Musterlösung **12. Jgst.** **4. Kursarbeit** **Datum: 20.06.2005**

Klasse: GY 03 c **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

Themen: **Matrizen, (h)LGS, Anwendungsaufgaben**

1.) Ökonomische Anwendung I

Harry Knulp leitet eine Reichsinsignienfabrik. Hierbei werden aus drei Vorprodukten (=Rohstoffe) drei Reichsinsignien A, B und C hergestellt.
Die Rohstoffverbrauchsmatrix hat folgendes Aussehen:

	A	B	C
R_1	2	4	5
R_2	4	3	1
R_3	6	2	0

Im Lager sind 1.820 ME von R_1, 1.040 ME von R_2 und 1.060 ME von R_3 vorrätig.

a) Wie viele ME an Rohstoffen werden benötigt, wenn von den Reichsinsignien je 100 produziert werden sollen?

Lösung:

			100
			100
			100
2	4	5	1.100
4	3	1	800
6	2	0	800

b) Wie viele ME von R1 bleiben übrig, wenn die Rohstoffe R2 und R3 vollständig verbraucht werden und 200 ME von C hergestellt werden sollen?

Lösung:

			a
			b
			200
2	4	5	$2a + 4b + 1.000 = x$
4	3	1	$4a + 3b + 200 = 1.040$
6	2	0	$6a + 2b = 1.060$

$$4a + 3b = 840 \;\wedge\; 6a + 2b = 1.060 \quad \Rightarrow \quad a = 150 \;\wedge\; b = 80$$

$$\Rightarrow \quad x = 1.620 \quad \Rightarrow \quad \text{Rest: } 200\,[ME]$$

Die Kosten in € pro ME der Rohstoffe betragen (0,3 ; 0,4 ; 0,2), die Fertigungskosten in € pro ME der Endprodukte belaufen sich auf (5 ; 1 ; 2).
Der Erlös auf dem Markt je ME der Endprodukte beträgt (10 ; 4 ; 5).

c) Welchen Gewinn erzielt die Firma, bei einer Gesamtproduktion von (300 ; 400 ; 200) an jeweiligen Reichsinsignien?

Anmerkung: Gewinn = Erlös - Kosten

Lösung:

Kosten:

$$\begin{pmatrix}0,3 & 0,4 & 0,2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 1\\ 6 & 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}300\\ 400\\ 200\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}300\\ 400\\ 200\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0,3 & 0,4 & 0,2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3.200\\ 2.600\\ 2.600\end{pmatrix}+2.300=$$

$$2.520+2.300=4.820$$

Erlös:

$$\begin{pmatrix}10 & 4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}300\\ 400\\ 200\end{pmatrix}=5.600$$

$$Gewinn=5.600-4.820 \quad \Rightarrow \quad Gewinn=780$$

Nach einer kleinen technologischen Veränderung müssen nun die Fertigungskosten neu berechnet werden.

So ergeben sich eine neue Rohstoffverbrauchsmatrix

	A	B	C
R_1	2	4	5
R_2	$4+5k^3+k^2$	3	1
R_3	$6+k$	2	0

und neue Fertigungskosten in € pro ME der Endprodukte von (5 - 0,6k ; 1 ; 2).

d) Zeigen Sie, dass die Kostenfunktion folgender Funktionsvorschrift entspricht:

$$K(k) \quad = \quad 300k^3 + 60k^2 - 60k + 2.344$$

Bestätigen Sie dann ebenso die Gewinnfunktion:

$$G(k) \quad = \quad -300k^3 - 60k^2 + 60k + 476$$

Berechnen Sie für 0 < k < 1 den maximalen Gewinn bei einer Gesamtproduktion von (150 ; 80 ; 200) an jeweiligen Reichsinsignien.

Anmerkung: Gewinn = Erlös – Kosten; Randextrema?!

