Musterlösung **12. Jgst.** **2. Kursarbeit** **Datum: 20.12.2004**

Klasse: GY 03 c **Fach: Mathematik (Leistungskurs)**

Themen: **Kurvendiskussion von e- und gebr.-rat. Funktionen; Regeln von L'Hospital; Newton-Verfahren**

1.) Kurvenuntersuchung

Gegeben ist die Schar von Funktionen mit der Funktionsvorschrift

$$f_k(x) = \frac{e^x}{k + e^x} \quad mit\ k \in \Re^+$$

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge.

Lösung: $k + e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad D = \Re$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion monoton wachsend ist.

Lösung:

$$Beh.: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$Bew.: \quad x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow \frac{e^{x_1}}{k + e^{x_1}} < \frac{e^{x_2}}{k + e^{x_2}} \quad \Rightarrow \quad mon.\ st.$$

$$Alternative: 1.Ableitung$$

c) Ermitteln Sie die Grenzwerte an den Rändern von D.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{k + e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{k}{e^x} + 1} \to 1$$

Lösung:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{k + e^x} \to \lim_{x \to \infty} \frac{0}{k + 0} \to 0$$

d) Beweisen Sie, dass die Funktion für unterschiedliche Parameter keine gemeinsamen Punkte hat, d.h. es existiert kein Schnittpunkt.

Lösung:

$$f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x) \quad mit\ k_1 \neq k_2$$

$$\frac{e^x}{k_1 + e^x} = \frac{e^x}{k_2 + e^x}$$

$$k_2 + e^x = k_1 + e^x$$

$$k_2 = k_1 \quad Widerspruch\ zur\ Voraussetzung$$

e) Zeigen Sie nun, dass folgende Beziehung existiert:

$$f_k''(x) - f_k'(x) = \frac{-2k}{k+e^x} \cdot \left[f_k(x) \right]^2$$

Nachrechnen mit $f_k'(x)$ *und* $f_k''(x)$

Lösung: $f_k'(x) = \frac{ke^x}{\left(k+e^x\right)^2}$ *und* $f_k''(x) = \frac{ke^x\left(k-e^x\right)}{\left(k+e^x\right)^3}$

f) Führen Sie nun eine Kurvenuntersuchung bezüglich folgender Kriterien durch:

(i) Symmetrie

Lösung: **keine Symmetrie**

(ii) Nullstellen

Lösung: **keine Nullstelle wegen** $e^x \neq 0$

(iii) Schnittpunkt mit y-Achse

Lösung: $f_k(0) = \frac{1}{k+1} \quad \Rightarrow \quad S\left(0 \,\middle|\, \frac{1}{k+1}\right)$

(iv) Extremwert

Lösung:

$$f'_k(x) = \frac{ke^x}{\left(k+e^x\right)} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad ke^x = 0 \ \left(\textit{Widerspruch}\right)$$

keine Extremwerte

(v) Wendepunkt (notwendige Bedingung genügt)

$$f_k''(x) = \frac{ke^x\left(k-e^x\right)}{\left(k+e^x\right)^3} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad k-e^x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \ln(k)$$

Lösung:

