

Kursarbeit GY 03 b vom 17.10.2003

Themen: Funktionen, Lineare  
Funktionen und Anwendungen

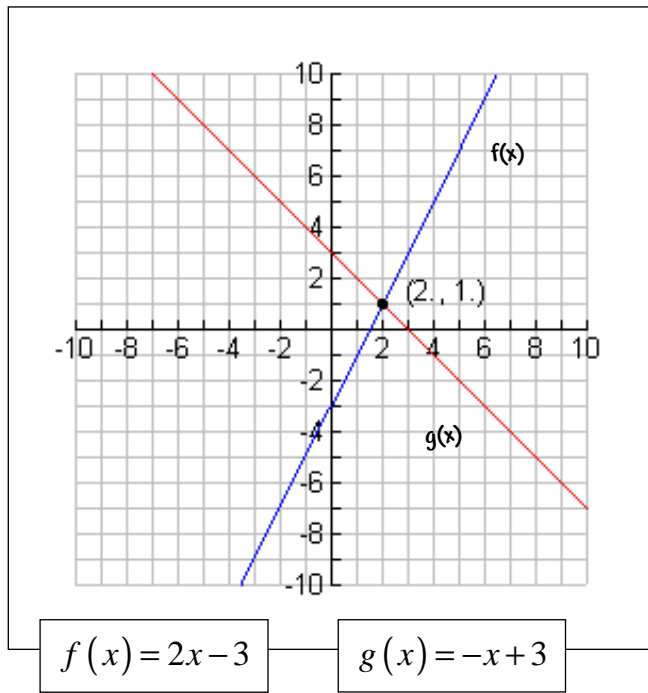
Aufgabe 1: Beurteilen Sie ob die jeweiligen Graphen bzw. Darstellungen  
eine Funktion bilden oder nicht.

=> **Anlage 1**

Aufgabe 2: Welcher Funktionsgraph passt?

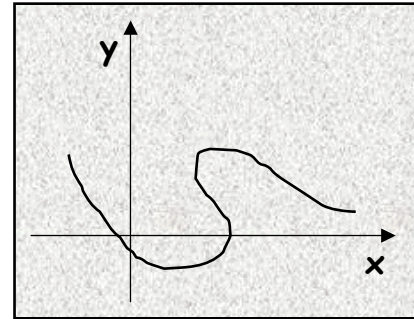
=> **Anlage 2**

Aufgabe 3: Ermitteln Sie die Funktionsvorschriften der beiden linearen Funktionen

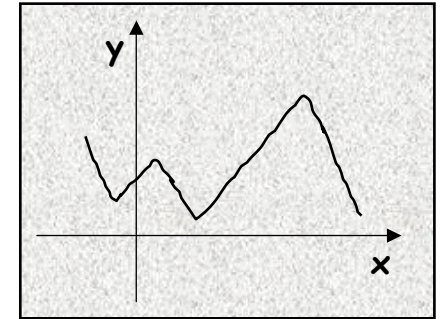


Lösung durch Ablesen des Achsenabschnitts der y-Achse und der Steigung.

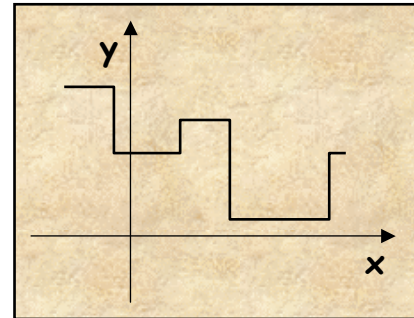
Anlage zu Aufgabe 1:



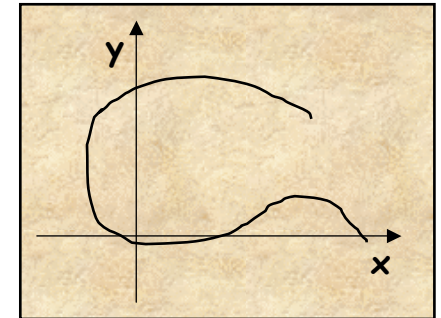
Funktion:  Ja  Nein



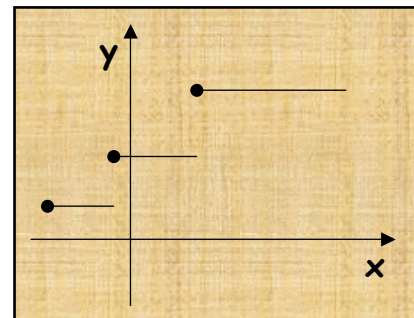
Funktion:  Ja  Nein



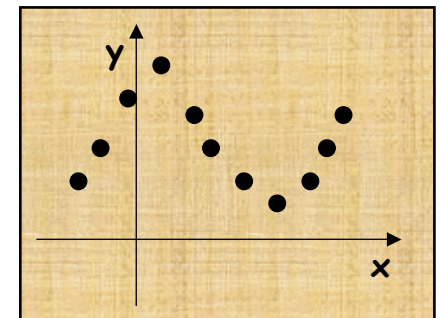
Funktion:  Ja  Nein



Funktion:  Ja  Nein

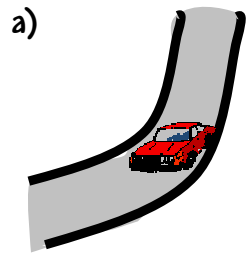


Funktion:  Ja  Nein

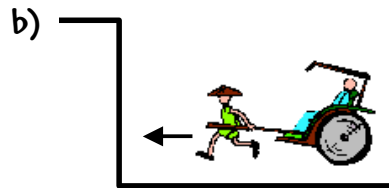
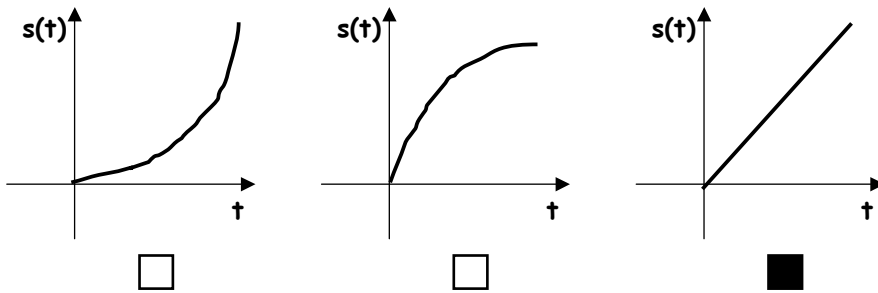


Funktion:  Ja  Nein

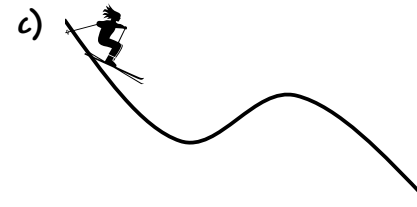
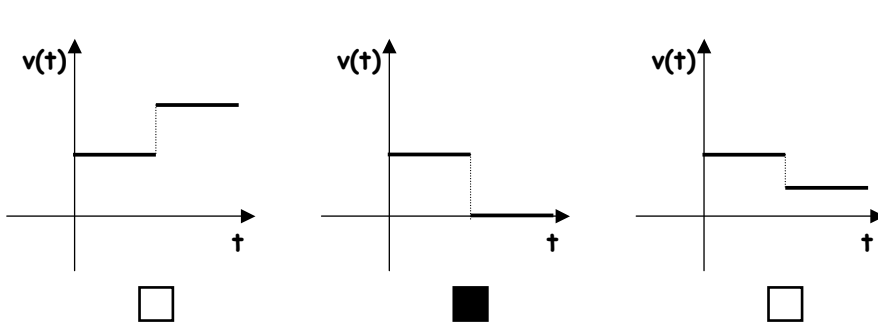
**Anlage zu Aufgabe 2:**



