wahrscheinlichkeit von 95 %?

Lösung:

$$2\Phi(x) - 1 = 0{,}95 \Rightarrow \Phi(x) = 0{,}975 \Rightarrow x = 1{,}96$$

$$\Rightarrow 1{,}96 = \frac{k_1 - 53}{2} \Rightarrow k_1 = 56{,}92$$

$$\Rightarrow -1{,}96 = \frac{k_2 - 53}{2} \Rightarrow k_2 = 49{,}08$$

$$\Rightarrow Intervall:\ [49{,}08\,;56{,}92]$$