12. Jgst. **1. Kursarbeit** **Datum: 13.10.2004** **Klasse: GY 03 c**

Fach: Mathematik (Leistungskurs)

Themen: **Kurvendiskussion; Steckbrief- & Extremwertaufgaben; Produkt-, Quotien- und Kettenregel**

1.) **Ableitungen**

Bilden Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen und vereinfachen Sie die abgeleiteten Terme so weit wie möglich.

a)

$$f(x) = \frac{x\cdot\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)+x\cdot\cos^2(x)+x\cdot\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)\cos(x)+x\cdot\left[\cos^2(x)+\sin^2(x)\right]}{\cos^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)+x}{\cos^2(x)}$$

b)

$$f(x) = \cos^2(x)$$

$$f'(x) = (-2)\cos(x)\sin(x)$$

c)

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$f(x) = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

d)

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

e)

$$f(x) = (3x-1)^{20}$$

$$f'(x) = 60(3x-1)^{19}$$

f)

$$f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\left[2x(x-1)+x^2\right](x-1)^2-2x^2(x-1)^2}{(x-1)^4} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

g)

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{4x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{4x} + 4\sqrt{x} \cdot e^{4x} = e^{4x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}\right)$$

h)

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x - x}$$

$$f'(x) = \frac{2x\left(e^x - x\right) - x^2\left(e^x - 1\right)}{e^x - x}$$

2.) Parameter bei Funktionen

I.) Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = tx^2 + x - \frac{2}{t} \quad mit\ t \neq 0$.

a) Bestimmen Sie t so, dass x = 1 eine Extremstelle der Funktion ist.

$$f_t(x) = tx^2 + x - \frac{2}{t} \quad mit\ t \neq 0$$

$$f_t'(x) = 2tx + 1$$

$$f_t'(1) = 2t + 1 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

b) Um welche Art von Extremstelle handelt es sich?

$$f_t'(x) = 2tx + 1$$

$$f_t''(x) = 2t$$

$$f_t''\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 < 0 \Rightarrow Maximum$$

II.) Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = x^t e^x$.

a) Bestimmen Sie t so, dass x = 1 eine Extremstelle der Funktion ist.

$$f_t(x) = x^t e^x$$

$$f_t'(x) = tx^{t-1}e^x + x^t e^x$$

$$f_t'(1) = te^1 + e^1 \overset{!}{=} 0$$

$$e(t+1) = 0 \Rightarrow t = -1$$

b) Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung gilt: $f_t'(x) = f_t(x) \cdot \left(\frac{t}{x} + 1\right)$

$$f_t(x) = x^t e^x$$

$$f_t'(x) = tx^{t-1}e^x + x^t e^x = x^t e^x \left(\frac{t}{x} + 1\right) = f_t(x)\left(\frac{t}{x} + 1\right)$$

3.) Beweis

Beweisen Sie folgende Behauptung und ermitteln Sie die Vertikalenvorschrift:

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades ohne quadratisches Teil hat alle Wendepunkte auf einer Vertikalen.

Beweis:

$$f(x) = ax^3 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + c$$

$$f''(x) = 6ax \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f'''(x) = 6a \neq 0 \quad weil\ a \neq 0$$

$$W(0/d) \quad mit\ d \in \Re$$

$$\Rightarrow \quad Vertikalenvorschrift: x = 0\ (y-Achse; Ordinate)$$

4.) Ermitteln von Funktionsvorschriften

a) f(x) sei eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit den Nullstellen

$x_1 = 2$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 0$.

Lösung:

$$f(x) = ax(x-2)(x+1) = ax^3 - ax^2 - 2ax$$

Weitere Bedingung: Steigung in x = 1 beträgt 2

$$f'(x) = 3ax^2 - 2ax - 2a$$

$$f'(1) = 3a - 2a - 2a = 2$$

$$\Rightarrow \quad a = -2$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = (-2)x(x-2)(x+1) = (-2)x^3 + 2x^2 + 4x$$

b) f(x) sei eine ganzrationale Funktion 5. Grades und punktsymmetrisch. Sie verläuft durch den Punkt P(-1 / 0,5), hat eine Wendestelle bei $x = \frac{1}{2}$. Die Steigung der Wendetangente beträgt $m = -5{,}1$.

$$f\left(x\right) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

$$Punktsymmetrie: \quad b = d = f = 0$$

$$f'\left(x\right) = 5ax^4 + 3cx^2 + e$$

$$f''\left(x\right) = 20ax^3 + 6cx$$

$$I.) \quad P(-1/0{,}5) \qquad \Rightarrow \qquad 0{,}5 = -a - c - e$$

$$II.) \quad \text{Wendestelle } x = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 0 = \frac{5}{2}a + 3c$$

$$III.) \quad \text{Wendetangente } m = -5{,}1 \qquad \Rightarrow \qquad -5{,}1 = \frac{5}{16}a + \frac{3}{4}c + e$$

$$Lösung: \quad f\left(x\right) = 9{,}6x^5 - 8x^3 - 2{,}1x$$

5.) a) Bestimme a, b $\in \Re$ so, dass die Funktion f mit f(x) $= \frac{x - a}{x^2 + b}$ die Extremstellen x = -3 und x = 2 hat.

