Musterlösung **2. Jgst.** **4. Klassenarbeit** **Datum: 19.06.2009**

Klasse: BF II **Fach: Mathematik**

Themen: **Abschließende Arbeit mit allen Jahresthemen**

1.) Die kugelförmige Kuppel

Die Kuppel des Doms in St. Blasien hat die Form einer Halbkugel. Der Durchmesser der Kuppel beträgt 36 m.

a) Wie groß ist das Volumen der Kuppel?

Lösung:

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi$$

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot 18^3\cdot\pi$$

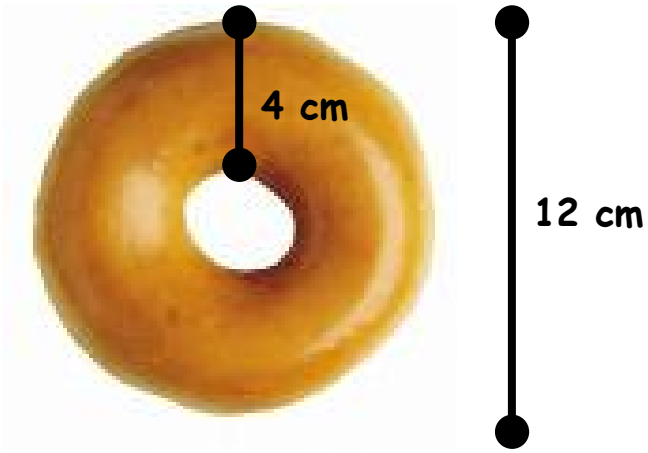
$$V = 12.214,51\left[m^3\right]$$

b) Wie viel Farbe würde man benötigen, um sie zu streichen?

Lösung: $O = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot r^2\cdot\pi = 2\cdot r^2\cdot\pi \Rightarrow O = 2.035,75$

2.) Der Donut

Ein Cafe in Pennsylvania behauptet „the world's largest donuts" anzubieten.
Ein Donut ist ein Teigring.
Welches **Volumen (Teigmasse)** besitzt der Donut, wenn folgende **Durchmesser** gegeben sind:



Lösung: Zylindervolumen:

$$V = G \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$\left[h = 2 \cdot R \cdot \pi \left(\text{Kreislinie des Mittelpunktes des Donuts} \right) \right]$$

$$V = 2^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4 \cdot \pi = 32 \cdot \pi^2 \left[cm^3 \right] = 315{,}83 \left[cm^3 \right]$$

3.) Rechnungen zu Potenzen

a) $5 \cdot 6^2 - 4^3 \cdot 1^{10.000} = 180 - 64 = 116$

b) $\dfrac{a^{27} \cdot a^{21}}{a^{40}} = a^{27} \cdot a^{21} \cdot a^{-40} = a^{27+21-40} = a^8$

c) $a \cdot a^{12} \cdot a^3 = a^{1+12+3} = a^{16}$

d) $b^{-2} \cdot b^2 \cdot b^5 = b^{-2+2+5} = b^5$

e) Welche Zahl ist größer?

$\left(3^3\right)^3$ *oder* 3^{3^3} Berechnen Sie hierzu beide Ergebnisse.

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} \left(3^3\right)^3 &= 27^3 = 19.683 \\ 3^{3^3} &= 3^{27} = 7{,}6255974 \cdot 10^{12} \end{aligned}\right\} \quad \left(3^3\right)^3 < 3^{3^3}$$

4.) Lineare Gleichungssysteme

a)
$$\begin{aligned} I.) \quad & x + y = 12 \\ II.) \quad & x - y = 4 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\left.\begin{aligned} I.) \quad & x + y = 12 \\ II.) \quad & x - y = 4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{I.)+II.)} 2x = 16 \xrightarrow{:2} x = 8$$

$$\Rightarrow \quad x + y = 12 \xrightarrow{x=8} 8 + y = 12 \quad \Rightarrow \quad y = 4$$

$$I.) \quad 2x-4y=6$$

b) $$II.) \quad 8y-3x=2$$

Lösung:

$$\left.\begin{array}{ll} I.) & 2x-4y=6 \\ II.) & 8y-3x=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{2\cdot I.)+II.)} x=14$$

$$\Rightarrow \quad 2x-4y=6 \quad \xrightarrow{x=14} \quad 28-4y=6 \quad \Rightarrow \quad y=5,5$$

5.) Textaufgabe

Die Tageseinnahme eines Zoos betrug 35.000,00 €. Eine Eintrittskarte für Erwachsene kostet 6,00 €, eine für Kinder 4,00 €.