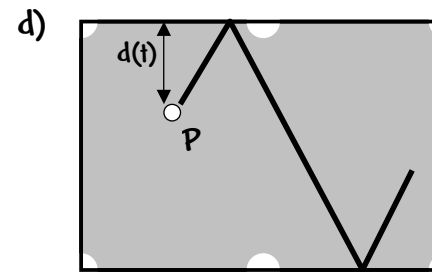
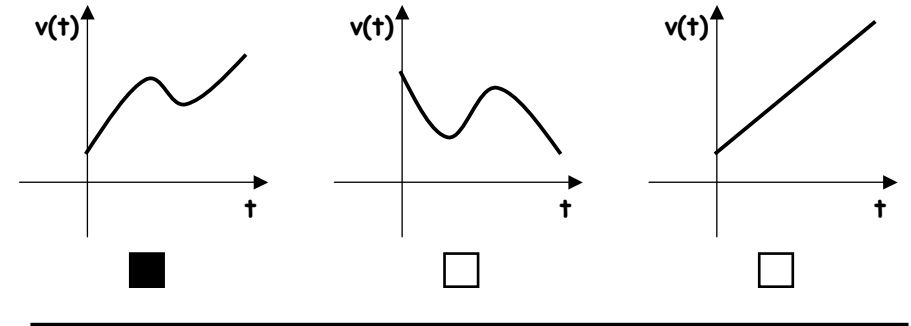
a) Das Auto bewegt sich mit gleich bleibender Geschwindigkeit. Der Funktionswert  $s(t)$  gibt den zurückgelegten Weg zum Zeitpunkt  $t$  an.



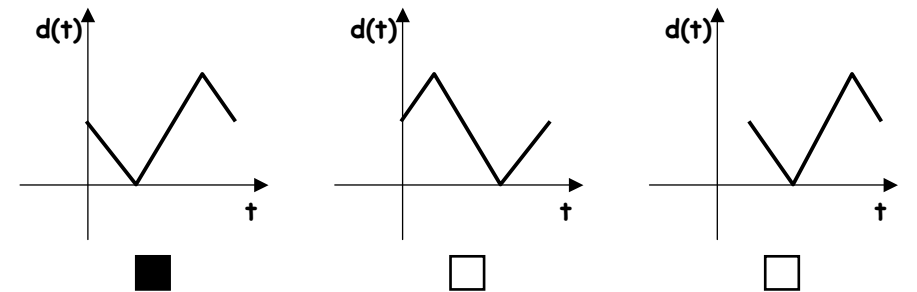
b) Der Rikscha-Fahrer läuft in die angegebene Richtung. Der Funktionswert  $v(t)$  gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  an.



c) Der Skifahrer fährt den Hang hinunter. Der Funktionswert  $v(t)$  gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  an.



d) Vom Punkt P aus wird eine Billardkugel längs der angegebenen Bahn geschossen. Der Funktionswert  $d(t)$  gibt den Abstand vom oberen Rand der Tischfläche an.



**Aufgabe 4:** Sind die Funktionen gleich oder ungleich? **Begründen** Sie Ihre Entscheidungen!

$$a) \quad f(x) = x^2 + 1 \quad g(t) = \frac{t^3 + t}{t}$$

Die beiden Funktionen sind ungleich, weil  $g(t)$  nicht für den Wert  $t = 0$  definiert ist.

$$b) \quad f(x) = (x-1)(x+1) \quad g(t) = t^2 - 1$$

Die beiden Funktionen sind gleich (3. Binomische Formel).

$$c) \quad f(x) = \frac{x}{x^2 - x} \quad g(t) = \frac{t^2}{t^4 - t^2}$$

Die beiden Funktionen sind ungleich, weil

⇒ sich die Funktionsvorschriften unterscheiden und

⇒ die beiden Definitionsmengen  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$  und  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$  unterschiedlich sind.

