Musterlösung: **5. Kursarbeit** **11. Jgst.** **Datum: 27.04.2004**

Klasse: GY 03 b **Fach: Mathematik (Kernfach)**

Themen: **Trigonometrische Funktionen, Binomischer Lehrsatz & Differentialrechnung**

Aufgabe 1: Definieren Sie den Sinus und den Kosinus des Winkels α.

$$\text{sinus}(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \text{cosinus}(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie die folgenden gesuchten Werte:

$a)\ \sin(60) = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866$

$b)\ \cos(30) = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}866$

$c)\ \tan(45) = 1$

$d)\ \sin(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}5234 \quad oder \quad \alpha = 30$

$\quad Bogenmaß: x = \frac{\alpha\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$

$e)\ \cos(x) = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \arccos\left(\frac{1}{4}\right) = 1{,}3181 \quad oder \quad \alpha = 75{,}52$

$f)\ \tan(x) = 2 \Rightarrow x = \arctan(2) = 1{,}1071 \quad oder \quad \alpha = 63{,}43$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie alle Winkel im Bereich von $[0\,;2\pi]$

$a)\ \sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow Winkel: \alpha_1 = 60 \quad und \quad \alpha_2 = 120$

$\Rightarrow Winkel: x_1 = \frac{60\pi}{180} = \frac{1}{3}\pi \quad und \quad x_2 = \frac{120\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$

$b)\ \cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\Rightarrow Winkel: \alpha_1 = 135 \quad und \quad \alpha_2 = 225$

$\Rightarrow Winkel: x_1 = \frac{135\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi \quad und \quad x_2 = \frac{225\pi}{180} = \frac{5}{4}\pi$

$c)\ \tan(x) = 1$

$\Rightarrow Winkel: \alpha_1 = 45 \quad und \quad \alpha_2 = 225$

$\Rightarrow Winkel: x_1 = \frac{45\pi}{180} = \frac{1}{4}\pi \quad und \quad x_2 = \frac{225\pi}{180} = \frac{5}{4}\pi$

Aufgabe 4: Lösen Sie folgende Gleichungen für den Bereich von $[0\,;2\pi]$:

$a)\ 3\sin(x)+2 = 1 \Rightarrow \sin(x) = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow Bogenmaß: x_1 = 3{,}4814 \quad oder \quad x_2 = 5{,}9433$

$\Rightarrow Winkel: \alpha_1 = 199{,}47 \quad oder \quad \alpha_2 = 340{,}52$

$b)\ \frac{1}{4}\cos(x) = -\sqrt{\frac{1}{32}} \Rightarrow \cos(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow Bogenmaß: x_1 = \frac{135\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi \quad oder \quad x_2 = \frac{225\pi}{180} = \frac{5}{4}\pi$

$\Rightarrow Winkel: \alpha_1 = 135 \quad oder \quad \alpha_2 = 225$

$c)\ 2\cos(x)-\sin(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 2 \Rightarrow \tan(x) = 2$

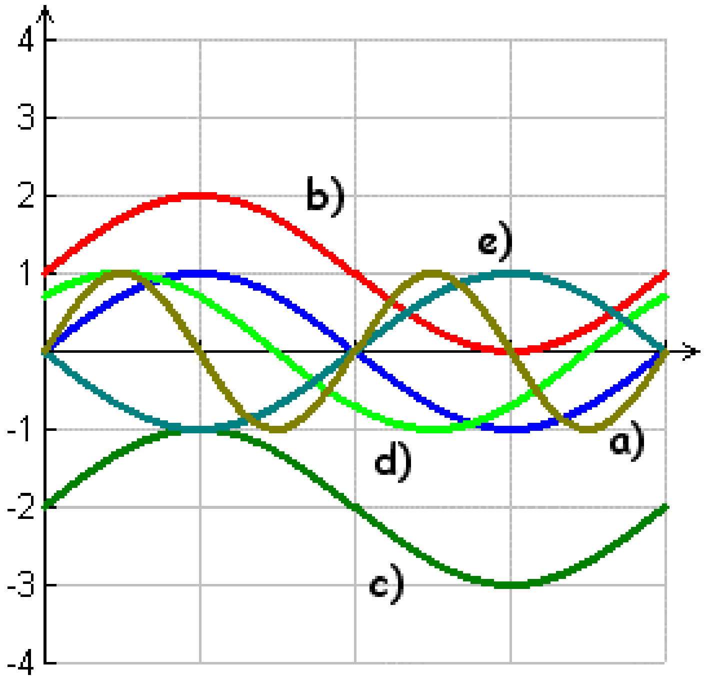
Lösung vgl. Aufgabe 1f

Zusatzaufgabe: Aus welchem Band stammen diese obigen Passagen?