Lösung:

$$f'\left(x\right) = \frac{x^2 + b - 2x\left(x - a\right)}{\left(x^2 + b\right)^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 2ax + b = 0$$

$$I.) \quad -9 - 6a + b = 0$$

$$II.) \quad -4 + 4a + b = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2} \quad und \quad b = 6 \quad \Rightarrow \quad f\left(x\right) = \frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + 6}$$

b) Wo hat der Graph von f eine horizontale Tangente?

Lösung:

$$f(x) = \frac{1 + x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x\left(1 + x\right)}{x^4} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = -2$$

$$\Rightarrow \quad L = \{-2\} \; wegen\ Defnitionsbereich$$

c) Wie groß ist die Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0?

$$f(x) = \frac{x-5}{x-1} \qquad \text{bei } x_0 = 2$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{x-5}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{x-1-(x-5)}{(x-1)^2} = \frac{4}{(x-1)^2}$$

$$f'(2) = \frac{4}{1^2} = 4$$

6.) Extremwertberechnung

Die Herstellungskosten einer Kaffeemaschine betragen 22,00 €. Die Marketing-abteilung ermittelt bei einem Verkaufspreis von 45,00 € ein Absatzpotential von 60.000 Geräten.

Wenn der Verkaufspreis um 1 € gesenkt wird, wird ein zusätzlicher Absatz von jeweils 8.000 Geräten prognostiziert.

a) Wie viel Geräte können bei einem Verkaufspreis von 39,00 € abgesetzt werden?

Lösung: $60.000 + 6 \cdot 8.000 = 108.000 \left[Geräte\right]$

b) Stellen Sie eine Funktion auf, die den Gesamtgewinn in Abhängigkeit vom Verkaufspreis angibt.

Lösung: $G(x) = (60.000 + 8.000x)(23 - x)$

c) Wie hoch ist der maximal mögliche Gewinn?

Lösung:

$$G(x) = (60.000 + 8.000x)(23 - x)$$

$$G'(x) = 124.000 - 16.000x \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 7,75$$

$$G''(x) = -16.000 < 0 \quad \Rightarrow \quad Maximum$$

$$G(7,75) = 122.000 \cdot 15,25 = 1.860.500$$

d) Bei welchem Verkaufspreis wird ein Gewinn von 1.000.000,00 € erreicht?

Lösung:

$$G(x) = (60.000 + 8.000x)(23 - x) = 1.000.000$$

$$1.380.000 + 124.000x - 8.000x^2 = 1.000.000 \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 15,5x + 47,5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-15,5 \pm \sqrt{430,25}}{-2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 18,12 \quad \vee \quad x_2 = -2,62$$

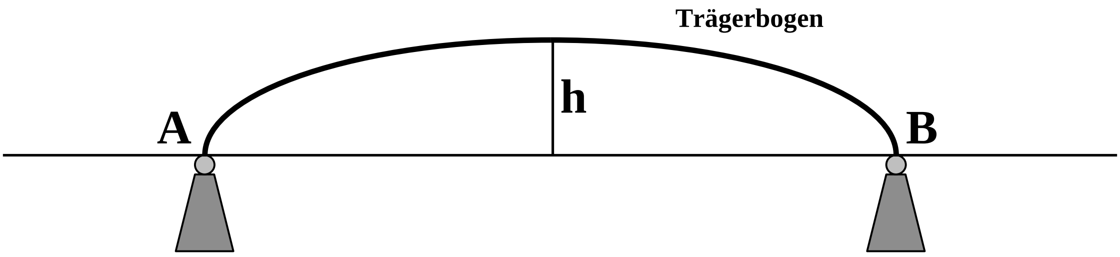
$$neue\,Verkaufspreise: \quad 47,62\text{ €}\ oder\ 26,88\text{ €}\ (beide\ \ fragwürdig!)$$

7.) Mathematische Praxis

Der Trägerbogen einer Eisenbrücke soll so konstruiert werden, dass seine obere Randlinie ein symmetrisches Stück einer Parabel 2. Ordnung ist.

Es sollen $\overline{\text{AB}}$ = 56 m und h = 7 m betragen.

