Musterlösung **13. Jgst.** **2. Kursarbeit** **Datum: 06.12.2005**

Klasse: GY 03 c **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

Thema: **Stochastik – Verteilungen, Erwartungswert, Varianz, Vollst. Induktion, Bin. Entwicklung**

1.) Binomiale Entwicklung

Berechnen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes:

$$\left(\frac{1}{2}x-3\right)^6$$

Lösung:

$$\left(\frac{1}{2}x-3\right)^6=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{2}x\right)^0(-3)^6+\binom{6}{1}\left(\frac{1}{2}x\right)^1(-3)^5+\binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^2(-3)^4$$

$$+\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}x\right)^3(-3)^3+\binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}x\right)^4(-3)^2+\binom{6}{5}\left(\frac{1}{2}x\right)^5(-3)^1$$

$$+\binom{6}{6}\left(\frac{1}{2}x\right)^6(-3)^0$$

$$=729-729x+\frac{1215}{4}x^2-\frac{135}{2}x^3+\frac{135}{16}x^4-\frac{9}{16}x^5+\frac{1}{64}x^6$$

2.) Vollständige Induktion

Beweisen Sie die Aussage mittels vollständiger Induktion:

$$3+7+11+...+(4n-1) \quad = \quad 2n^2+n$$

Lösung:

$$I.-Anfang: \quad l.S.: \quad 3 \qquad r.S.: \quad 2\cdot 1^2+1=3$$

$$I.-Schritt: \quad A(n) \quad \rightarrow \quad A(n+1)$$

$$I.-Schluss:$$

$$3+7+11+...+(4n-1)+\left[4(n+1)-1\right] \quad \overset{IV}{=} \quad 2n^2+n+4n+4-1$$

$$= \quad 2n^2+4n+4+n-1 \quad = \quad 2n^2+4n+2 \quad + \quad n+2-1$$

$$= \quad 2(n+1)^2 \quad + \quad (n+1)$$

3.) Binomialverteilte Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist $B_{50;\frac{1}{10}}$ - verteilt.

Bestimmen Sie alle Werte von X, die für k = 1, 2 und 3 im Intervall $|X-\mu| \leq k\cdot\sigma$ liegen.

Lösung:

$$B_{50;\frac{1}{10}}: \Rightarrow \mu = 5 \Rightarrow \sigma^2 = 4{,}5 \Rightarrow \sigma = \sqrt{4{,}5} = 2{,}1$$

$$Intervall\ 1: |X-5| \leq 2{,}1 \Rightarrow X \in \{3;4;5;6;7\}$$

$$Intervall\ 2: |X-5| \leq 4{,}2 \Rightarrow X \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$$

$$Intervall\ 3: |X-5| \leq 6{,}3 \Rightarrow X \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11\}$$

4.) Erwartungswert

In einem ZE gebe die Zufallsvariable X die Anzahl der Treffer an.
Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gilt:

k	0	1	2	3	4	sonst
P (X = k)	$\frac{a}{10}$	$a^2-0{,}8$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{5}$	$\frac{1}{6}$	0

a) Bestimmen Sie a so, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vorliegt.

b) Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion.

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für mind. zwei Treffer an.

d) Wie groß ist das arithmetische Mittel μ_k der Verteilung?

e) Man kann annehmen, dass X eine $B_{4;p}$ - verteilte ZV ist
Ermitteln Sie den Wert für p?

