Musterlösung GY 03 c 3. Kursarbeit 12/2 vom 23.04.2004

Themen: Matrizen, Determinanten & Cramer-Regel

1.) Geben Sie je eine (4x4)-Matrix an, für deren Elemente a_{ij} gilt:

a) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i < j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ b) $b_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Lösung:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.) Vervollständigen Sie die Matrix mit den korrekten Zahlenwerten:

$$A = \begin{pmatrix} a_{22}+2 & a_{22}-a_{11} \\ a_{11}-a_{12} & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Schritt 1: $A = \begin{pmatrix} -1+2=1 & a_{22}-a_{11} \\ a_{11}-a_{12} & -1 \end{pmatrix}$

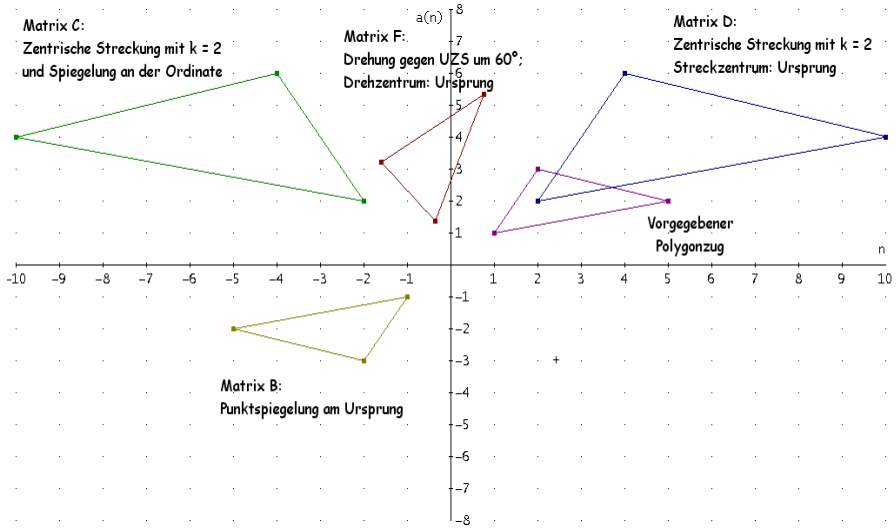
Schritt 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1-1=-2 \\ a_{11}-a_{12} & -1 \end{pmatrix}$

Schritt 3: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1-(-2)=3 & -1 \end{pmatrix}$

Ergebnis: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

3.) Affine Abbildungen:

Zeichnen Sie folgenden Polygonzug A in ein Koordinatensystem ein:



Zusatzfrage: Mit welcher Matrix erreicht man eine Spiegelung an der Abszisse?

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.) Die Hauptdiagonale einer quadratischen Matrix besteht aus

a) 3 b) n

Elementen.

(i) Welches Format besitzt die Matrix?

a) 3 x 3 b) n x n

(ii) Wie viele Elemente hat die Matrix?

a) 9 b) n^2

(iii) Wie viele Elemente stehen oberhalb der Hauptdiagonalen?

a) 3 b) $\frac{n^2-n}{2}$

5.) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten:

(i) $A^2 = B$ (ii) $A^3 = E$ (iii) $B^2 = A$ (iv) $B^3 = E$

Lösung erfolgt durch direktes Anwenden der Matrizenmultiplikation.

b) Erklären Sie aufgrund der wahren Aussagen in a), dass daraus folgende Aussage gelten muss: $A^4 = A$

Lösung:

Nach (i) gilt: $A^2 = B$

Wenn man beide Seiten quadriert folgt: $A^4 = B^2$

Nach (iii) gilt: $B^2 = A$

Somit folgt die Behauptung: $A^4 = A$

6.) Gegeben sind die Matrizen A, B und C.

Aufgabe a

#4: a + b·(−a + b)

Werte eingesetzt:

#5:
$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot [[3, 0] + [1, -2], [-4, -2] + [0, -4]]$$

Klammer (−a + b) ausrechnen

#6:
$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

Punkt vor Strich!!!