Die Tour de France

Aufgabe 5: Zeichnen Sie folgende Funktionen in ein Koordinatensystem:

a) sin(2x) b) sin(x) + 1 c) sin(x) - 2 d) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ e) - sin(x)



Aufgabe 6: Füllen Sie die Tabelle korrekt aus:

Kriterium	**Sinus**	**Kosinus**	**Tangens**
Nullstellen	$k\cdot\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$	$k\cdot\pi+\frac{\pi}{2}$ mit $k\in\mathbb{Z}$	$k\cdot\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$
Periode	**2π**	**2π**	**π**
Definitions-bereich	$D=\mathbb{R}$	$D=\mathbb{R}$	$D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\cdot\pi+\frac{\pi}{2}\ \text{mit}\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
Wertebereich	$W = [-1;1]$	$W = [-1;1]$	$W=\mathbb{R}$
Symmetrie	**Punktsymmetrie**	**Achsensymmetrie**	**Punktsymmetrie**

Aufgabe 7: Berechnen Sie folgende Aufgabenstellungen:

a) 4! = 24 b) 0! = 1 c) (-2)! nicht definiert

d) $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!\cdot(4-1)!} = 4$

e) $\binom{100}{98} = \frac{100!}{98!\cdot(100-98)!} = \frac{100\cdot 99}{2!} = 4.950$

f) $\binom{6}{9}$ *nicht definiert*

g) $\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!\cdot(3-0)!} = 1$

h) $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} = n$

i) $\binom{n+1}{n} = \frac{(n+1)!}{n!\cdot(n+1-n)!} = n+1$

Zusatzaufgabe: $11^{(1+1+1)}+\left[(1+1+1)!\right]!-\left[\left((1+1+1)!\right)^{(1+1)}+11\right] = 2.004$

Aufgabe 8: Anwendung des Binomischen Lehrsatzes:

a)

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5+\binom{5}{1}a^4b+\binom{5}{2}a^3b^2+\binom{5}{3}a^2b^3+\binom{5}{4}ab^4+\binom{5}{5}b^5$$
$$= 1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5$$

b)

$$(x+2)^4 = \binom{4}{0}x^4+\binom{4}{1}x^3\cdot 2+\binom{4}{2}x^2\cdot 2^2+\binom{4}{3}x\cdot 2^3+\binom{4}{4}2^4$$
$$= 1x^4+4x^3\cdot 2+6x^2\cdot 2^2+4x\cdot 2^3+1\cdot 2^4$$
$$= 1x^4+8x^3+24x^2+32x+16$$

Aufgabe 9: Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen mit der h-Methode und die Steigung der Tangente an der Stelle $x_0 = 4$:

$a)\quad f(x) = x^3$

Voraussetzung: $f(x_0) = x_0^{\ 3}$ *und* $f(x_0+h) = (x_0+h)^3$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^3 - x_0^{\ 3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x_0^{\ 3}+3x_0^{\ 2}h+3x_0h^2+h^3-x_0^{\ 3}}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{3x_0^{\ 2}h+3x_0h^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\left(3x_0^{\ 2}+3x_0h+h^2\right)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\left(3x_0^{\ 2}+3x_0h+h^2\right) \underset{\text{Grenzwertübergang}}{=} 3x_0^{\ 2}$$

$$f'(4) = 3\cdot 16 = 48$$

$b)\quad f(x) = \frac{1}{x}$

Voraussetzung: $f(x_0) = \frac{1}{x_0}$ *und* $f(x_0+h) = \frac{1}{x_0+h}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x_0+h}-\frac{1}{x_0}}{h} \underset{\text{Hauptnenner}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x_0-(x_0+h)}{x_0(x_0+h)}}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{x_0-(x_0+h)}{h\cdot x_0(x_0+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\cdot x_0(x_0+h)}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+h)} \underset{\text{Grenzwertübergang}}{=} -\frac{1}{x_0^{\ 2}}$$

$$f'(4) = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}$$

Aufgabe 10: Bestimmen Sie die Tangentengleichung an der Stelle $x_0 = 2$

$$f(x) = 2x^3 - x \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = 6x^2 - 1$$

Steigung in $x_0 = 2$: $f'(2) = 6\cdot 2^2 - 1 = 23$

Punktkoordinaten in $x_0 = 2$:

$$f(2) = 2\cdot 2^3 - 2 = 14 \xrightarrow{\text{Koordinaten}} P(2;14)$$

Berechnung der Tangente: $t(x) = mx + b$

$$14 = 23\cdot 2 + b$$

$$b = -32$$

Tangentengleichung: $t(x) = 23x - 32$