$$W\left(\ln(k) \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)$$

(vi) Wendetangente

Lösung: $t(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ln(k)$

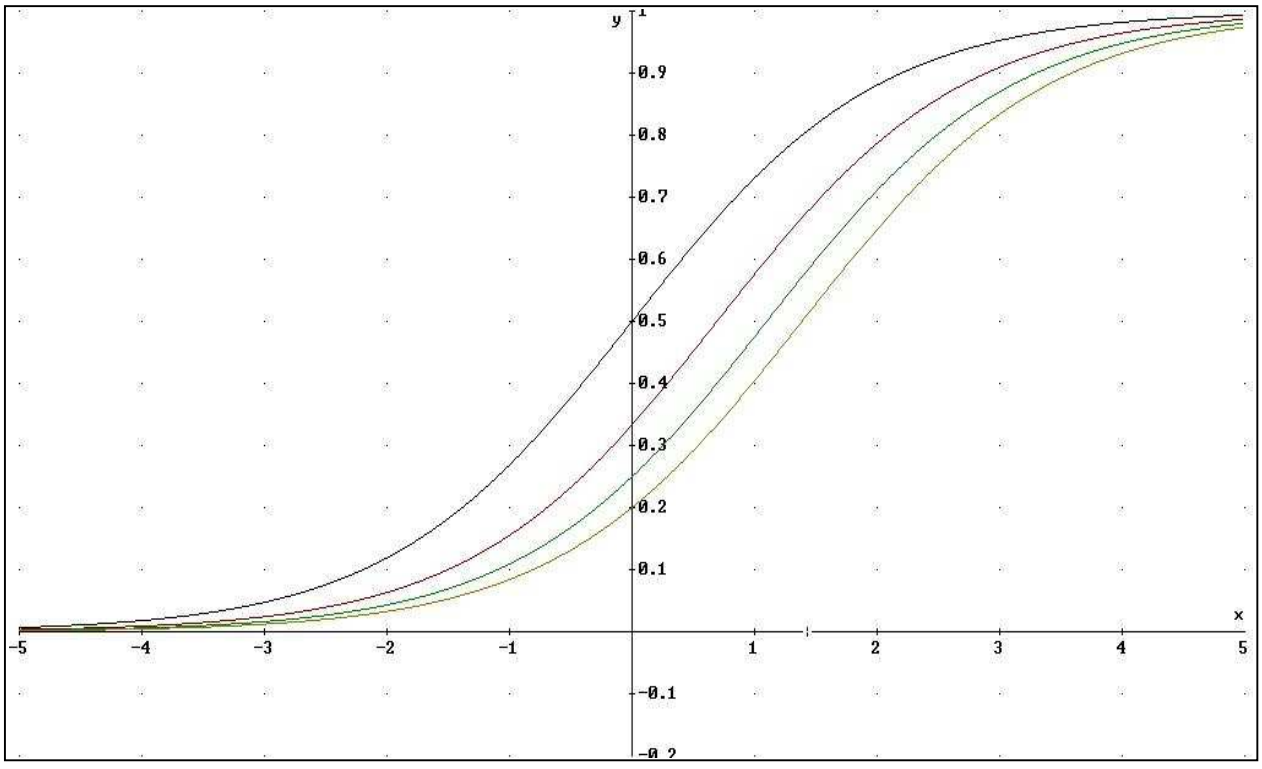
(vii) Ortskurve der Wendepunkte

Lösung: $y=\frac{1}{2}$

f) Nun sollen Sie noch die Funktion für k = 1 integrieren: $\int_0^2 f_1(x)\,dx$

Lösung:
$$\int_0^2 f_1(x)\,dx=\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}=\left[\ln\left|1+e^x\right|\right]_0^2$$
$$=\ln\left|1+e^2\right|-\ln(2)=1{,}431$$

h) Für welche k-Werte wurde die Funktion gezeichnet:



Lösung: **Die Werte für k lauten: 1, 2, 3 und 4**

Beispielrechnung: $S_y:\frac{1}{2}=\frac{1}{k+1}\quad\Rightarrow\quad k=1$

2.) Schnittpunkte von Exponentialfunktionen mit den Koordinatenachsen

Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Funktion

$$f_t(x) = e^{2x} - 2te^x + t^3 \quad mit\ t \neq 0$$

mit den Koordinatenachsen.

a) Schnittpunkt mit y-Achse

Lösung: $f_t(0) = 1 - 2t + t^3 \quad \Rightarrow \quad S_y\left(0 \mid 1 - 2t + t^3\right)$

b) Nullstellen

Führen Sie eine Fallunterscheidung nach t durch, wonach die Funktion keine, eine oder zwei Nullstellen besitzt.