#7:
$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 16 & 24 \end{bmatrix}$$

Addition der beiden Matrizen

#8:
$$\begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 20 & 26 \end{bmatrix}$$

Aufgabe b

#9: (a + 3·c)·b

Werte eingesetzt:

#10:
$$[[-6, -3] + [-3, 0], [3, -12] + [4, 2]] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Klammer ausrechnen

#11:
$$\begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 7 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Multiplikation der beiden Matrizen

#12:
$$\begin{bmatrix} -9 & 30 \\ 7 & 26 \end{bmatrix}$$

Aufgabe c

#13: (a − c)·(a + b)

Werte eingesetzt – Derive rechnet allerdings mit dem Distributivgesetz, d.h. (a−c)*a + (a−c)*b:

#14:
$$[[-3, 0] + [2, 1], [4, 2] + [-1, 4]] \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + [[-3, 0] + [2, 1], [4, 2] + [-1, 4]] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Addition der Klammerterme und Multiplikation der Matrizen – Achtung: Punkt vor Strich

#15:
$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -30 \end{bmatrix}$$

Addition der beiden Matrizen:

#16:
$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 18 & -18 \end{bmatrix}$$

7.) Berechnen sie die Determinanten der folgenden Matrizen.

a)
$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} \underset{Sarrus}{=} 0+acb+(-b)(-a)(-c)-b\cdot 1\cdot(-b)-0-1\cdot a\cdot(-a)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} = abc-abc+b^2+a^2 = a^2+b^2$$

b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 20 & 16 \\ 25 & 9 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 0$$ weil die zweite Zeile eine Nullzeile darstellt.

8.) Für welche Parameterwerte ist die Matrix A singulär?

$$Det(A) = \begin{vmatrix} t & 0 & 2 \\ 8 & t & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{Sarrus}{=} t^2+16-8t-2t$$

$$\Rightarrow \quad t^2-10t+16 = 0$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = 8 \quad \vee \quad t_2 = 2$$

9.) Beweisen sie die Rechenregeln zu Matrizen

```
#1:  a := ⎡ x      x    ⎤
          ⎢  1,1   1,2  ⎥
          ⎢             ⎥
          ⎢ x      x    ⎥
          ⎣  2,1   2,2  ⎦

#2:  b := ⎡ y      y    ⎤
          ⎢  1,1   1,2  ⎥
          ⎢             ⎥
          ⎢ y      y    ⎥
          ⎣  2,1   2,2  ⎦
```

```
Aussage a: (k*A)² = k² * A²
           2
#3:   (k·a)
 2
A  ⇒ A • A
       ⎡ k·k·x   ·x    + k·k·x   ·x     k·k·x   ·x    + k·k·x   ·x    ⎤
       ⎢     1,1  1,1        1,2  2,1       1,1  1,2        1,2  2,2 ⎥
#4:    ⎢                                                             ⎥
       ⎢ k·k·x   ·x    + k·k·x   ·x     k·k·x   ·x    + k·k·x   ·x    ⎥
       ⎣     1,1  2,1        2,1  2,2       1,2  2,1        2,2  2,2 ⎦

         ⎡   2             2    2    2             2          ⎤
         ⎢  k ·x   ·x   + k ·x       k ·x   ·x   + k ·x   ·x  ⎥
         ⎢      1,2  2,1       1,1        1,2  2,2       1,1  1,2 ⎥
#5:      ⎢                                                     ⎥
         ⎢ 2             2             2    2    2           ⎥
         ⎢k ·x   ·x   + k ·x   ·x      k ·x    + k ·x   ·x    ⎥
         ⎣    2,1  2,2       1,1  2,1       2,2        1,2  2,1  ⎦

              ⎡ 2 ⎛              2⎞   2                  ⎤
              ⎢k ·⎜x   ·x   + x   ⎟  k ·x   ·(x    + x  ) ⎥
              ⎢   ⎝ 1,2  2,1   1,1⎠      1,2   2,2   1,1  ⎥
#6:           ⎢                                          ⎥
              ⎢  2                   2 ⎛   2          ⎞  ⎥
              ⎢ k ·x   ·(x    + x  ) k ·⎜x    + x   ·x  ⎟  ⎥
              ⎣     2,1   2,2   1,1     ⎝ 2,2    1,2  2,1⎠  ⎦
      2  2
```

```
#7:   k ·a
 2
A  ⇒ A • A
                ⎡ x   ·x    + x   ·x     x   ·x    + x   ·x    ⎤
              2 ⎢  1,1  1,1    1,2  2,1   1,1  1,2    1,2  2,2 ⎥
#8:          k ·⎢                                              ⎥
                ⎢ x   ·x    + x   ·x     x   ·x    + x   ·x    ⎥
                ⎣  1,1  2,1    2,1  2,2   1,2  2,1    2,2  2,2 ⎦
```

```
                ⎡  2 ⎛                2⎞    2                   ⎤
                ⎢ k ·⎢x   ·x    + x     ⎥   k ·x   ·(x    + x   ) ⎥
                ⎢    ⎝ 1,2  2,1    1,1 ⎠       1,2   2,2    1,1  ⎥
#9:             ⎢                                                ⎥
                ⎢   2                     2 ⎛    2           ⎞   ⎥
                ⎢  k ·x   ·(x    + x   )  k ·⎢x     + x   ·x   ⎥ ⎥
                ⎣      2,1   2,2    1,1      ⎝ 2,2     1,2  2,1⎠ ⎦
```

