Musterlösung Test GY 02 c vom 10.02.2004

Themen: Finanzmathematik & Kapitalwertmethode

1.) Von einem Kapital in Höhe von 120.000,00 €, das mit 5 % verzinst wird, werden am Jahresende jeweils 15.000,00 € abgehoben.

a) Wie hoch ist das Restkapital nach 5 Jahren?

$$K_{n\,(nach)} = 120.000 \cdot 1,05^5 - 15.000 \cdot \frac{1,05^5 - 1}{1,05 - 1}$$

$$K_{n\,(nach)} = 70.269,32$$

b) Nach wie viel Jahren ist das Kapital verbraucht?

$$0 = 120.000 \cdot 1,05^n - 15.000 \cdot \frac{1,05^n - 1}{1,05 - 1}$$

$$300.000 = 180.000 \cdot 1,05^n$$

$$1,05^n = \frac{5}{3}$$

$$n = 10,47\,[Jahre]$$

$$n \approx 11\,[Jahre]$$

2.) Welcher Betrag muss am Anfang des 1. Jahres auf ein Konto, das mit 5 % verzinst wird, eingezahlt werden, um vom Ende des 10. Jahres ab 15 Jahre lang eine nachschüssige Rente in Höhe von 6.000,00 € beziehen zu können?

$$0 = K_0 \cdot 1,05^{25} - 6.000 \cdot \frac{1,05^{15} - 1}{1,05 - 1}$$

$$K_0 = 6.000 \cdot \frac{1,05^{15} - 1}{(1,05 - 1) \cdot 1,05^{25}}$$

$$K_0 = 38.233,26$$

3.) Ein Sparer legt bei seiner Bank 20.000,00 € zu 8 % an. Nach Ablauf von 5 Jahren will er eine nachschüssige Rente in Höhe von 2.000,00 € daraus beziehen.

Wie viel Jahre ist dies möglich?

$$
\begin{aligned}
0 &= 20.000 \cdot 1,08^{5+t} - 2.000 \cdot \frac{1,08^t - 1}{1,08 - 1} \\
25.000 &= 20.000 \cdot 1,08^5 \cdot 1,08^t - 25.000 \cdot 1,08^t \\
5 &= \left(4 \cdot 1,08^5 - 5\right) \cdot 1,08^t \\
1,08^t &= 5,7 \\
t &= \frac{\ln(5,7)}{\ln(1,08)} \\
t &= 22,6\,[Jahre] \\
t &\approx 23\,[Jahre]
\end{aligned}
$$

4.) Die Chemie-AG plant eine Modernisierungsinvestition. Dazu stehen zwei Alternativen bei einem Zinssatz von 4 % zur Auswahl. Treffen Sie aufgrund der Kapitalwertmethode eine sinnvolle Entscheidung:

Maschine I kostet 35.000,00 € und ist 4 Jahre nutzbar, der Liquidationserlös wird voraussichtlich 5.000,00 € betragen.

t in Jahren	0	1	2	3	4
Einnahmen		23.000,00	12.000,00	20.000,00	40.000,00
Ausgaben	-35.000,00	10.000,00	8.000,00	12.000,00	20.000,00
Saldo	-35.000,00	13.000,00	4.000,00	8.000,00	20.000,00

Kapitalwert I: 5.406,27 €

Maschine II kostet lediglich 30.000,00 €, der Liquidationserlös wird voraussichtlich 4.000,00 € betragen. Die Nutzungsdauer ebenfalls 4 Jahre.

t in Jahren	0	1	2	3	4
Einnahmen		22.000,00	18.000,00	10.000,00	18.000,00
Ausgaben	-30.000,00	14.000,00	9.000,00	4.000,00	5.000,00
Saldo	-30.000,00	8.000,00	9.000,00	6.000,00	13.000,00

Kapitalwert II: 2.459,75 €

Entscheidung: Alternative I ist wegen des höheren Kapitalwertes besser.

5.) Rudi Ratlos hat die Alternative 10.000,00 € sofort oder je 6.000,00 € in den folgenden beiden Jahren zu erhalten.

Bei welchem Prozentsatz wäre er in seiner Entscheidung indifferent?

$$-10.000+\frac{6.000}{q}+\frac{6.000}{q^2} = 0$$

$$-10q^2 + 6q + 6 = 0$$

$$q_1 = 1{,}1306 \Rightarrow i = 0{,}13 \quad bzw. \quad p \approx 13\,\%$$

$$q_2 = -0{,}5306 \quad nicht\ definiert$$