Lösung:

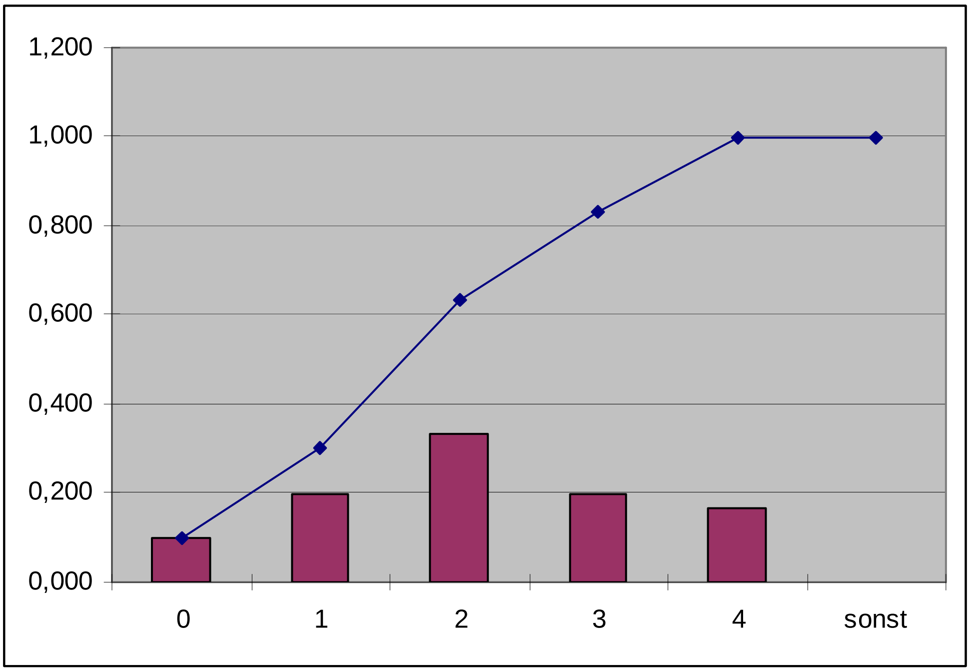
$$\frac{a}{10}+a^2-0{,}8+\frac{a}{3}+\frac{a}{5}+\frac{1}{6}=1 \Rightarrow a^2+\frac{19}{30}a-\frac{49}{19}=0$$

a) $$\Rightarrow a_1 = 1 \wedge a_2 = -\frac{49}{30}$$

Nur a_1 ist als Lösung relevant.

b)

k	0	1	2	3	4	sonst
P (X = k)	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	0
P (X ≤ k)	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{19}{30}$	$\frac{25}{30}$	$\frac{30}{30}$	$\frac{30}{30}$



c) $$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \frac{9}{30} = \frac{7}{10}$$

d) $$\mu_X = 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{6} = 2\frac{2}{15} = 2{,}133$$

e) $$\mu = n \cdot p \Rightarrow p = \frac{\mu}{n} \Rightarrow p = \frac{32}{15 \cdot 4} = \frac{8}{15}$$

5.) ??? - Verteilung

Die Anzahl der wöchentlichen Hundbisse bei den Briefträgern einer Kleinstadt sei poissonverteilt mit $\mu = 3$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Woche 6 Hundebisse zu beklagen sind?

Lösung:

$$P(X=k) \quad = \quad \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

$$\Rightarrow \quad P(X=6) \quad = \quad \frac{3^6}{6!}e^{-3} \quad = \quad 0{,}0504 \quad \approx \quad 5{,}04\,\%$$

6.) Ziehen ohne Zurücklegen I

Der Student Fred hat in seinem von Tante Olga geerbten Kühlschrank acht Eier. Zwei Eier sind, ohne dass er weiß welche, faul. Für Rühreier greift er (zufällig) drei Eier.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Rühreier ungenießbar (d.h. mindestens ein faules Ei) sind?

