Musterlösung **12. Jgst.** **3. Kursarbeit** **Datum: 18.04.2005**

Klasse: GY 03 c **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

Themen: **Matrizen, Definitionen, Rechenoperationen, Beweise und Anwendungen**

1.) Matrizenmultiplikation

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & r & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $mit\ r, s \in \Re$.

a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten:

(i) $A^2 = 2A - E$

Lösung: Behauptung 1: $A^2 = 2A - E$ Derive: RTF:

linke Seite: A^2

#3: a·a

#4: $\begin{bmatrix} 1 & 2\cdot r & 2\cdot s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

rechte Seite: 2A – E

#5: 2·a – e

#6: $\begin{bmatrix} 1 & 2\cdot r & 2\cdot s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ii) $A^3 = 3A - 2E$

Lösung: Behauptung 2: $A^3 = 3A - 2E$ Derive: RTF:

linke Seite:

#7: a·a·a

#8: $\begin{bmatrix} 1 & 3\cdot r & 3\cdot s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

rechte Seite:

#9: 3·a – 2·e

#10: $\begin{bmatrix} 1 & 3\cdot r & 3\cdot s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) Wie lautet die Potenz A^n $mit\ n \in \mathbb{N}$

Lösung: `Allgemeine Darstellung: A^n` `Derive:` `RTF:`

$$\#11: \quad \begin{bmatrix} 1 & n \cdot r & n \cdot s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.) Matrizen erstellen

Erstellen Sie je eine 4x4-Matrix, für deren Elemente gilt

a) $a_{i\,j} = i \cdot j$

Lösung: `Derive:` `RTF:`

$$\#12: \quad a_2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

b) $$b_{i\,j} = \begin{cases} |\, i - j \,| & für\ i < j \\ (-1)^i & für\ i = j \\ j^{\,i+1} & für\ i > j \end{cases}$$

Lösung: `Derive:` `RTF:`

$$\#13: \quad b_2 := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 16 & -1 & 1 \\ 1 & 32 & 243 & 1 \end{bmatrix}$$

3.) Rechenoperationen und Beweise

a) Geben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Finden Sie zwei Beispiele für A, so dass gilt: A * B = B * A.

Lösung: Derive: RTF:

Kommutativgesetz bei der Matrizenmultiplikation

#14: $b_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

#15: $a_{3,1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

#16: $a_{3,2} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Probe für gesuchte Matrizen zum Kommutativgesetz der Multiplikation

#17: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

#18: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

#19: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

#20: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

#21: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

#22: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

#23: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

#24: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Behauptung falsch ist: ***A * A = Nullmatrix => A = Nullmatrix***

Lösung: Derive: RTF:

Gegenbeispiel zu Behauptung: A∗A = 0 => A = 0

#25: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

#26: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) In welchen Fällen kann das Matrizenprodukt ***A * B * C*** gebildet werden? Kreuzen Sie an. *Bei „Ja" => Format Ergebnis?*

Nr.	**Matrix A**	**Matrix B**	**Matrix C**	**Ja ?**	**Nein ?**	**Format**
1	(2,3)	(3,4)	(4,5)	X		**(2,5)**
2	(3,4)	(5,3)	(4,5)		X	
3	(2,4)	(4,3)	(3,3)	X		**(2,3)**
4	(3,5)	(5,2)	(2,3)	X		**(3,3)**
5	(4,3)	(4,4)	(3,5)		X	

4.) Ökonomie I

Derive: RTF:

Die Unternehmung Palindrom-Elektronics braucht zur Fertigung ihrer Mikroprozessoren M_1, M_2, M_3 und M_4 die Vorprodukte (Rohstoffe) V_1, V_2 und V_3.

Die Mengeneinheiten ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

	M_1	M_2	M_3	M_4
V_1	1	4	3	2
V_2	2	2	0	4
V_3	0	1	2	2

Das Unternehmen stellt aus den Mikroprozessoren die Steuergeräte S_1, S_2 und S_3 her.

Die Anzahl der notwendigen Mikroprozessoren ist der folgenden Darstellung zu entnehmen.

	S_1	S_2	S_3
M_1	2	3	4
M_2	1	2	2
M_3	0	1	1
M_4	1	0	1

a) Wie viele Vorprodukte werden pro Steuergerät gebraucht?

#6: $m_{v,s} := \begin{bmatrix} 8 & 14 & 17 \\ 10 & 10 & 16 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

b) Palindrom-Elektronics erhält einen Steuergerätauftrag über von (10 25 20). Der Vorrat an Vorprodukten beträgt (500 700 350).

Prüfen Sie, ob der vorhandene Bestand genügt bzw. ob nachbestellt werden muss.