Lösung:

Kosten:

$$(0,3 \quad 0,4 \quad 0,2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4+5k^3+k^2 & 3 & 1 \\ 6+k & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 150 \\ 80 \\ 200 \end{pmatrix}+(5-0,6k \quad 1 \quad 2)\cdot\begin{pmatrix} 150 \\ 80 \\ 200 \end{pmatrix}=$$

$$(0,3 \quad 0,4 \quad 0,2)\cdot\begin{pmatrix} 1.620 \\ 1.040+750k^3+150k^2 \\ 1.060+150k \end{pmatrix}+1.230-90k=$$

$$1.114+300k^3+60k^2+30k+1.230-90k=2.344+300k^3+60k^2-60k$$

Erlös:

$$(10 \quad 4 \quad 5)\cdot\begin{pmatrix} 150 \\ 80 \\ 200 \end{pmatrix}=2.820$$

$$Gewinn=2.820-\left(2.344+300k^3+60k^2-60k\right) \quad \Rightarrow \quad G(k)=476-300k^3-60k^2+60k$$

Maximum:

$$G(k)'=-900k^2-120k+60\overset{!}{=} \quad \Rightarrow \quad k_1=\frac{1}{5} \wedge k_2=-\frac{1}{3} \text{ (nicht im Defintionsbereich für k)}$$

$$G(k)''=-1.800k-120 \quad \Rightarrow \quad G\left(\frac{1}{5}\right)''=-480<0 \quad \Rightarrow \quad Max\left(\frac{1}{5} \quad 483\frac{1}{5}\right)$$

Randextrema: $\lim_{k\to 0} G(k)=476 \qquad \lim_{k\to 1} G(k)=176$

e) Was sind eigentlich die Reichsinsignien?

Lösung: Antwort erwünscht, auf Basis des Wandertags **;-)**

2.) Ökonomische Anwendung II

Eine andere Unternehmung stellt in einem mehrstufigen Produktionsprozess aus zwei Rohstoffen drei Zwischenprodukte her und daraus drei Endprodukte.
Folgende Verbrauchsmatrizen liegen vor:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	a	b	c
R_2	1	3	0

	E_1	E_2	E_3
R_1	5	10	5
R_2	5	8	3

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	2	0
Z_2	1	2	1
Z_3	0	1	1

a) Bestimmen Sie alle Verbrauchsmengen an Rohstoffen R_1 für eine ME der Zwischenprodukte, so dass a, b und c ganze Zahlen außer 0 sind.

Lösung:

	2	2	0
	1	2	1
	0	1	1
$a \quad b \quad c$	$2a+b=5$	$2a+2b+c=10$	$b+c=5$

$$Lösung\ 1: a=1 \quad \Rightarrow \quad b=3 \quad \Rightarrow \quad c=2 \quad \Rightarrow \quad R_1:6$$

$$Lösung\ 2: a=2 \quad \Rightarrow \quad b=1 \quad \Rightarrow \quad c=4 \quad \Rightarrow \quad R_1:7$$

Die Kosten in € pro ME der Rohstoffe betragen (2 ; 4), die Fertigung pro ME der Zwischenprodukte aus den Rohstoffen und von je 1 ME der Endprodukte aus den Zwischenprodukten verursacht folgende Fertigungskosten:

$$\overrightarrow{k_Z} = (3 \quad 4 \quad 2) \quad und \quad \overrightarrow{k_E} = (10 \quad 32 \quad 12)$$

b) Wie hoch sind die Gesamtherstellungskosten für jedes der Endprodukte?

Lösung:

$$\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 10 & 5\\ 5 & 8 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10 & 32 & 12\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}30 & 52 & 22\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10 & 16 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10 & 32 & 12\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}50 & 100 & 40\end{pmatrix}$$

Im Rahmen der Gesamtproduktion der Endprodukte liegt folgender Mengen-Produktionsvektor vor:

$$\vec{e_t}=\begin{pmatrix}64t\\ 8t^2-\frac{1}{5}t^3\\ t^2+10t\end{pmatrix}\quad mit\ t\in[5\,;40]$$

c) Zeigen Sie nun, dass die Gesamtherstellungskosten für dieses Produktionsprogramm durch folgende Funktion bestimmt wird, wenn man von Fixkosten in Höhe von 18.000,00 € ausgegangen ist:

$$k_{gesamt}(t)=-20t^3+840t^2+3.600t+18.000$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix}50 & 100 & 40\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}64t\\ 8t^2-\frac{1}{5}t^3\\ t^2+10t\end{pmatrix}+18.000=$$

$$3.200t+800t^2-20t^3+40t^2+400t+18.000=$$

$$-20t^3+840t^2+3.600t+18.000$$

d) Für welchen Wert von $t\in\mathbb{R}$ sind die Gesamtherstellungskosten maximal?