Lösung:

$$H(X>0) \quad = \quad 1-H(X=0)$$

$$H(X>0) \quad = \quad 1-\frac{\binom{2}{0}\binom{6}{3}}{\binom{8}{3}} \quad = \quad 0{,}6428 \quad \approx \quad 64{,}28\,\%$$

7.) Ziehen ohne Zurücklegen II

In einem Posten von 50 Lebensmittelpackungen befinden sich 5 unvollständige Packungen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Käufer, der

a) 20 dieser Packungen kauft, genau 2 unvollständige erhält?

b) 5 dieser Packungen kauft, mindestens eine unvollständige Packung erhält

Lösung:

$$a)\quad H(X=0) = \frac{\binom{5}{2}\binom{45}{18}}{\binom{50}{20}} = 0{,}3641 \approx 36{,}41\,\%$$

$$b)\quad H(X\geq 1) = 1-H(X=0)$$

$$H(X\geq 1) = 1-\frac{\binom{5}{0}\binom{45}{5}}{\binom{50}{5}} = 0{,}4234 \approx 42{,}34\,\%$$

8.) Die Lostrommel

In einer Urne befinden sich 6 schwarze, 5 rote und 2 gelbe Kugeln.
Es soll nun eine bestimmte Anzahl an **roten** und **gelben** Kugeln hinzugefügt werden, so dass folgende 2 Bedingungen erfüllt sind:

Bei 3maligem Ziehen mit Zurücklegen soll
1) **die Wahrscheinlichkeit für 3 gelbe Kugeln $^{1}/_{27}$** <u>und</u>
2) **die Wahrscheinlichkeit, dass man keine rote Kugel zieht, $^{125}/_{729}$ betragen.**

Wie viele rote und wie viele gelbe Kugeln muss man **hinzufügen**?

Lösung:

$$I.)\quad B(X=3) = \frac{2+g}{13+g+r} = \frac{1}{3}$$

$$II.)\quad B(Y=0) = \frac{8+g}{13+g+r} = \frac{5}{9}$$

$$I.)\quad 13+g+r = 3(2+g)$$

$$II.)\quad 13+g+r = 5(8+g)$$

$$\Rightarrow \quad g=r=7$$

9.) Die hypergeometrische Lostrommel

In einer Lostrommel befinden sich 4 Gewinnlose vom Typ A (Gewinn je 100 €), 7 Gewinnlose vom Typ B (Gewinn je 40 €) und 49 Nieten.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 5 Zügen genau ein Gewinnlos vom Typ A zu ziehen?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei zwei Zügen einen Gewinn von mindestens 90 € zu erzielen?

Lösung:

a)

n_i	4	7	49
k	100	40	0

$$H(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{56}{4}}{\binom{60}{5}} = 0,269 \approx 26,9\,\%$$

$$Alternative:$$

$$H(X=1) = \binom{5}{1}\cdot\frac{4}{60}\cdot\frac{56\cdot55\cdot54\cdot53}{59\cdot58\cdot57\cdot56} = 0,269 \approx 26,9\,\%$$

b) Kombinationen für Gewinn ≥ 90: A/A; A/B; B/A; A/Niete; Niete/A

Kombinationen für Gewinn ≤ 90: B/B; B/Niete; Niete/B; Niete/Niete

$$H(X \geq 90) = 1-\left(\frac{7}{60}\cdot\frac{6}{59}+2\cdot\frac{7}{60}\cdot\frac{49}{59}+\frac{49}{60}\cdot\frac{48}{59}\right)$$

$$H(X \geq 90) = 1-0,87006 = 0,12996 = 12,994\,\%$$

$$Alternative:$$

$$H(X \geq 90) = 1-\frac{\binom{56}{2}\binom{4}{0}}{\binom{60}{2}} = 0,12996 = 12,994\,\%$$

10.) Die Binomial-Weisen

In einem fernen Land beurteilen „acht Weise“ unabhängig voneinander jedes Jahr die zukünftige wirtschaftliche Entwicklung.

Wie groß müsste die Wahrscheinlichkeit p eines richtigen Urteils bei jeden der acht Experten mind. sein, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % nur richtige Vorhersagen erhält?