Aussage b: k⋆(a+b) = k⋆a + k⋆b

#10: k·(a + b)

```
          k·⎡⎡x   , x   ⎤ + ⎡y   , y   ⎤, ⎡x   , x   ⎤ + ⎡y   , y   ⎤⎤
#11:         ⎣⎣ 1,1   1,2⎦   ⎣ 1,1   1,2⎦  ⎣ 2,1   2,2⎦   ⎣ 2,1   2,2⎦⎦
```

```
                    ⎡ k·(x    + y   )  k·(x    + y   ) ⎤
                    ⎢     1,1    1,1       1,2    1,2  ⎥
#12:                ⎢                                  ⎥
                    ⎢ k·(x    + y   )  k·(x    + y   ) ⎥
                    ⎣     2,1    2,1       2,2    2,2  ⎦
```

#13: k·a + k·b

```
      ⎡⎡k·x   , k·x   ⎤ + ⎡k·y   , k·y   ⎤, ⎡k·x   , k·x   ⎤ + ⎡k·y   ,
#14:  ⎣⎣   1,1    1,2⎦   ⎣   1,1    1,2⎦  ⎣   2,1    2,2⎦   ⎣   2,1

        k·y   ⎤⎤
          2,2⎦⎦
```

```
                    ⎡ k·x    + k·y     k·x    + k·y    ⎤
                    ⎢    1,1      1,1     1,2      1,2 ⎥
#15:                ⎢                                 ⎥
                    ⎢ k·x    + k·y     k·x    + k·y    ⎥
                    ⎣    2,1      2,1     2,2      2,2 ⎦
```

```
                    ⎡ k·(x    + y   )  k·(x    + y   ) ⎤
                    ⎢     1,1    1,1       1,2    1,2  ⎥
#16:                ⎢                                  ⎥
                    ⎢ k·(x    + y   )  k·(x    + y   ) ⎥
                    ⎣     2,1    2,1       2,2    2,2  ⎦
```

Aussage c: (a ⋆ b)^T = b^T ⋆ a^T

#17: a·b

```
                ⎡ x   ·y    + x   ·y     x   ·y    + x   ·y    ⎤
                ⎢  1,2  2,1    1,1  1,1   1,2  2,2    1,1  1,2 ⎥
#18:            ⎢                                              ⎥
                ⎢ x   ·y    + x   ·y     x   ·y    + x   ·y    ⎥
                ⎣  2,2  2,1    2,1  1,1   2,2  2,2    2,1  1,2 ⎦
```