Bestimmen Sie hierfür auch die Menge des Produktionsprogramms.

Lösung:

$$K(t) = -20t^3 + 840t^2 + 3.600t + 18.000$$

$$K'(t) = -60t^2 + 1.680t + 3.600 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = -2 \quad \wedge \quad t_2 = 30$$

$$K''(t) = -120t + 1.680$$

$$K''(30) = -1.920 < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(30 \quad 342.000)$$

$$Randwerte: \quad K(5) = 47.300 \quad K(40) = 226.000$$

Menge des Produktionsprogramms:

$$\overrightarrow{e_{30}} = (1.920 \quad 1.800 \quad 1.200)$$

3.) Lineare Gleichungssysteme I

Gegeben sind die Matrix A_t und der Vektor $\vec{b}$:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2t & 1 & 3t+1 \\ -1 & 2t & -2t \\ 1 & 2t & t+1 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad mit\ t \in \mathbb{R}$$

Für welche Werte von t hat das LGS

(i) keine Lösung?
(ii) genau eine Lösung?
(iii) unendlich viele Lösungen?

Lösung:

keine Lösung: $t \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; 1\right\}$

genau eine Lösung: $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; 1\right\}$

unendlich viele Lösungen: $t \in \{\ \}$

$$Det(A_t) = Det\begin{pmatrix} 2t & 1 & 3t+1 \\ -1 & 2t & -2t \\ 1 & 2t & t+1 \end{pmatrix} = (t-1)(2t+1)(6t-1)$$

$$t_1 = 1 \quad \wedge \quad t_2 = -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad t_3 = \frac{1}{6}$$

Fall 1: $t_1 = 1$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 4 & 1 & \\ -1 & 2 & -2 & 3 & \\ 1 & 2 & 2 & 4 & \xrightarrow[II+III]{I-2\cdot III} \\ \hline 0 & -3 & 0 & -7 & \\ 0 & 4 & 0 & 7 & \\ 1 & 2 & 2 & 4 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung wegen x_2

Fall 2: $t_2 = -\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{ccccc} -1 & 1 & -0,5 & 1 & \\ -1 & -1 & 1 & 3 & \\ 1 & -1 & 0,5 & 4 & \xrightarrow[II+III]{III+I} \\ \hline -1 & 1 & -0,5 & 1 & \\ 0 & -2 & 1,5 & 7 & \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung wegen Zeile 3

Fall 3: $t_3 = \frac{1}{6}$

$$\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{3} & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 3 & \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{6} & 4 & \xrightarrow[II+III]{I-\frac{1}{3}\cdot III} \\ \hline 0 & \frac{8}{9} & \frac{10}{9} & -\frac{1}{3} & \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & 7 & \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{7}{6} & 4 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung wegen Zeilen 1 und 2

4.) Lineare Gleichungssysteme II

Gegeben sind die Matrix A_t und der Vektor $\vec{b}$, die ein LGS bilden:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 2t & 3t+1 \\ -1 & -t & -2t \\ 1 & 2t & t+1 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad mit\ t \in \mathbb{R}$$

a) Geben Sie für t = 2 und t = 0 die jeweiligen Lösungsvektoren an.

Lösung:

$$t = 2: \quad (a \quad b \quad c) = (25 \quad 0 \quad -7)$$
$$t = 0: \quad (a \quad b \quad c) = (-3 \quad b \quad 7)$$

b) Für welchen Wert von t und welches $a \in \mathbb{R}$ ist $\vec{x} = (4 \quad 0 \quad a)$ ein Lösungsvektor des LGS?

Lösung:

			4
			0
			a
2	$2t$	$3t+1$	$8+3at+a=1$
-1	$-t$	$-2t$	$-4-2at=3 \Rightarrow at=-\frac{7}{2}$
1	$2t$	$t+1$	$4+at+a=4$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{7}{2} \quad und \quad t = -1$$

c) Für welche Werte $u \in \mathbb{R}$ hat das LGS $A_1 \cdot \vec{x} - u \cdot \vec{x} = \vec{0}$ nicht-triviale Lösungen?