Wie lautet die Funktionsvorschrift für den Trägerbogen.



Lösung:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$Achsensymmetrie: \quad b = 0$$

$$I.) \quad P(28/0) \quad \Rightarrow \quad 784a + c = 0$$

$$II.) \quad P(0/7) \quad \Rightarrow \quad c = 7$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{1}{112} \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{112}x^2 + 7$$

8.) Kurvenuntersuchung einer gebr.-rat. Parameterfunktion

Gegeben ist für k > 0 die Funktionenschar $f_k(x) = \dfrac{k^2}{x^2 + 4k}$

a) Führen Sie eine Kurvenuntersuchung durch, wobei Sie folgende Kriterien berücksichtigen:

(i) Definitionsbereich (ii) Symmetrie

(iii) Nullstellen (iv) Grenzwertverhalten für $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$

Lösung:

(i) Definitionsbereich:

$$D = \Re$$

$$x^2 + 4k = 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = 2\sqrt{-k} \quad \text{nicht definiert wegen k > 0}$$

(ii) Symmetrie:

$$f_k(-x) = \frac{k^2}{(-x)^2 + 4k} = \frac{k^2}{x^2 + 4k} = f_k(x)$$

$$\Rightarrow \quad \textit{Achsensymmetrie}$$

(iii) Nullstellen: wegen k > 0 exisitieren keine Nullstellen

(iv) Grenzwertverhalten: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{k^2}{x^2 + 4k} = 0$

b) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion in Abhängigkeit von k.

Anmerkung: *Benutzen Sie zur Überprüfung der Art der Extrempunkte folgende zweite Ableitung:* $f_k''(x) = \dfrac{6k^2x^2 - 8k^3}{(x^2 + 4k)^3}$

Die erste Ableitung sollten Sie selbst bilden!

Lösung:

$$f_k(x) = \frac{k^2}{x^2 + 4k}$$

$$f_k'(x) = \frac{-2xk^2}{(x^2 + 4k)^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$f_k''(x) = \frac{6k^2x^2 - 8k^3}{(x^2 + 4k)^3}$$

$$f_k''(0) = \frac{-8k^3}{(4k)^3} = -\frac{1}{8} < 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{Maximum}$$

$$Max\left(0 / \frac{k}{4}\right)$$

c) Sie wissen, dass die Extremwerte in Abhängigkeit von k die Koordinate (0 / $\frac{k}{4}$) besitzen.

Oben ist der Graph der Parameterfunktion $f_k(x)$ für drei Werte von k gezeichnet.

Ermitteln Sie die drei k-Werte der gezeichneten Graphen.

Lösung:

$$Wert\,1: \quad \frac{k}{4} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

$$Wert\,2: \quad \frac{k}{4} = \frac{2}{4} \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

$$Wert\,3: \quad \frac{k}{4} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad k = 3$$

d) Es sollte für Sie auch keine großen Probleme bereiten, die Wendepunkte in Abhängigkeit von k zu bestimmen. **Benutzen Sie bitte die unter b) gegebene 2. Ableitung.**

Für die Wendepunkte genügt die notwendige Bedingung.

Lösung:

$$f_k(x) = \frac{k^2}{x^2 + 4k}$$

$$f_k''(x) = \frac{6k^2x^2 - 8k^3}{\left(x^2 + 4k\right)^3} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{4}{3}k \quad \Rightarrow \quad |x| = \frac{2}{3}\sqrt{3k}$$

$$Wendepunkte\left(\frac{2}{3}\sqrt{3k} \,/\, \frac{3}{16}k\right)$$

e) Für k = 3 lauten die Wendepunkte $W_1(2 / \frac{9}{16})$ und $W_2(-2 / \frac{9}{16})$

(i) Warum sind die Funktionswerte der beiden Wendepunkte gleich?

Lösung: **Wegen der Achsensymmetrie.**

(ii) Berechnen Sie die Wendetangente und die Wendenormale von W_1.

Lösung:

$$f_k(x) = \frac{k^2}{x^2 + 4k}$$

$$f_3'(2) \quad = \quad \frac{-36}{256} \qquad \Rightarrow \quad m_t = -\frac{9}{64} \quad und \quad m_n = \frac{64}{9}$$

$Tangente:$

$$\frac{9}{16} = \left(-\frac{9}{64}\right) \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{27}{32} \quad \Rightarrow \quad t(x) = \left(-\frac{9}{64}\right)x + \frac{27}{32}$$

$Normale:$

$$\frac{9}{16} = \frac{64}{9} \cdot 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = -13\frac{95}{144} \quad \Rightarrow \quad n(x) = \frac{64}{9}x - 13\frac{95}{144}$$

f) Zeichnen Sie ein Dreieck mit den beiden Wendepunkten W_1(2 / f_3(2)) und W_2(-2 / f_3(-2)) und dem Ursprung als jeweilige Eckpunkte in die obige Graphik ein.