$$f_t(x) = e^{2x} - 2te^x + t^3 \quad = \quad 0$$

$$Substitution: \quad e^x = u$$

$$u_{1/2} = t \pm t\sqrt{1-t} \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \ln\left(t \pm t\sqrt{1-t}\right)$$

Lösung: $Fall\ 1: \quad t > 1 \Rightarrow$ keine Nullstelle

$Fall\ 2: \quad t = 1 \Rightarrow$ eine doppelte Nullstelle

$Fall\ 3: \quad t < 1 \Rightarrow$ eine einfache Nullstelle

3.) Berechnen Sie die Integrale bzw. die fehlenden Größen:

a) $$\int_1^3 \left(x^2 - x\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = \frac{14}{3}$$

b) $$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x\right) dx \overset{Symmetrie}{=} 2 \cdot \left[\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^2\right]_0^1 = \frac{11}{12}$$

c) $$\int_0^t e^x\, dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \left[e^x\right]_0^t = 1 \quad \Rightarrow e^t - 1 = 1 \quad \Rightarrow t = \ln(2)$$

d) $$\int_a^4 x\, dx = 6 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^4 = 6 \quad \Rightarrow 8 - \frac{1}{2}a^2 = 6 \quad \Rightarrow |a| = 2$$

$$Lösung: L = \{2\}$$

4.) Newton-Verfahren

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{\sqrt{2-x^2}} - 2x$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich.

Lösung:

$$f(x) = e^{\sqrt{2-x^2}} - 2x \Rightarrow 2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{2}$$

$$D = \left[-\sqrt{2} ; \sqrt{2} \right]$$

b) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion.

Verwenden Sie den Startwert $x_0 = 1$.

Anmerkung: Eine Iteration genügt!

Lösung:

$$f(x) = e^{\sqrt{2-x^2}} - 2x \quad \Rightarrow \quad f(1) = e - 2$$

$$f'(x) = \frac{e^{\sqrt{2-x^2}} \cdot (-x)}{\sqrt{2-x^2}} - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -e - 2$$

$$x_1 = 1 - \frac{e-2}{-e-2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1{,}15$$

ZUSATZAUFGABE:

c) Lösen Sie folgende Gleichung: $e^{\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{e^{2-x^2}}$

Lösung:

$$e^{\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{e^{2-x^2}} \quad \Big|^2$$

$$e^{2\cdot\sqrt{2-x^2}} = e^{2-x^2} \quad \Big| \ln$$

$$2 \cdot \sqrt{2-x^2} = 2 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^4 = 4 \quad \Rightarrow \quad |x| = \sqrt{2}$$

5.) Stammfunktionen

Geben Sie zu folgenden Funktionen eine Stammfunktion an:

a) $f(x)=\frac{2}{x^3}+4 \qquad F(x)=-\frac{1}{x^2}+4x+C$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2}+1+x^2 \qquad F(x)=-\frac{1}{x}+x+\frac{1}{3}x^3+C$

c) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-4 \qquad F(x)=2\sqrt{x}-4x+C$

d) $f(x)=2x^k+\frac{1}{2}x^{k-1}+3 \qquad F(x)=\frac{2}{k+1}x^{k+1}+\frac{1}{2k}x^k+3x+C$

e) $f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x^2} \qquad F(x)=-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}+C$

f) $f(x)=\frac{2\left(x+e^{2x}\right)}{x^2+e^{2x}} \qquad F(x)=\ln\left|x^2+e^{2x}\right|+C$

6.) Gebrochen-rationale Funktionen mit Parameter

Gegeben ist die Schar von Funktionen mit der Funktionsvorschrift

$$f_a(x)=\frac{x^2}{a(x-a)} \quad \textit{mit } a\in\Re^+ \quad \textit{und} \quad x\in\Re\setminus\{a\}$$

a) Bestimmen Sie Polstelle und Asymptote und ermitteln Sie den Schnittpunkt zwischen den beiden Gleichungen.

