11. Jgst. **2. Test** **Datum: 07.06.2004**

Klasse: GY 03 b **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Themen: **Differentialrechnung und Kurvendiskussion**

1.) Bilden Sie die erste Ableitung zu den folgenden Funktionen:

a) $f(t) = 2x^2t + t^2 \xrightarrow{f'(t)} f'(t) = 2x^2 + 2t$

b) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \xrightarrow{f'(x)} f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x} = x + 3 - \frac{1}{x}$

$\xrightarrow{f'(x)} f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 2x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$

$\xrightarrow{f'(x)} f'(x) = -x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

e) $f(x) = \frac{1}{3}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + 2x - 1$

$\xrightarrow{f'(x)} f'(x) = 2x^5 - 2x^4 + 2$

2.) Führen Sie bei der Funktion f(x) mit

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

eine Kurvendiskussion durch, indem Sie folgende Bereiche bearbeiten:

a) **Definitionsbereich:** $D = \Re$

b) **Symmetrie:** keine, da gilt: $f(-x) \neq f(x)$ *und* $f(-x) \neq -f(x)$

c) **Nullstellen:**

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \overset{!}{=} 0$$

$$x\left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow N(0 \mid 0)$$

$$\Rightarrow x_2 = 3\,(doppelt) \Rightarrow N(3 \mid 0)$$

d) **Extremwerte**

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \overset{!}{=} 0$$

$$f''(x) = 2x - 4$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ f''(1) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow Max\left(1 \mid \frac{4}{3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = 3 \\ f''(3) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow Min(3 \mid 0)$$

e) **Wendepunkte**

$$f''(x) = 2x - 4 \overset{!}{=} 0$$

$$f'''(x) = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ f'''(2) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow W\left(2 \mid \frac{2}{3}\right)$$

f) **Grenzwerte für** $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right) = -\infty$$

g) **Tangente im Punkt** $W\left(2 \left| \frac{2}{3}\right.\right)$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

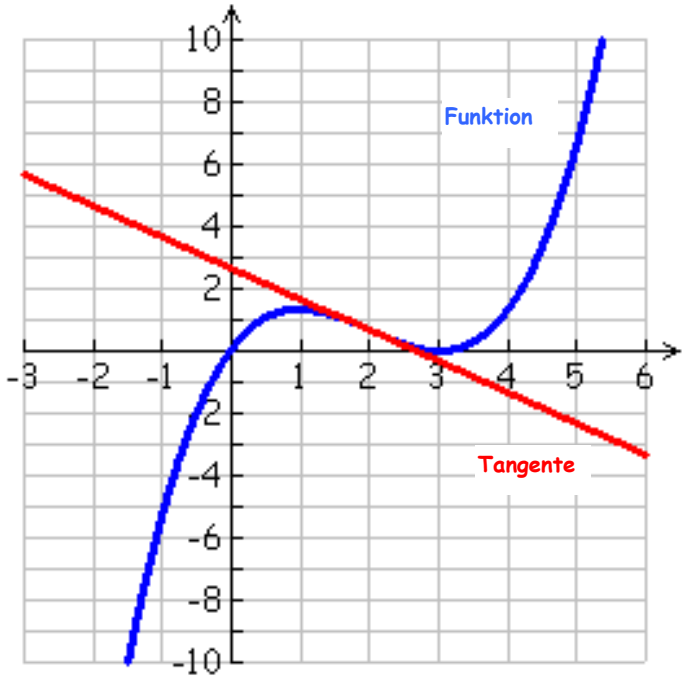
$$f'(2) = 4 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 = m$$

$$\frac{2}{3} = (-1) \cdot 2 + b$$

$$b = \frac{8}{3}$$

$$t(x) = -x + \frac{8}{3}$$

h) **Zeichnung**



3.) Erläutern Sie:

a) Wie lautet das notwendige Kriterium für das **Maximum** einer Funktion?

$$f'(x_0) = 0$$

b) Wie lautet das hinreichende Kriterium für das **Minimum** einer Funktion?

$$f'(x_0) = 0 \quad und \quad f''(x_0) > 0$$

c) Wie bestimmen Sie ein **Maximum**, wenn das „normale" hinreichende Kriterium nicht zum Teil nicht „funktioniert"?:

Vorzeichenwechselkriterium:

$$f'(x_0 - \varepsilon) > 0 \quad und \quad f'(x_0 + \varepsilon) < 0$$

d) Worin liegt der Unterschied zwischen dem absoluten und relativen **Minimum** einer Funktion? Mit Beispielgraph!

Das relative Minimum ist ein Tiefpunkt für eine Umgebung von $f(x_0)$, während das absolute Minimum ein Tiefpunkt für die gesamte Funktion darstellt: $f(x_0) < f(x)$

4.) Bestimmen Sie bei den Funktionen die Monotonieintervalle:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

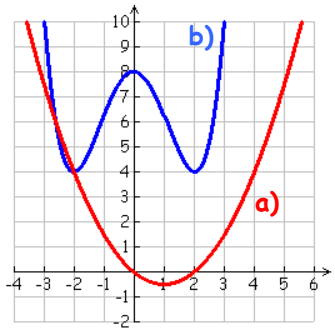
$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \xrightarrow{1.Ableitung} f'(x) = x - 1 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

Intervall 1: $]-\infty ; 1[$ streng monoton fallend

Intervall 2: $]1 ; \infty[$ streng monoton steigend

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 8$



$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 8$$

$$\xrightarrow{1.\,Ableitung} f'(x) = x^3 - 4x \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 2$$

$$\Rightarrow x_3 = -2$$

Intervall 1: $]-\infty;-2[$ streng monoton fallend

Intervall 2: $]-2;0[$ streng monoton steigend

Intervall 3: $]0;2[$ streng monoton fallend

Intervall 4: $]2;\infty[$ streng monoton steigend

6.) Ach nein, jetzt sind hier nur Informationen zur Funktion gegeben.