(i) Berechnen Sie die Fläche dieses Dreiecks.

Lösung: $A_V = \frac{1}{2}gh \quad \Rightarrow \quad A_V = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16} \cdot 4 = \frac{9}{8}$

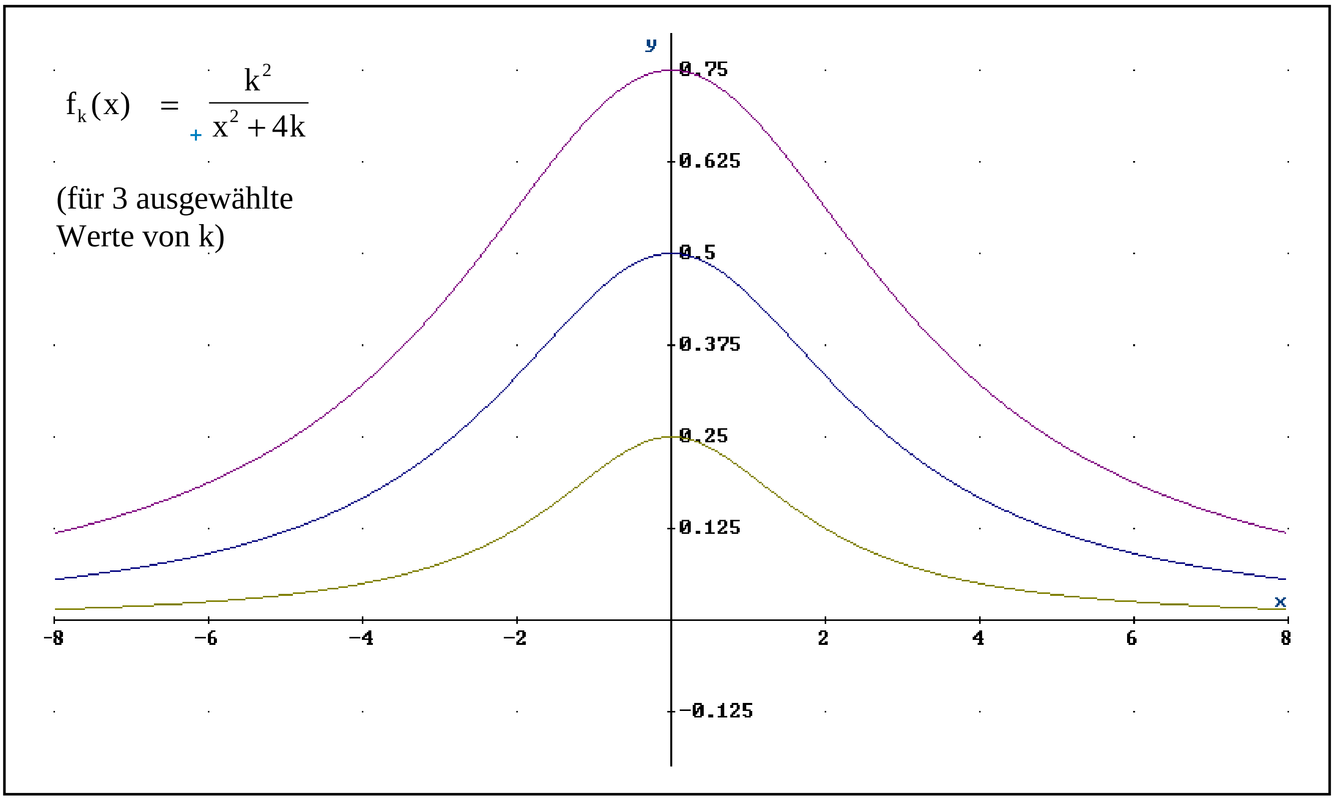
(ii) Geben Sie eine von x abhängige Dreieckflächenfunktion mit den Eckpunkten E_1 (x / f_3(x)) , E_2(-x / f_3(-x)) und dem Ursprung an.

Lösung:

$$A_V = \frac{1}{2}gh$$

$$\Rightarrow \quad A_V = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{9}{x^2 + 12}$$

$$\Rightarrow \quad A_V = \frac{9x}{x^2 + 12}$$


$f_k(x) = \frac{k^2}{x^2 + 4k}$
(für 3 ausgewählte
Werte von k)
y
0.75
0.625
0.5
0.375
0.25
0.125
-0.125
x
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8