**Aufgabe 5:** Rekursiv definierte Funktionen

a) Berechnen Sie die Funktionswerte  $f(n)$  für  $n \in [1; 5]$

$$(i) \quad f(0) = 1; \quad f(n) = 2 * f(n-1)$$

$$(ii) \quad f(0) = 1; \quad f(n) = n * f(n-1)$$

n	0	1	2	3	4	5
(i) f(n)	1	2	4	8	16	32
(ii) f(n)	1	1	2	6	24	120

b) Geben Sie für (i) eine explizite Funktionsgleichung an.

$$(i) \quad f(n) = 2^n$$

**Aufgabe 6:** Gegeben sei die Funktion  $f(x)$  mit der Vorschrift  $f(x) = 3^x$ .

a) Berechnen Sie  $f(4)$ ,  $f(-2)$  und  $f(-1/4)$ .

$$f(4) = 3^4 = 81 \quad f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9} \quad f\left(-\frac{1}{4}\right) = 3^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = 0,7598$$

b) Für welche  $x \in \mathfrak{R}$  gilt:  $f(x) = 2.187$ ?

$$\begin{aligned} 3^x &= 2187 \\ 3^x &= 3^7 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

c) Für welche  $x \in \mathbb{N}$  gilt:  $f(x) \leq 7.000$ ?

$$\begin{aligned} 3^x &= 7000 \\ \log(3^x) &= \log(7000) \\ x * \log(3) &= \log(7000) \\ x &= \frac{\log(7000)}{\log(3)} \\ x &= 8,0589 \\ x &= 8 \quad \text{wegen } x \text{ aus Menge } \mathbb{N}. \end{aligned}$$

d) **Beweisen Sie folgende Behauptungen:**

$$(i) \quad f(x) * f(-x) = 1 \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

*Beweis (i):*

$$\text{Beh.: } f(x) * f(-x) = 1 \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

$$\text{Bew.: } f(x) * f(-x) = 3^x * 3^{-x} = 3^0 = 1$$

*q.e.d.*

$$(ii) \quad f(x+1) = 3 * f(x) \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

*Beweis (ii):*

$$\text{Beh.: } f(x+1) = 3 * f(x) \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

$$\text{Bew.: } f(x+1) = 3^{x+1} = 3^x * 3 = 3 * f(x)$$

*q.e.d.*

**Aufgabe 7:** Bestimmen Sie die Geradengleichungen, wenn folgende Größen bekannt sind:

a) A (2 / 1) B (8 / 5)

$$\begin{aligned}
 I.) \quad & 1 = 2m + b \\
 II.) \quad & 5 = 8m + b \\
 \hline
 II.) - I.) \quad & 4 = 6m \\
 & m = \frac{2}{3} \\
 & m \text{ eingesetzt in I.)} \\
 & 1 = 2 * \frac{2}{3} + b \\
 & b = -\frac{1}{3} \\
 & g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

b) A (2 / 4) m = -2

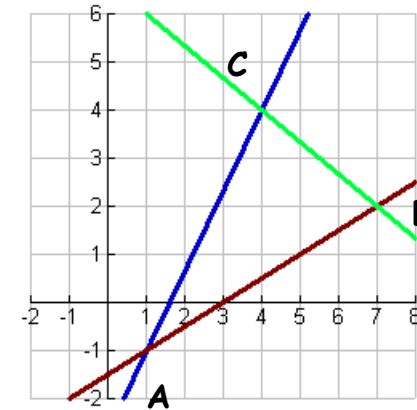
c) A (1 / 1) Steigungswinkel:  $\alpha = 45^\circ$

$$\begin{aligned}
 4 &= (-2) * 2 + b \\
 b &= 8 \\
 g(x) &= (-2)x + 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha = 45^\circ &\Rightarrow \tan(\alpha) = 1 = m \\
 1 &= 1 * 1 + b \\
 b &= 0 \\
 g(x) &= x
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 8:**

a) Prüfen Sie, ob das Dreieck in C einen rechten Winkel besitzt.



$$\left. \begin{aligned}
 m_{AC} &= \frac{4 - (-1)}{4 - 1} = \frac{5}{3} \\
 m_{BC} &= \frac{4 - 2}{4 - 7} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned} \right\} m_{AC} * m_{BC} = \frac{5}{3} * \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{10}{9}\right) \neq -1$$

**Im Punkt C existiert kein rechter Winkel.**

b) Wie lang ist die Strecke  $\overline{AB}$  ?