Lösung:

$$A_1 \cdot \vec{x} - u \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (A_1 - u) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$(A_1 - u) = \begin{pmatrix} 2-u & 2 & 4 \\ -1 & -1-u & -2 \\ 1 & 2 & 2-u \end{pmatrix} \xrightarrow{Det} u(u^2 - 3u + 2) = 0$$

$$u_1 = 0 \quad \wedge \quad u_2 = 1 \quad \wedge \quad u_3 = 2$$

Es sei nun folgende Matrix A_t gegeben: $A_t = \begin{pmatrix} t-1 & t^2 \\ 2 & t \end{pmatrix}$ *mit* $t \in \mathbb{R}$

d) Lösen Sie folgende Gleichung allgemein: $2 \cdot X - A_t \cdot B = X \cdot A_t$

Lösung: $2 \cdot X - A_t \cdot B = X \cdot A_t \quad \Rightarrow \quad X = A_t \cdot B \cdot \left(2 \cdot E - A_t\right)^{-1}$

e) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist diese Gleichung nicht lösbar?

Lösung:

$$Det\left(2 \cdot E - A_t\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad Det\begin{pmatrix} 3-t & -t^2 \\ -2 & 2-t \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (3-t) \cdot (2-t) - 2t^2 = 0$$

$$t_1 = -6 \quad \wedge \quad t_2 = 1$$

Die Gleichung ist für obige Werte von t nicht lösbar, da die Inverse von $\left(2 \cdot E - A_t\right)$ sonst nicht existiert.

5.) Fragestellungen zum Rang von Matrizen

a) Was versteht man unter dem Rang einer Matrix?

Lösung: ***Rang = Anzahl der von 0 verschiedenen Zeilen nach elementarer Zeilenumformung in eine Dreiecksmatrix.***

b) Erläutern unter Verwendung des Rangkriteriums, warum homogene LGS immer mind. eine Lösung haben.

Lösung: Es gilt immer: $Rg(A) = Rg\left(A \mid \vec{b}\right) \leq n$

c) Bestimmen Sie den jeweiligen Rang folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\left(A \mid \vec{b}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[I-III]{I+II} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow Rang\ 2$$

6.) Statisches Gleichgewicht

Die Wählerwanderung der drei Parteien ASPD, BFDP und CCDU eines Wahlkreises werden durch folgende Tabelle dargestellt:

←	ASPD	BFDP	CCDU
ASPD	0,7	0,3	0,1
BFDP	0,2	?	?
CCDU	?	0,1	0,8

Bei der letzten Wahl erhielt die Partei ASPD 40.000 Stimmen, die BFDP 15.000 Stimmen und die CCDU 45.000 Stimmen.

a) Bilden Sie aus den Angaben den Zustandsvektor in %-Darstellung und Vervollständigen Sie die Übergangsmatrix U.

Lösung:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,15 & 0,45 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Stimmen werden die Parteien bei konstanten Übergangswahrscheinlichkeiten bei der nächsten Wahl erreichen.

Lösung:

			40.000
			15.000
			45.000
0,7	0,3	0,1	37.000
0,2	0,6	0,1	21.500
0,1	0,1	0,8	41.500

c) Wie viele Stimmen hatten die Parteien bei der vorletzten Wahl?

Lösung:

$$\begin{array}{ccc|c} & & & a \\ & & & b \\ & & & c \\ \hline 0,7 & 0,3 & 0,1 & 40.000 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 & 15.000 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 & 45.000 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50.000 \\ 0 \\ 50.000 \end{pmatrix}$$

d) Welche konstante Stimmverteilung ergibt sich langfristig?

Bestimmen sie dieses Gleichgewichtsverhalten in Abhängigkeit von x_3 und prozentual.

Anmerkung: Bitte wählen Sie x_3 als freie Variable.

Lösung:

$$(U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0,3 & 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & -0,4 & 0,1 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & -0,2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3$$

$$\frac{7}{6}x_3 + \frac{5}{6}x_3 + x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \left(\frac{7}{18} \quad \frac{5}{18} \quad \frac{1}{3}\right)$$