#9: $$\begin{bmatrix} 770 \\ 670 \\ 250 \end{bmatrix}$$

=> *Von V_1 müssen 270 ME nachbestellt werden.*

c) Die Vorproduktpreise in € pro ME betragen (0,5 2,5 8). Berechnen Sie die Rohstoffgesamtkosten für jedes einzelne Steuergerät.

#12: $$\left[53,\ 64,\ \frac{193}{2}\right]$$

#13: [53, 64, 96.5]

d) *Wie viele Steuergeräte können aus folgenden Vorproduktmengen hergestellt werden: V_1: 11.050 ME V_2: 9.500 ME V_3: 3.550 ME*

#14: $$\begin{bmatrix} 8 & 14 & 17 \\ 10 & 10 & 16 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot [x,\ y,\ z] = [11050,\ 9500,\ 3550]$$

#15: $8 \cdot x + 14 \cdot y + 17 \cdot z = 11050 \wedge 5 \cdot x + 5 \cdot y + 8 \cdot z = 4750 \wedge 3 \cdot x + 4 \cdot y + 6 \cdot z = 3550$

#16: APPROX(SOLVE(8·x + 14·y + 17·z = 11050 ∧ 5·x + 5·y + 8·z = 4750 ∧ 3·x + 4·y + 6·z = 3550, [x, y, z], Real))

#17: $x = 150 \wedge y = 400 \wedge z = 250$

5.) Ökonomie II

Derive: RTF:

Das Unternehmen Auto-Mopps stellt aus Bauteilen Z_1, Z_2 und Z_3 die Fahrzeugkomponenten E_1, E_2 und E_3 her. Der Bedarf an Bauteilen je Stück der Fahrzeugkomponenten ist der Tabelle zu entnehmen.

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	2t	6
Z_2	6	12	6
Z_3	4	4	t+2

a) Von E1 sollen 100 ME, von E2 50 ME und von E3 150 ME hergestellt werden.

Bestimmen Sie hierfür den Parameterwert $t \in \mathbb{R}$, wenn folgender Bauteilevorrat auf Lager liegt: (1.500 2.100 1.500).

Gesamtbedarf an Bauteilen Z

#3: $$\begin{bmatrix} 2 & 2\cdot t & 6 \\ 6 & 12 & 6 \\ 4 & 4 & t + 2 \end{bmatrix}\cdot[100, 50, 150]$$

#4: $$[100\cdot t + 1100, 2100, 150\cdot(t + 6)]$$

=> t = 4

b) Das Unternehmen plant nun mit folgender Preisgestaltung:

Kosten Bauteile: $\overrightarrow{k_Z} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$

Kosten Fahrzeugkomponenten: $\overrightarrow{k_E} = \begin{bmatrix} \frac{40}{t} & 4t+4 & \frac{50}{t} \end{bmatrix} \quad mit\ t \in [\ 1;10\ ]$

Berechnen Sie die Gesamtherstellungskosten k(t) für einen Auftrag über jeweils 20 ME der Fahrzeugkomponenten E_1, E_2 und E_3 in Abhängigkeit von t.

Gesamtkosten

#5: $$[4, 8, 6]\cdot\begin{bmatrix} 2 & 2\cdot t & 6 \\ 6 & 12 & 6 \\ 4 & 4 & t + 2 \end{bmatrix}\cdot[20, 20, 20] + \left[\frac{40}{t}, 4\cdot t + 4, \frac{50}{t}\right]\cdot[20, 20, 20]$$

#6: $$\frac{360\cdot(t^2 + 16\cdot t + 5)}{t}$$

#7: $$\text{FACTOR}\left(\frac{360\cdot(t^2 + 16\cdot t + 5)}{t}, \text{Rational}, t\right)$$

#8: $$360\cdot t + \frac{1800}{t} + 5760$$

#9: $$k(t) := 360\cdot t + \frac{1800}{t} + 5760$$

c) Es sei nun folgende Gesamtkostenfunktion gegeben:

$$k(t) = 360t + 5.760 + \frac{1.800}{t}$$

Für welchen Wert von t sind die Kosten minimal?

Anmerkung: Es genügt die notwendige Bedingung.

#10: $\frac{d}{dt}\left(360\cdot t + \frac{1800}{t} + 5760\right)$

#11: $360 - \frac{1800}{t^2}$

#12: $360 - \frac{1800}{t^2} = 0$

#13: $\mathrm{SOLVE}\left(360 - \frac{1800}{t^2} = 0,\ t,\ \mathrm{Real}\right)$

#14: $t = -\sqrt{5} \lor t = \sqrt{5}$

#15: $t = -2.236067977 \lor t = 2.236067977$

Anmerkung: An den Rändern sind die Kosten jeweils höher als bei $t = 2.236$.

d) Konkurrent Herbert Frechdachs arbeitet mit folgender Kosten-funktion: $k_{frechdachs}(t) = 5\,t^3 + 5.760$

Ab welchem Wert für t sind unsere Kosten geringer?