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(7-1)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} \approx 6,7$$

c) Konstruieren Sie den Umkreismittelpunkt und den Umkreis des Dreiecks.

d) Beschreiben Sie die notwendigen Rechenschritte zur Ermittlung des Umkreismittelpunktes.

- ⇒ **Ermittlung der Mittelpunkte der Dreieckseiten**
- ⇒ **Bildung der Senkrechten durch die Mittelpunkte (Mittelsenkrechten) mit Hilfe der Normalensteigung zu den Steigungen der Dreieckseiten**
- ⇒ **Berechnung des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten**

### Berechnung des Umkreismittelpunktes und der Fläche des Umkreises:

Schritt 1: Ermittlung der Funktionsgleichung von zwei Mittelsenkrechten

Mittelsenkrechte auf  $\overline{AC}$

$$\text{Steigung: } m_{AC} = \frac{5}{3} \rightarrow m_{AC\perp} = -\frac{3}{5}$$

Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AC}$ :

$$\left. \begin{array}{l} x\text{-Wert} = \frac{1}{2}(4+1) = 2,5 \\ y\text{-Wert} = \frac{1}{2}(4+(-1)) = 1,5 \end{array} \right\} M_{\overline{AC}} (2,5 / 1,5)$$

Funktionsgleichung der Mittelsenkrechten auf  $\overline{AC}$ :

$$1,5 = -\frac{3}{5} * 2,5 + b$$

$$1,5 = -\frac{3}{5} * \frac{5}{2} + b$$

$$\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} + b$$

$$3 = b$$

$$g_{M_{\overline{AC\perp}}}(x) = -\frac{3}{5}x + 3$$

Mittelsenkrechte auf  $\overline{BC}$

$$\text{Steigung: } m_{BC} = -\frac{2}{3} \rightarrow m_{BC\perp} = \frac{3}{2}$$

Mittelpunkt der Strecke  $\overline{BC}$ :

$$\left. \begin{array}{l} x\text{-Wert} = \frac{1}{2}(7+4) = 5,5 \\ y\text{-Wert} = \frac{1}{2}(2+4) = 3 \end{array} \right\} M_{\overline{BC}} (5,5 / 3)$$

Funktionsgleichung der Mittelsenkrechten auf  $\overline{BC}$ :

$$3 = \frac{3}{2} * 5,5 + b$$

$$3 = \frac{3}{2} * \frac{11}{2} + b$$

$$3 = \frac{33}{4} + b$$

$$b = -\frac{21}{4}$$

$$g_{M_{\overline{BC\perp}}}(x) = \frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$$

Schritt 2: Ermittlung des Umkreismittelpunktes durch Gleichsetzen der beiden

Mittelsenkrechten

$$g_{M_{AC1}}(x) = g_{M_{BC1}}(x)$$

$$-\frac{3}{5}x + 3 = \frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$$

$$\left(-\frac{6}{10} - \frac{15}{10}\right)x = -\frac{12}{4} - \frac{21}{4}$$

$$-\frac{21}{10}x = -\frac{33}{4}$$

$$x = \frac{55}{14}$$

$$y = \frac{9}{14}$$

$$\text{Umkreismittelpunkt: } U_M \left( \frac{55}{14} / \frac{9}{14} \right)$$

$$\text{Umkreismittelpunkt: } U_M (3,93 / 0,64)$$

Schritt 3: Berechnung der Fläche des Umkreises

*Radius:*

$$|\overline{UA}| = |\overline{UB}| = |\overline{UC}|$$

$$|\overline{UA}| = \sqrt{\left(\frac{55}{14} - 1\right)^2 + \left(\frac{9}{14} + 1\right)^2}$$