Wie viele Erwachsene und wie viele Kinder besuchten den Zoo, wenn insgesamt 7.000 Besucher gezählt wurden

Lösung:

x Erwachsene und y Kinder:

$$\left.\begin{array}{ll} I.) & 6x+4y=35.000 \\ II.) & x+y=7.000 \end{array}\right\} \xrightarrow{4\cdot II} \left.\begin{array}{ll} I.) & 6x+4y=35.000 \\ II.) & 4x+4y=28.000 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{I-II} \quad 2x=7.000 \quad \xrightarrow{:2} \quad x=3.500 \quad \Rightarrow \quad y=3.500$$

6.) Der Leuchtturm

Das Licht eines Leuchtturmes reicht 8 km weit.
Der Leuchtstrahl überstreicht bei der Drehung 90 ° eines Kreises.

a) Wie groß ist die Fläche, die der Scheinwerfer überstreicht?

Lösung:

$$A = r^2\pi\cdot\frac{\alpha}{360} \quad \Rightarrow \quad A = 8^2\pi\cdot\frac{90}{360} = 16\pi = 50,27\left[km^2\right]$$

b) Wie groß ist das Bogenmaß (= Strecke auf dem Kreisumfang)?

Lösung: $$b = \frac{r\pi\alpha}{180} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{8\cdot\pi\cdot 90}{180} = 4\pi = 12,57\left[km\right]$$

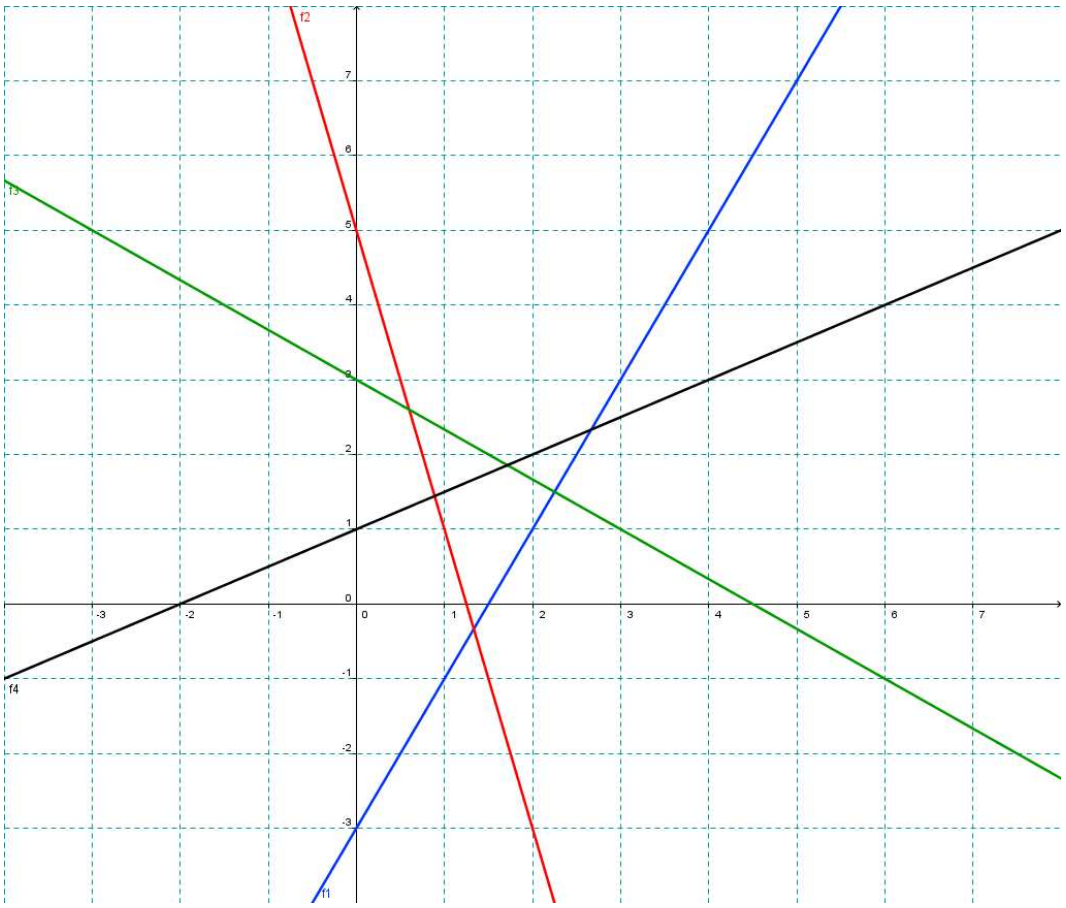
7.) Zeichnen von Funktionen

Zeichnen Sie die angegebenen Funktionen in ein Koordinatensystem:

a) $f_1(x) = 2x-3$ b) $f_2(x) = -4x+5$

c) $f_3(x) = -\frac{2}{3}x+3$ d) $f_4(x) = \frac{1}{2}x+1$

Graphen der Funktionen:



8.) Die Bevölkerungsentwicklung

Die Bevölkerung von Indien wächst pro Jahr um ca. 2,7 %. Die letzte Zählung fand 2005 statt; Indien hatte zu diesem Zeitpunkt 1.200.000.000 Einwohner. Berechnen Sie die voraussichtliche Bevölkerungszahl Indiens für das Jahr 2020.