Ermitteln Sie die jeweilige Ursprungsfunktion.

a) $f'(x) = 2x^3 - x^2 \xrightarrow{Funktion} f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + c$

b) $f''(x) = 3x + 1$ und eine Nullstelle von f(x) bei x = 0.

$$f''(x) = 3x + 1 \xrightarrow{1.\,Ableitung} f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + x$$

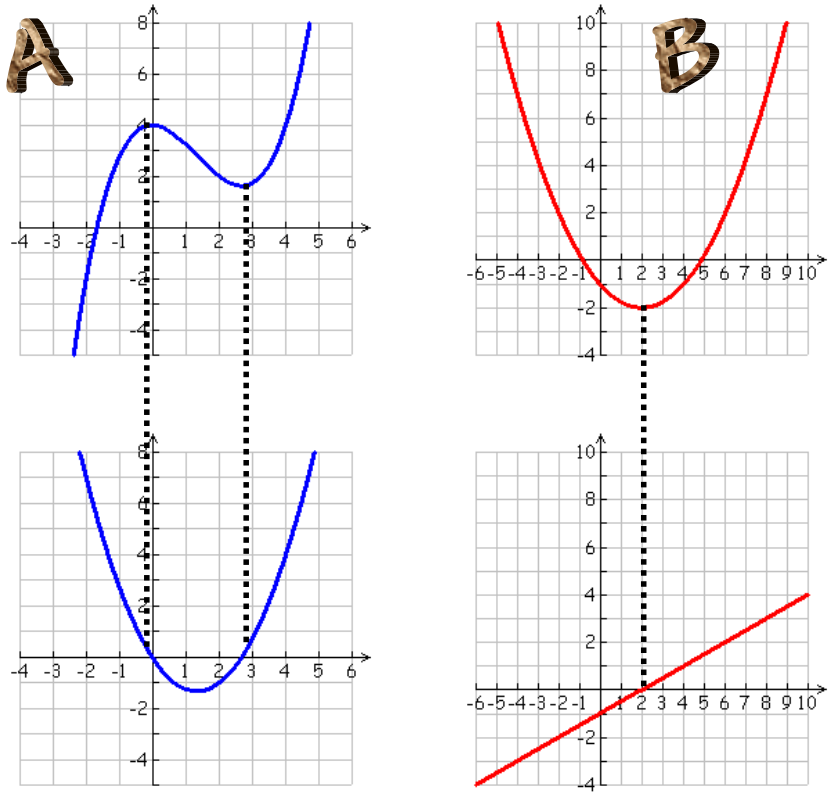
$$\xrightarrow{Funktion} f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 (+cx)$$

c) Relative Extremstellen bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$.

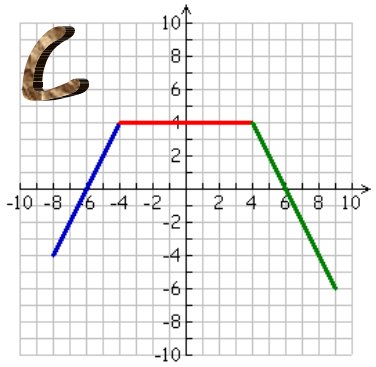
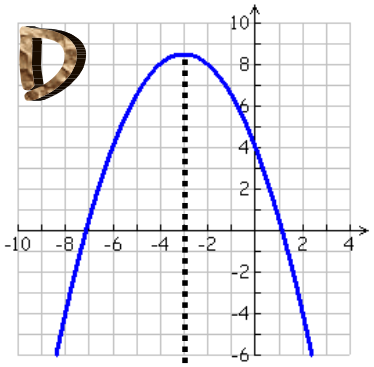
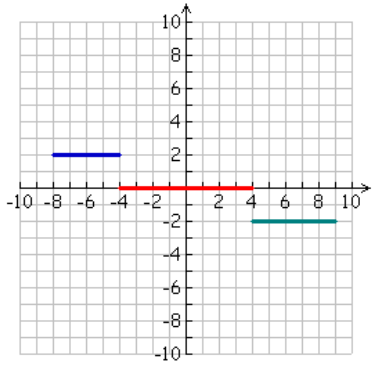
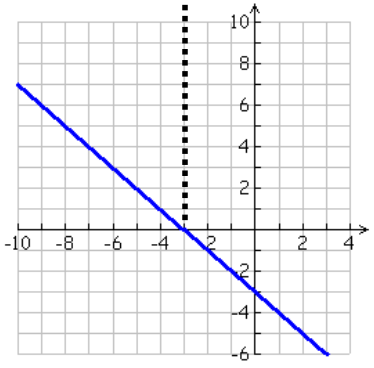
$$f'(x) = (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$$

$$\xrightarrow{Funktion} f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$$

5.) Skizzieren Sie den Graph der ersten Ableitung zu den gegebenen Funktionen durch eine grafische Herleitung mittels geeigneter Punkte:



C



D