$$|\overline{UA}| = \sqrt{2,929^2 + 1,643^2}$$

$$|\overline{UA}| = \sqrt{11,276}$$

$$|\overline{UA}| = 3,358$$

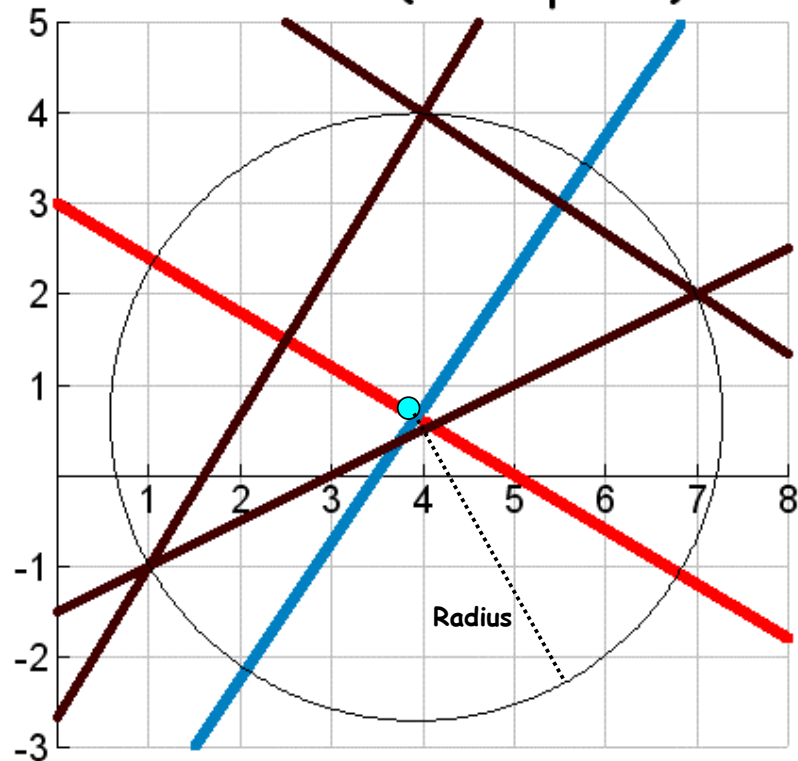
*Fläche:*

$$A = r^2 \pi$$

$$A = 3,358^2 \pi$$

$$A = 35,423 \text{ [cm}^2 \text{]}$$

## Umkreis(mittelpunkt)



### Aufgabe 9: Tarifvergleich bei zwei Fahrschulen

Fahrschule Knödelmax: Grundgebühr 250,00 €; KostenFahrstunde: 30,00 €  
 Fahrschule Raffgier: Tarife konnte man leider keine erhalten, allerdings hat ein Fahrschüler folgendes gesagt:

„Ich habe 20 Fahrstunden genommen, dadurch hat mein Führerschein (ohne Prüfungsgebühren) 1.100,00 € gekostet. Hätte ich zwei Fahrstunden weniger gebraucht, hätte ich nur 1.000,00 € bezahlen müssen.“



- Wie lautet die lineare Kostenfunktion bei Fahrschule Knödelmax?
- Wie hoch sind die Grundgebühren bei Fahrschule Raffgier?
- Zeichnen Sie die beiden Kostenfunktionen in ein Koordinatensystem, wobei die Anzahl der Fahrstunden auf der x-Achse abgelesen werden sollen.

- Bei wie viel Fahrstunden ist die Fahrschule Raffgier günstiger als die Fahrschule Knödelmax? Berechnung erwünscht mit Ergebnis als Intervall!