Kostenvergleich

#16: $h(t) := 5\cdot t^3 + 5760$

#17: $h(t) = k(t)$

#18: $5\cdot t^3 + 5760 = 360\cdot t + \frac{1800}{t} + 5760$

#19: $\mathrm{SOLVE}\left(5\cdot t^3 + 5760 = 360\cdot t + \frac{1800}{t} + 5760,\ t,\ \mathrm{Real}\right)$

#20: $t = -\sqrt{(6\cdot\sqrt{46} + 36)} \lor t = \sqrt{(6\cdot\sqrt{46} + 36)}$

#21: $\mathrm{APPROX}\left(\mathrm{SOLVE}\left(5\cdot t^3 + 5760 = 360\cdot t + \frac{1800}{t} + 5760,\ t,\ \mathrm{Real}\right)\right)$

#22: $t = \pm\infty \lor t = -8.757509914 \lor t = 8.757509914$

Ergebnis: Ab $t = 8.757$ sind unsere Kosten geringer als beim Konkurrenten.

6.) **Statisches Gleichgewicht** Derive: RTF:

Eine Analyse ergab, dass die Einwohner von Knödelhausen im Vergleich zum Vorjahr folgende Veränderungen ihres Browserbenutzerverhaltens vornahmen:

	I.E.	Firefox	Opera
I.E.	70 %	10 %	20 %
Firefox	20 %	80 %	30 %
Opera	10 %	10 %	50 %

Die derzeitige Marktverteilung sieht den I.E. bei 65%, Firefox liegt bei 25 % und der Rest benutzt Opera.

a) Bilden Sie aus den Angaben, den Zustandsvektor $\vec{Z}_{2005}$ und die Übergangsmatrix U.

#1: $u := \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$

#2: z2005 := [0.65, 0.25, 0.1]

b) Ermitteln Sie die voraussichtlichen Zustände 2006 und 2007 bei konstanten Übergangswahrscheinlichkeiten.

Zustände 2006 und 2007

#3: u·z2005

#4: $\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{25}, \frac{7}{50}\right]$

#5: [0.5, 0.36, 0.14]

#6: z2006 := $\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{25}, \frac{7}{50}\right]$

#7: u·z2006

#8: $\left[\frac{207}{500}, \frac{43}{100}, \frac{39}{250}\right]$

#9: [0.414, 0.43, 0.156]

c) Angenommen das Änderungsverhalten bliebe entsprechend der angegebenen Tabelle auch in den folgenden Jahren konstant, dann würde sich nach einigen Jahren ein Gleichgewicht einstellen und die prozentualen Anteile würden sich nicht mehr ändern.

Bestimmen sie dieses Gleichgewichtsverhalten in Abhängigkeit von x_1 und prozentual.

Anmerkung: Bitte wählen Sie x_1 als freie Variable.

statisches Gleichgewicht

#11: $(u - e)\cdot[x, y, z] = [0, 0, 0]$

#12: $3\cdot x - y - 2\cdot z = 0 \wedge 2\cdot x - 2\cdot y + 3\cdot z = 0 \wedge x + y - 5\cdot z = 0$

#15: SOLVE($3\cdot x - y - 2\cdot z = 0 \wedge 2\cdot x - 2\cdot y + 3\cdot z = 0 \wedge x + y - 5\cdot z = 0$, [y, z], Real)

#16: $$y = \frac{13\cdot x}{7} \wedge z = \frac{4\cdot x}{7}$$

#17: SOLVE($3\cdot x - y - 2\cdot z = 0 \wedge 2\cdot x - 2\cdot y + 3\cdot z = 0 \wedge x + y - 5\cdot z = 0$, [x, z], Real)

#18: $$x = \frac{7\cdot y}{13} \wedge z = \frac{4\cdot y}{13}$$

#19: SOLVE($3\cdot x - y - 2\cdot z = 0 \wedge 2\cdot x - 2\cdot y + 3\cdot z = 0 \wedge x + y - 5\cdot z = 0$, [x, y], Real)

#20: $$x = \frac{7\cdot z}{4} \wedge y = \frac{13\cdot z}{4}$$

#21: $x + \frac{13\cdot x}{7} + \frac{4\cdot x}{7} = 1$

#22: $$\frac{24\cdot x}{7} = 1$$

#23: $\text{SOLVE}\left(x + \frac{13\cdot x}{7} + \frac{4\cdot x}{7} = 1, x, \text{Real}\right)$

#24: $$x = \frac{7}{24}$$

#25: x = 0.2916666666 = 29,17 %

#26: $y = \frac{13}{24}$

#27: y = 0.5416666666 = 54,17 %

#28: $z = \frac{4}{24}$

#29: z = 0.1666666666 = 16,66 %