Lösung:

$$B(X=8) \quad = \quad \binom{8}{8} p^8 \cdot (1-p)^0 \quad \geq \quad 0,95$$

$$\Rightarrow \quad p^8 \quad \geq \quad 0,95 \quad \xrightarrow{\sqrt[8]{p}} \quad p \quad = \quad 0,9936 \quad = \quad 99,36\,\%$$

11.) Placebo-Effekte

Bei einer großen Anzahl von Personen zeigen Placebos genau die gleiche Wirkung wie gleich aussehende echte Tabletten. Man weiß aus Erfahrung, dass in einer Bevölkerung dieser Anteil an Personen, die auf Placebos ansprechen, bei 40 % liegt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich

a) unter sechs Personen mind. zwei, die auf Placebos ansprechen.

b) unter 50 Personen höchstens 8, die auf Placebos ansprechen.

c) unter 100 Personen mind. 36 und höchstens 45, die auf Placebos ansprechen.

Lösung:

$$a) \quad B(X \geq 2) \quad = \quad 1 - \left[B(X=0) + B(X=1) \right]$$

$$B(X \geq 2) \quad = \quad 1 - \left[\binom{6}{0} 0,4^0 \cdot 0,6^6 + \binom{6}{1} 0,4^1 \cdot 0,6^5 \right]$$

$$B(X \geq 2) \quad = \quad 1 - 0,23328 \quad = \quad 0,76672 \quad = \quad 76,672\,\%$$

$$b) \quad B(X \leq 8) \quad = \quad 0,0002 \quad = \quad 0,02\,\% \qquad [n = 50]$$

$$c)\quad B(36 \le X \le 45) = B(X \le 45) - B(X \le 35) \qquad [n=100]$$

$$B(36 \le X \le 45) = 0{,}8689 - 0{,}1795$$

$$B(36 \le X \le 45) = 0{,}6894 = 68{,}94\,\%$$

12.) Losen mit Simeon Denis Poisson

Ein Los gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 0,01.

Wie oft muss man mindestens ein Los kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % mindestens einen Gewinn zu erzielen?

Anmerkung: Wir wissen dass gilt: $\mu = n \cdot p$

<u>Lösung:</u>

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) \ge 0{,}5$$

$$\xrightarrow{P(X=k)=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}} \quad 1 - \frac{\mu^0}{0!}e^{-\mu} \ge 0{,}5$$

$$\xrightarrow{\text{vereinfachen}} \quad e^{-\mu} \le 0{,}5$$

$$\xrightarrow{\mu = n \cdot p \Rightarrow \mu = \frac{1}{100}\cdot n} \quad e^{-\frac{1}{100}\cdot n} \le 0{,}5$$

$$\xrightarrow{\text{logarithmieren: ln}} \quad -\frac{1}{100}\cdot n \le \ln(0{,}5)$$

$$\xrightarrow{\cdot\,(-\,100)} \quad n \ge (-100)\cdot \ln(0{,}5)$$

$$\Rightarrow \quad n \ge 69{,}31 \Rightarrow n \ge 70$$

13.) Gurtmuffel & Co.

Polizeilichen Statistiken zufolge beträgt der Anteil der Autolenker, die während der Fahrt keinen Sicherheitsgurt tragen, 15 %. Diese Fahrer werden ab jetzt „Gurtmuffel" genannt. Man darf annehmen, dass die Autofahrer unabhängig voneinander den Gurt anlegen oder nicht.

a) Wie viele Autos muss man überprüfen, um mit mind. 99 %iger Wahrscheinlichkeit mind. einen Gurtmuffel zu finden?

b) Wie groß wäre der Anteil p der Gurtmuffel mind., wenn von 25 vorbeifahrenden Autos mit 99 %iger Wahrscheinlichkeit mind. eines von einem Gurtmuffel gelenkt würde.