### Lösungen:

Kosten pro Fahrstunde

Grundgebühr

Zu a)  $f(x) = 30x + 250$

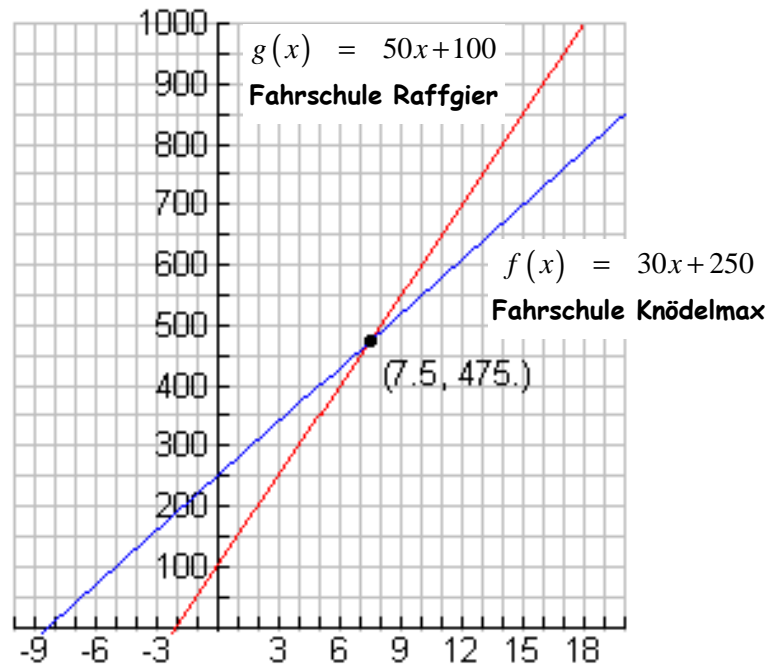
Zu b) Grundgebühr: 100,00 €

Herleitung:  $1.100,00 - 1.000,00 = 100,00 €$

100 € entsprechen 2 Fahrstunden => 50 € pro Fahrstunde

20 Fahrstunden kosten 1.000,00 €, da er 1.100,00€ zahlen musste, beträgt die Grundgebühr hiermit 100,00 €.

Zu c) und d)



$$30x + 250 = 50x + 100$$

$$20x = 150$$

$$x = 7,5 \text{ [Fahrstunden]}$$

*Ergebnis:*

$[0; 7]$  Fahrstunden Fahrschule Raffgier

$[8; \infty]$  Fahrstunden Fahrschule Knödel max

Anlage zu Aufgabe 5 a)

```

D:\Arbeit_Mathematik\rekursiv1.exe
Geben Sie die Anzahl der Werte ein, die berechnet werden sollen. 5
Zahl n = 0 : 1
Zahl n = 1 : 2
Zahl n = 2 : 4
Zahl n = 3 : 8
Zahl n = 4 : 16
Zahl n = 5 : 32
Zahl n = 0 : 1
Zahl n = 1 : 1
Zahl n = 2 : 2
Zahl n = 3 : 6
Zahl n = 4 : 24
Zahl n = 5 : 120
Wollen Sie eine weitere Anzahl eingeben? <J>a oder <N>ein?

```

//Quellcode zu rekursiv definierte Funktionen

```

#include <iostream.h>
#include <stdio.h>
#include <ctype.h>

int main()
{
    int i, start, anzahl, ziffer1, ziffer2;
    char antwort;

    do
    {
        cout << "\nGeben Sie die Anzahl der Werte ein, die berechnet werden sollen.!\n";
        cin >> anzahl;
        ziffer1=1, ziffer2=1;
        cout << "\n";
        for(i=0; i<=anzahl; i++)
        {
            cout << "\tZahl n = " << i << " : " << ziffer1 << "\n";
            ziffer1 = 2*ziffer1;
        }
        cout << "\n";
        for(i=0; i<=anzahl; i++)
        {
            cout << "\tZahl n = " << i << " : " << ziffer2 << "\n";
            ziffer2 = (i+1)*ziffer2;
        }
        cout << "\n\nWollen Sie eine weitere Anzahl eingeben? (J)a oder (N)ein?";
        cin >> antwort;
        antwort = toupper(antwort);
    }
    while (antwort=='J');
    cout << "Und tschuess ...";
    cin.ignore();
    getch();
    return 0;
}

```