Musterlösung: **13. Jgst.** **1. Test** **Datum: 01.10.2004**

Klasse: GY 02 c **Fach: Mathematik (Grundkurs)**

Thema: Vektoren und vektorielle Geradengleichungen

---

❶ Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x}$ in folgender Gleichung:

Lösung:

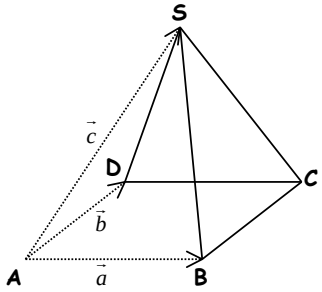
$$\frac{\vec{x}+2\vec{b}-3\vec{c}}{2}+2\vec{b} = \frac{2\vec{x}-\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$3\vec{x}+6\vec{b}-9\vec{c}+12\vec{b} = 4\vec{x}-2\vec{b}+2\vec{c}$$

$$\vec{x} = 20\vec{b}-11\vec{c}$$

❷ Gegeben sei die Pyramide durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ *und* $\vec{c}$.

Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{DS}$, $\overrightarrow{CS}$, $\overrightarrow{DB}$ *und* $\overrightarrow{CA}$. durch die gegebenen Vektoren aus.



Lösung:

$$\overrightarrow{BS} = -\vec{a}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{DS} = -\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{CS} = -\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{DB} = \vec{a}-\vec{b}$$

$$\overrightarrow{CA} = -\vec{a}-\vec{b}$$

❸ a) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\8\end{pmatrix}$

Für welche Werte von b_1 besteht lineare Unabhängigkeit?

Lösung:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}b_1\\8\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda\cdot b_1=1 \Rightarrow b_1=4$$

$$\Rightarrow \textit{linear abhängig}$$

$$\Rightarrow b_1\in\Re\setminus\{4\}$$

b) Die Vektoren $\vec{p}=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{m}=\begin{pmatrix}x\\2\\1\end{pmatrix}$ sollen linear abhängig werden. Wie lautet der Komponentenwert x?

Lösung:

$$\begin{vmatrix}4 & 1 & x\\4 & -2 & 2\\3 & -2 & 1\end{vmatrix} \overset{Sarrus}{=} -8+6-8x+6x+16-4 \overset{!}{=} 0$$

$$-2x+10 = 0 \Rightarrow x=5$$

❹ Gegeben sind die Punkte A(5/7/-3) und B(4/-3/-9)

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Gerade durch diese Punkte.

Lösung: *Geradengleichung*:

$$g:\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\7\\-3\end{pmatrix}+\lambda\left[\begin{pmatrix}4\\-3\\-9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\7\\-3\end{pmatrix}\right]$$

$$g:\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\7\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\-10\\-6\end{pmatrix}$$

b) Gibt es einen Wert für h, damit der Punkt C(1/-h/2) auf der Geraden liegt?

Lösung: *Geradengleichung*:

$$\begin{pmatrix}1\\-h\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\-10\\-6\end{pmatrix}$$

I) $1=5-\lambda \Rightarrow \lambda=4$

II) $2=-3-6\lambda \Rightarrow \lambda=-\frac{5}{6}$

Es gibt kein h, da die λ-Werte nicht einheitlich sind.

❺ Gegeben sei die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie drei Punkte an, die auf der Geraden liegen.

Lösung:

$Punkt\,1: Ortsvektor \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$Punkt\,2: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \quad mit\ t = 1$

$Punkt\,2: \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad mit\ t = -1$

b) Geben Sie je eine Gerade an, die echt parallel, windschief und mit einem Schnittpunkt zu g verläuft.

(Anmerkung: mit Begründung!)

Lösung:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

parallel: Richtungsvektor identisch, Ortsvektor von h $\notin$ g

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

windschief: kein Schnittpunkt; Bedingung: $\mathrm{Det}\left[\left(\vec{a} - \vec{b}\right), \vec{u}, \vec{v}\right] \neq 0$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt: verschiedene Richtungsvektoren, identischer Ortsvektor

Bedingung: $\mathrm{Det}\left[\left(\vec{a} - \vec{b}\right), \vec{u}, \vec{v}\right] = 0$

$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Schnittpunkt: $S \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

❻ Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Punkten A(1/2/4), B(3/-2/1) und C(5/1/6).

Berechnen Sie die drei Seitenmittelpunkte $M_{\overline{AB}}$, $M_{\overline{AC}}$ und $M_{\overline{BC}}$.

Lösung:

$$M_{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$M_{\overline{AC}} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$M_{\overline{BC}} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 4 \\ -0,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}$$