Lösung:

$$a) \quad B(X \geq 1) = 1 - B(X = 0) \geq 0{,}99$$

$$\Rightarrow \binom{n}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^n \leq 0{,}01$$

$$\xrightarrow{\ln} n \cdot \ln(0{,}85) \leq \ln(0{,}01)$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}85)} = 28{,}34$$

$$\Rightarrow n \geq 29$$

$$b) \quad B(X \geq 1) = 1 - B(X = 0) \geq 0{,}99$$

$$\xrightarrow{\text{vereinfachen}} \binom{25}{0} p^0 \cdot (1-p)^{25} \leq 0{,}01$$

$$\xrightarrow{\text{vereinfachen und } \sqrt[25]{(1\text{-p})}} (1-p) \leq \sqrt[25]{0{,}01}$$

$$\xrightarrow{\text{vereinfachen}} p \geq 1 - \sqrt[25]{0{,}01} = 0{,}168 = 16{,}8\,\%$$

OPTION – OPTION - OPTION – OPTION - OPTION – OPTION - OPTION

Von den beiden folgenden aufgaben bitte nur eine auswählen und bearbeiten!!!

Auswahlaufgabe 14 a:

Aus einer repräsentativen Auswahl soll der Anteil der Linkshänder an der Gesamtbevölkerung bestimmt werden. Die Stichprobe besitzt einen Umfang von 90 Personen und man weiß, dass darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9 % mind. ein Linkshänder zu finden ist.

Wie groß ist der prozentuale Anteil der Linkshänder an der Gesamtbevölkerung?

Lösung:

$$P(X \geq 1) \quad = \quad 1 - P(X = 0) \quad \geq \quad 0{,}999$$

$$\xrightarrow{P(X=k)=\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}} \quad 1 - \frac{\mu^0}{0!}e^{-\mu} \quad \geq \quad 0{,}999$$

$$\xrightarrow{\text{vereinfachen}} \quad e^{-\mu} \quad \leq \quad 0{,}001$$

$$\xrightarrow{\mu = n \cdot p \Rightarrow \mu = 90 \cdot p} \quad e^{-90 \cdot p} \quad \leq \quad 0{,}001$$

$$\xrightarrow{\text{logarithmieren: ln}} \quad -90 \cdot p \quad \leq \quad \ln(0{,}001)$$

$$\xrightarrow{:(-90)} \quad p \quad \geq \quad \frac{\ln(0{,}001)}{-90}$$

$$\Rightarrow \quad p \quad \geq \quad 0{,}077 \quad \approx \quad 7{,}7\,\%$$

Auswahlaufgabe 14 b:

Der kleine Gauß konnte bereits in seiner Kindheit mit seinen mathematischen Fähigkeiten aufwarten.
Im fortgeschrittenen Alter entwickelte er dann die sogenannte Glockenkurve

mit der Funktionsvorschrift: $\varphi(x) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Untersuchen Sie diese Funktion nach Symmetrie, Nullstellen, Extremwerten und Wendestellen (hier genügt die notwendige Bedingung).

Lösung:

Symmetrie: $$\varphi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(-x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \varphi(x)$$

=> Achsensymmetrie

Nullstellen: $$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$$

keine Nullstellen, da ln(0) nicht definiert

Extremwerte:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = \varphi(x)\cdot(-x) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0$$

$$\varphi''(x) = \varphi'(x)\cdot(-x) + \varphi(x)\cdot(-1) = \varphi(x)\cdot(-x)^2 + \varphi(x)\cdot(-1)$$

$$\varphi''(x) = \varphi(x)\cdot\left(x^2 - 1\right)$$

$$\varphi''(0) = \varphi(0)\cdot(-1) < 0 \quad \Rightarrow \quad Max\left(0 \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

Wendepunkte:

$$\varphi''(x) = \varphi(x)\cdot\left(x^2 - 1\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad |x| = 1$$

$$\varphi(1) = \varphi(-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot e}}$$

$$\Rightarrow \quad W_1\left(-1 \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot e}}\right) \quad und \quad W_2\left(1 \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot e}}\right)$$