Musterlösung GY 03 b 3. Kursarbeit vom 20.01.2004

Themen: **Funktionen, Wurzel- und Exponentialfunktionen**

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Definitionsmengen folgender Wurzelfunktionen

a) $f(x) = \sqrt{x-4} \Rightarrow D=[4;\infty[$

b) $f(x) = \sqrt{x^3-1} \Rightarrow D=[1;\infty[$

c) $f(x) = \sqrt{x^2-9} \Rightarrow D=]-\infty;-3]\cup[3;\infty[\quad oder \quad D=\Re\setminus]-3;3[$

d) $f(x) = \sqrt{25-x^2} \Rightarrow D=[-5;5]$

e) $f(x) = \sqrt{x^2+2} \Rightarrow D=\Re$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Wurzelfunktion

$f(x)=\sqrt{b+ax}$ die durch die Punkte $N\left(-\frac{4}{3}\,\middle|\,0\right)$ und $A(-4\mid 2)$

verläuft.

$$I.)\quad 0=\sqrt{b-\frac{4}{3}a} \quad und \quad II.)\quad 2=\sqrt{b-4a}$$

$$Ergebnis:\quad f(x) = \sqrt{-2-\frac{3}{2}x}$$

Aufgabe 3: Ermitteln Sie Nullstellen folgender Funktionen:

a) $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D=\Re_0^+$
$Nullstelle:\ N(0\mid 0)$

b) $g(x) = 2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow D=[-1;1]$
$Nullstelle:\ N_1(-1\mid 0) \vee N_2(1\mid 0)$

c) $k(x) = x\sqrt{1-x} \Rightarrow D=[-\infty;1]$
$Nullstelle:\ N_1(0\mid 0) \vee N_2(1\mid 0)$

Aufgabe 4: Ermitteln Sie die Schnittpunkte zwischen den Funktionen

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2\sqrt{1-x}$ und $k(x) = x\sqrt{1-x}$

Voraussetzung: Ermittlung der Defintionsmengen

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow D_f=\Re_0^+$$
$$g(x) = 2\sqrt{1-x} \Rightarrow D_g=]-\infty;1]$$
$$k(x) = x\sqrt{1-x} \Rightarrow D_k=]-\infty;1]$$

Ermittlung der Schnittpunkte:

(1) $f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = 2\sqrt{1-x}$
$\Rightarrow S\left(\frac{4}{5}\,\middle|\,\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$

(2) $f(x) = k(x) \Rightarrow \sqrt{x} = x\sqrt{1-x}$
$\Rightarrow S(0\mid 0)$

(3) $g(x) = k(x) \Rightarrow 2\sqrt{1-x} = x\sqrt{1-x}$
$\Rightarrow S(1\mid 0);$
$Lösung\ x=2\notin D_g\ und\ x=2\notin D_f\ ergibt\ keinen\ Schnittpunkt.$

Aufgabe 5: Lösen Sie folgende Wurzelgleichungen:

a) $\sqrt{3x-5} = 2 \Rightarrow x=3 \xrightarrow{\text{Probe}} L = \{3\}$

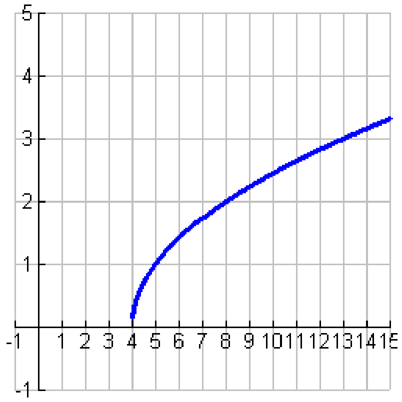
b) $4\sqrt{2-x}+8 = 4x \Rightarrow x_1=1 \vee x_2=2 \xrightarrow{\text{Probe}} L = \{2\}$

c) $x+1 = \sqrt{6-2x} \Rightarrow x_1=-5 \vee x_2=1 \xrightarrow{\text{Probe}} L = \{1\}$

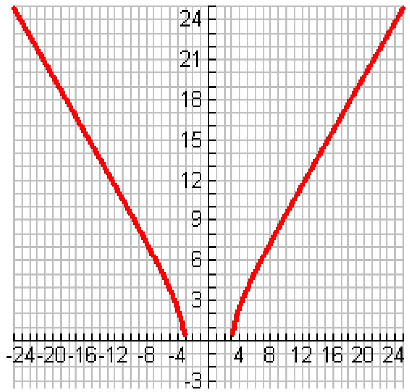
d) $x-2\sqrt{x}-3 = 0 \xrightarrow[Subst.:\sqrt{x}=a]{} x_1=9 \xrightarrow{\text{Probe}} L = \{9\}$

Aufgabe 6: Skizzieren Sie folgende Funktionen:

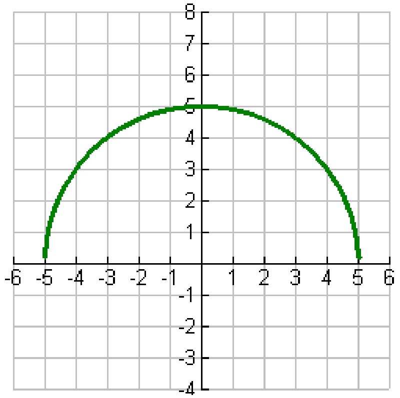
a) $f(x) = \sqrt{x-4}$



b) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$



c) $f(x) = \sqrt{25-x^2}$



Aufgabe 7: Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{x-1}$.

a) Die Gerade $y = \frac{1}{2}x$ berührt f(x) im Punkt K. Ermitteln Sie diesen Punkt.

$$\sqrt{x-1} = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 2 \xrightarrow[\text{eingesetzt}]{} S(2 \mid 1)$$

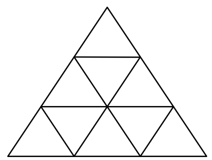
b) Welche Ursprungsgerade schneidet f(x) in $S(5 \mid f(5))$?

$$2 = m \cdot 5 \Rightarrow m = \frac{2}{5} \xrightarrow[\text{eingesetzt}]{} y = \frac{2}{5} \cdot x$$

c) Zeigen Sie: **Die Gerade** $t(x) = m(x-1)$ **mit m > 0 schneidet f in genau zwei Punkten.** (Ermitteln Sie die beiden Punkte.)

$$m(x-1) = \sqrt{x-1}$$
$$m^2(x^2-2x+1) = x-1$$
$$m^2x^2 + x(-2m^2-1) + m^2 + 1 = 0$$
$$x_{1/2} = \frac{2m^2+1 \pm 1}{2m^2}$$
$$x_1 = 1 \Rightarrow S(1 \mid 0)$$
$$x_2 = \frac{m^2+1}{m^2}$$
$$\xrightarrow[\text{in } \sqrt{x-1}]{} \sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}-1} = \frac{1}{m}$$
$$\xrightarrow[\text{in } m(x-1)]{} m \cdot \left(\frac{m^2+1}{m^2}-1\right) = m \cdot \frac{1}{m^2} \underset{\text{wenn } m>0}{=} \frac{1}{m}$$
$$\Rightarrow S\left(\frac{m^2+1}{m^2} \,\middle|\, \frac{1}{m}\right) \quad q.e.d.$$

Aufgabe 8: Der Erfinder des Spiels „Knödel frei" hatte folgenden Wunsch:



Er wünschte sich die Menge an Cents, die sich auf einem Dreiecksbrett ergäbe, wenn man auf das erste Feld 1 Cent, auf das zweite 3 Cents, auf das dritte 9 Cents, ..., also auf jedes Feld immer dreimal soviel Cents legt wie auf das vorhergehende.

a) Veranschaulichen Sie den Centbetrag je Feld anhand einer Wertetabelle für die ersten 7 Felder.

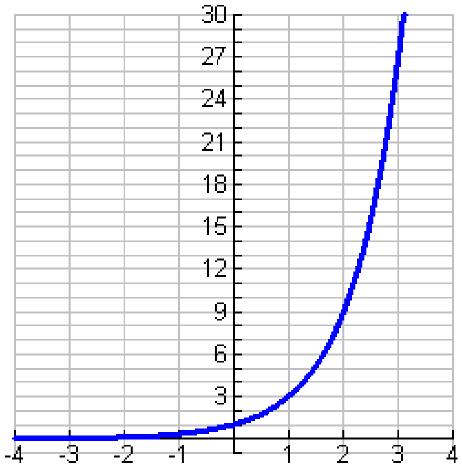
n	1	2	3	4	5	6	7
f(n)	1	3	9	27	81	243	729

b) Geben Sie ein allgemeines Bildungsgesetz für den Centbetrag je Feld an.

$$f(n) = 3^{n-1}$$

c) Erstellen Sie eine Wertetabelle und zeichnen den Graph der Funktion $f(x) = 3^x$ in den Grenzen $[-3;3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27



ZUSATZAUFGABE

Aufgabe 9: Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen:

a) $4^x = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3 \xrightarrow[\text{Expo-Vergl.}]{} x = 3$

b) $4^x = \frac{1}{16} \Rightarrow 4^x = 4^{-2} \xrightarrow[\text{Expo-Vergl.}]{} x = -2$

c) $4^x = 2 \Rightarrow 4^x = 4^{0,5} \xrightarrow[\text{Expo-Vergl.}]{} x = 0,5$

d) $4^{x-2} = 16 \Rightarrow 4^{x-2} = 4^2 \xrightarrow[\text{Expo-Vergl.}]{} x = 4$

e) $2 \cdot 4^{2x} = 32 \Rightarrow 4^x = 16 \Rightarrow 4^x = 4^2 \xrightarrow[\text{Expo-Vergl.}]{} x = 2$

f) $4^{3x-2} = 256 \Rightarrow 4^{3x-2} = 4^4 \Rightarrow 3x-2 = 4 \xrightarrow[\text{Expo-Vergl.}]{} x = 2$