Musterlösung **12. Jgst.** **4. Test** **Datum: 12.04.2005**

Klasse: GY 03 c **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

Thema: **Rechenoperationen mit Matrizen**

---

❶ Ein paar Fragen

a) Nennen Sie die Voraussetzungen, die für zwei Matrizen gelten müssen, wenn sie miteinander **addiert** werden.

Lösung: *gleiches Format der beiden Matrizen*

b) Definieren Sie, wann zwei Matrizen gleich sind!

Lösung: *Zwei Matrizen sind gleich, wenn sie das gleiche Format besitzen und wenn jedes Element auf der entspr. Position von A mit dem jeweiligen Element von B übereinstimmt.*

c) Worin liegt der Unterschied zwischen einer Diagonal- und einer Einheitsmatrix?

Lösung: *Bei der Diagonalmatrix dürfen auf der Hauptdiagonalen auch von 1 verschiedene Werte stehen, bei der Einheitsmatrix nicht.*

❷ Ökonomische Anwendungen

Geben seien folgende beiden Produktionsmatrizen:

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Ermitteln Sie die Anzahl der notwendigen Rohstoffe zur Herstellung von je einem Endprodukt jeden Typs.

Lösung:
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 20 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Insgesamt sollen nun 10 ME von E_1 und 30 ME von E_2 produziert werden.
Die Rohstoffpreise betragen 6 GE für R_1 und 8 GE für R_2.

b) Wie viele Rohstoffe werden zur Abwicklung des Auftrags benötigt?

Lösung:
$$\begin{pmatrix} 11 & 20 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 710 \\ 420 \end{pmatrix}$$

c) Wie hoch sind die anteiligen Rohstoffkosten je Endprodukt.

Lösung: $\begin{pmatrix}6 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}11 & 20\\ 9 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}138 & 208\end{pmatrix}$

❸ **Ein wenig zum Denken und Kombinieren :**

Die Hauptdiagonale einer quadratischen Matrix besteht aus

a) 5 b) k

Elementen.

(i) Welche Ordnung bzw. welches Format besitzt die Matrix?

Lösung: *5 x 5* *bzw.* *k x k*

(ii) Wie viele Elemente hat die Matrix?

Lösung: *25* *bzw.* k^2

(iii) Wie viele Elemente stehen unterhalb der Hauptdiagonalen?

Lösung: $\frac{25-5}{2}=10$ $\frac{k^2-k}{2}$

❹ Erstellen Sie je eine 4x4-Matrix, für deren Elemente gilt

a) $a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{für } i\le j\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ b) $b_{ij}=\begin{cases}i & \text{für } i<j\\ 0 & \text{für } i=j\\ j & \text{für } i>j\end{cases}$

Lösung: $a)\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $b)\quad B=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&2&2\\1&2&0&3\\1&2&3&0\end{pmatrix}$

❺ Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie für $1 \leq k \leq 3$ die Potenz A^k !

Lösung: $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

b) Wie lautet die Matrix A^{10} ?

Lösung: $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.024 \end{pmatrix}$

c) Wie lautet die Potenz A^n für $n \in \mathbb{N}$?

Lösung: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

❻ **Grundlegende Rechenoperationen zu Matrizen**

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Führen Sie folgende Rechenoperationen aus:

a) $2A + B$ b) $A * B$ c) $\frac{1}{2} B * A$

d) $A^T * B$ e) $(3A - 2B)^T$ f) B^T

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 11 & -12 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{13}{2} & -5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 7 & -12 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -9 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -13 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{transponiert}} \begin{pmatrix} 8 & -13 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$