Lösung: Polstelle: x = a

Asymptote:

$$x^2:\left(ax-a^2\right) \;=\; \frac{1}{a}x+1+\frac{a^2}{ax-a^2} \quad \Rightarrow t_a(x)=\frac{1}{a}x+1$$

Schnittpunkt:

$$t_a(a)=2 \quad \Rightarrow \quad S(a\mid 2)$$

b) Untersuchen Sie die Funktion auf Extrema.

Anmerkung: $f_a''(x)=\frac{2a}{(x-a)^3}$ (als Weihnachtsgruß)

Lösung:

$$f_a'(x)=\frac{x(x-2a)}{a(x-a)^2}\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \quad \wedge \quad x_2=2a$$

$$f_a''(0)=\frac{-2}{a^2}<0 \quad \Rightarrow \quad Max(0\mid 0)$$

$$f_a''(2a)=\frac{2}{a^2}>0 \quad \Rightarrow \quad Min(2a\mid 4)$$

c) Vom Punkt P(0/1) wird eine Tangente t(x) an den Graphen $f_2(x)$ gelegt.

Bestimmen Sie den Berührpunkt und die Geradengleichung.

Lösung:

$$f_2(x)=\frac{x^2}{2(x-2)} \quad und \quad f_2'(x)=\frac{x(x-4)}{2(x-2)^2}$$

$$P(0\mid 1)$$

$$m=\frac{1-y}{0-x}=\frac{1-\frac{x^2}{2(x-2)}}{-x}=\frac{2(x-2)-x^2}{(-2x)(x-2)}$$

$$Es\ gilt: \quad m=f_2'(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{2(x-2)-x^2}{(-2x)(x-2)}=\frac{x(x-4)}{2(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad x=1 \quad \Rightarrow \quad f_2(1)=-0,5 \quad \Rightarrow \quad T(1\mid -0,5)$$

$$Tangentengleichung: \quad t(x)=-\frac{3}{2}x+1$$

7.) Exponentialfunktion unter der Wurzel

Gegeben ist die Funktion mit der Funktionsvorschrift $f(x)=\sqrt{e^{2-x^2}} \quad mit\ x\in\Re$

a) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten.

Lösung: $f(-x)=\sqrt{e^{2-(-x)^2}} \quad = \quad \sqrt{e^{2-x^2}} = f(x) \quad \Rightarrow Achsensymmetrie$

b) Wie verhält sich die Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs?

Lösung: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{e^{2-x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{e^x}} = 0$

c) Zeigen Sie, dass gilt: $f'(x)=-x\cdot f(x)$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{e^{2-x^2}}}\cdot e^{2-x^2}\cdot(-2)x$$

Lösung:
$$f'(x)=(-x)\cdot\sqrt{e^{2-x^2}}$$
$$f'(x)=(-x)\cdot f(x)$$

d) Bilden aufgrund der Darstellung in c) nun die zweite Ableitung und zeigen Sie, dass diese folgende Form besitzt: $f''(x)=\left(x^2-1\right)\cdot f(x)$

Lösung:
$$f''(x)=-1\cdot f(x)-x\cdot f'(x)$$
$$f''(x)=-1\cdot f(x)-x\cdot(-x)\cdot f(x)$$
$$f''(x)=\left(x^2-1\right)\cdot f(x)$$

e) Ermitteln Sie den Extremwert der Funktion.

Lösung:
$$f'(x)=-x\cdot f(x)\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=0\ (einzige\ Lösung)$$
$$f''(0)=-e<0 \quad \Rightarrow \quad Max(0\mid e)$$

g) Zeigen Sie, dass f(x) genau zwei Wendestellen besitzt.
Dabei genügt die notwendige Bedingung.

Lösung:
$$f''(x)=\left(x^2-1\right)\cdot f(x)\overset{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad |x|=1$$
$$W_1\left(1\mid\sqrt{e}\right) \quad und \quad W_2\left(-1\mid\sqrt{e}\right)$$