Lösung:

$$f(t) = 1,2 \cdot 10^9 \cdot 1,027^t$$

$$f(15) = 1,2 \cdot 10^9 \cdot 1,027^{15} = 1.789.525.536$$

9.) Quadratische Gleichungen

Lösen Sie die Gleichungen mittels geeigneter Rechnung.

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$

Lösung:

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 3 \wedge x_2 = -1$$

b) $\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$

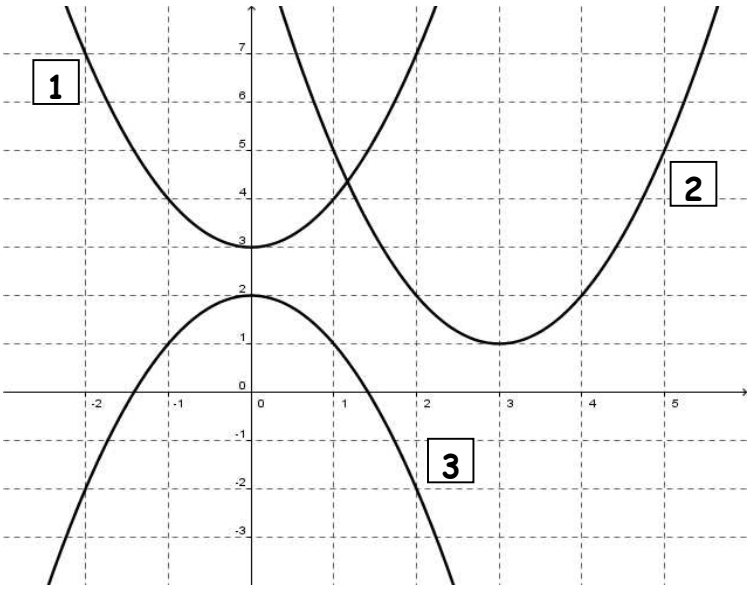
Lösung:

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{1} = -1 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = -4$$

10.) Parabeln – aber welche Funktionsvorschrift?

a) Nennen Sie die Koordinaten der Scheitelpunkte.

b) Bestimmen Sie die Funktionsvorschriften der drei Parabeln.



Lösung:

Funktion 1: $S(0 \mid 3)$ $\quad f(x) = x^2 + 3$

Funktion 2: $S(3 \mid 1)$ $\quad f(x) = (x-3)^2 + 1$

Funktion 3: $S(0 \mid 2)$ $\quad f(x) = -x^2 + 2$

11.) Zusatzaufgabe: Ergänzen Sie den Text

Funktionen vom Typ $f(x)=ax^2+bx+c \quad mit\ a\neq 0$ heißen _____ _____ . Die dazugehörigen Graphen nennt man _____ . Der _____ einer Parabel ist der höchste oder tiefste Punkt. Ist a > 0, so ist die Parabel nach _____ geöffnet, für a < 0 nach _____ geöffnet. Mit der Scheitelpunktform $f(x)=a(x+b)^2+c \quad mit\ a\neq 0$ kann man die _____ der Parabel sehr gut bestimmen. Der _____ punkt besitzt dann die Koordinaten $S(\quad | \quad)$. Der Wert für a gibt dabei die _____ oder _____ an, der Wert für b zeigt die Anzahl der Schritte an, um die nach _____ oder _____ verschoben wird. Der Parameter c ist für die _____ entlang der ____ -Achse zuständig.

Lösung:

Funktionen vom Typ $f(x) = ax^2+bx+c \quad mit\ a\neq 0$ heißen **quadratische Funktionen**. Die dazugehörigen Schaubilder bzw. Graphen nennt man **Parabeln**. Der **Scheitelpunkt** einer Parabel ist der höchste oder tiefste Punkt. Ist a > 0, so ist die Parabel nach **oben** geöffnet, für a < 0 ist nach **unten** geöffnet.

Mit der Scheitelpunktform $f(x) = a(x+b)^2+c \quad mit\ a\neq 0$ kann man die **Lage** der Parabel sehr gut bestimmen. Der **Scheitel**punkt besitzt dann die Koordinaten $S(-b \mid c)$.

Der Wert für a gibt dabei die **Streckung** oder **Stauchung** an, der Wert für b zeigt die Anzahl der Schritte an, um die nach **rechts** oder **links** verschoben wird. Der Parameter c ist für die **Verschiebung** entlang der **y**-Achse zuständig.