#19: (a·b)'

```
                ⎡ x   ·y    + x   ·y     x   ·y    + x   ·y    ⎤
                ⎢  1,2  2,1    1,1  1,1   2,2  2,1    2,1  1,1 ⎥
#20:            ⎢                                              ⎥
                ⎢ x   ·y    + x   ·y     x   ·y    + x   ·y    ⎥
                ⎣  1,2  2,2    1,1  1,2   2,2  2,2    2,1  1,2 ⎦
```

#21: b'·a'

```
                ⎡ x   ·y    + x   ·y     x   ·y    + x   ·y    ⎤
                ⎢  1,2  2,1    1,1  1,1   2,2  2,1    2,1  1,1 ⎥
#22:            ⎢                                              ⎥
                ⎢ x   ·y    + x   ·y     x   ·y    + x   ·y    ⎥
                ⎣  1,2  2,2    1,1  1,2   2,2  2,2    2,1  1,2 ⎦
```

Aussage d: (a^T)^T = a

#23: a'

```
                                ⎡ x     x    ⎤
                                ⎢  1,1   2,1 ⎥
#24:                            ⎢            ⎥
                                ⎢ x     x    ⎥
                                ⎣  1,2   2,2 ⎦
```

#25: a''

```
                                ⎡ x     x    ⎤
                                ⎢  1,1   1,2 ⎥
#26:                            ⎢            ⎥
                                ⎢ x     x    ⎥
                                ⎣  2,1   2,2 ⎦
```

10.) Berechnen Sie folgende Ausdrücke :

a) $\text{Det}\begin{pmatrix}1 & x\\ x & 2\end{pmatrix} - 2x = -6$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

=> Lösung: $x_1 = 2 \vee x_2 = -4$

b) $\text{Det}\left[\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 2 & -1 & 0\\ -4 & 2 & -x\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-x & -2x & 2\\ x & 2 & -x\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right] = 0$

Lösung:

$$\left|\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 2 & -1 & 0\\ -4 & 2 & -x\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-x & -2x & 2\\ x & 2 & -x\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{pmatrix}1 & x & x^2\\ 2 & -1 & 0\\ -4 & 2 & -x\end{pmatrix}\right| * \left|\begin{pmatrix}-x & -2x & 2\\ x & 2 & -x\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right| = 0$$

$$(2x^2+x)\cdot(-2x+4) = 0$$

$$-4x^3+6x^2+4x = 0$$

$$x\cdot(-4x^2+6x+4) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = -\frac{1}{2} \vee x_3 = 2$$

11.) a) **LGS 1**

I.) $2x+y = 11$ *und* *II.)* $x-3y = 2$

Lösung :

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\ 2\end{pmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix}11 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix} = -33-2 = -35$$

$$D_y = \begin{vmatrix}2 & 11\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 4-11 = -7$$

$$D = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix} = -6-1 = -7$$

$$\Rightarrow x = \frac{-35}{-7} = 5$$

$$\Rightarrow y = \frac{-7}{-7} = 1$$

LGS 2:

$$B\vec{x} = \vec{x} \quad \text{mit} \quad B = \begin{pmatrix}3 & 6\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$(B-E)\vec{x} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 6\\ -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = -3y$ unendlich viele Lösungen

LGS 3:

I.) $x-y = 0$ *und* *II.)* $x+y = 0$

Lösung :

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$D = \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1+1 = 2$$

$$\Rightarrow x = y = \frac{0}{2} = 0$$

b) Erklären Sie das Lösungsverhalten von LGS mit Hilfe der Cramer-Regel.

Fall 1: $D \neq 0$

=> **eine bestimmte Lösung**

Fall 2: $D = 0 \wedge (D_x \neq 0 \vee D_y \neq 0)$

=> **keine Lösung**

Fall 3: $D = 0 \wedge D_x \neq 0 \wedge D_y \neq 0$

=> **unendlich viele Lösungen**