Musterlösung **2. Jgst.** **5. Klassenarbeit** **Datum: 28.05.2008**

Klasse: BF II **Fach: Mathematik**

Themen: **Exponentialfunktionen; Logarithmus; Geometrie zu Kreis und Kugel; Trigonometrie**

1.) Berechnen Sie:

a) $\sin(90°) + \cos(45°) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1,707$

b) $\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 0,866 - (-0,5) = 1,366$

c) $\log_6 216 = \frac{\lg 216}{\lg 6} = 3$

d) $\log_2 128 = \frac{\lg 128}{\lg 2} = 7$

2.) Ermitteln Sie x:

a) $\sin(60°) = 1-\cos(x)$

$\Rightarrow \cos(x) = 1-\sin(60°) = 0,134 \xrightarrow{\arccos} x = 82,30$

b) $\tan(30°) = 2\cdot\cos(x)$

$\Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2}\cdot\tan(30°) = 0,2887 \xrightarrow{\arccos} x = 73,22$

c) $\log_x 343 = 3$

$\Rightarrow \log_x 343 = 3 \Rightarrow x^3 = 343 \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} x = 7$

d) $\log_3 x = 8$

$\Rightarrow \log_3 x = 8 \Rightarrow x = 3^8 = 6.561$

3.) Vom Bogen- in das Gradmaß

Rechnen Sie vom Bogenmaß in das Gradmaß um und umgekehrt:

a) 30° b) 765° c) 3π d) $0,35$

Lösung:

$$Ansatz: \quad b = \frac{\pi\alpha}{180}$$

a) $$b = \frac{\pi \cdot 30}{180} = \frac{1}{6}\pi \approx 0,52$$

b) $$b = \frac{\pi \cdot 765}{180} = \frac{17}{4}\pi \approx 13,35$$

c) $$3\pi = \frac{\pi \cdot \alpha}{180} \Rightarrow \alpha = 540°$$

d) $$0,35 = \frac{\pi \cdot \alpha}{180} \Rightarrow \alpha = 20,05°$$

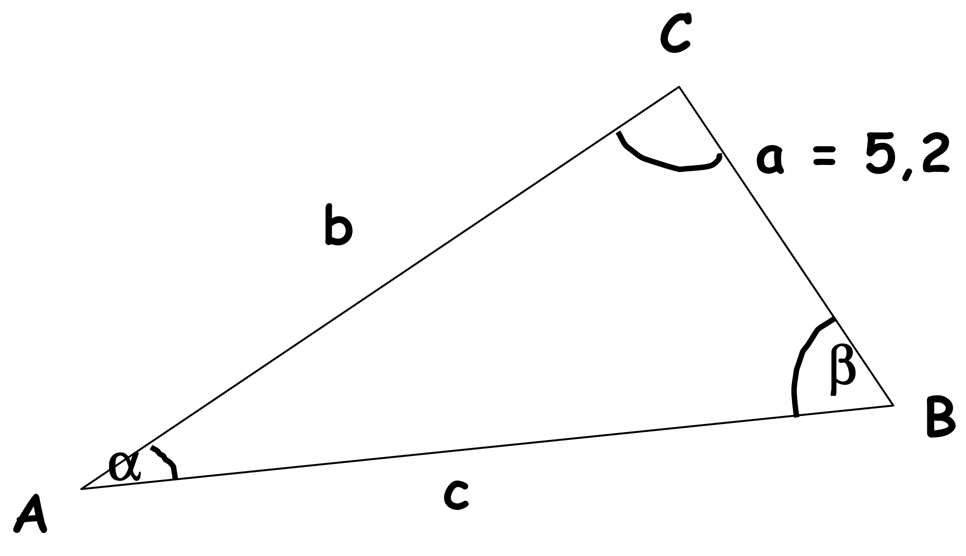
4.) Trigonometrie am Dreieck

Von einem Dreieck sind folgende Größen gegeben:

a = 5,2 cm $\alpha = 37°$ $\gamma = 90°$

a) Berechnen Sie die Seiten b und c und den Winkel β.

b) Zeichnen Sie das Dreieck.



Winkel β: β = 180 - α - 90 = 53

Seite c: $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Rightarrow c = \frac{a}{\sin(\alpha)} \Rightarrow c = 8{,}64$

Seite b: $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow b = 6{,}90$

Ansatz nach Pythagoras wäre hier auch möglich gewesen!

5.) Exponentialfunktionen zur Bevölkerungsentwicklung

Landau hatte am 1.1.2007 eine Bevölkerungsanzahl von 43.048.
Das jährliche Wachstum wird mit 2 % veranschlagt.

a) Wie groß ist die Bevölkerungsanzahl im Jahr 2020?

b) Wie groß war die Bevölkerungsanzahl im Jahr 1970?

c) Wann wird Landau die 60.000 Personen-Marke erreicht haben?

d) Angenommen Landau hätte im Jahr 2020 eine Bevölkerungsanzahl von 53.595.
Wie hoch wäre dann der reelle Wachstumsprozentsatz gewesen?

Lösung:

a) $f(13) = 43.048 \cdot 1{,}02^{13} = 55.687{,}18 \approx 55.687$

b) $f(-37) = 43.048 \cdot 1{,}02^{-37} = 20.689{,}34 \approx 20.689$

$$c)\quad 43.048 \cdot 1{,}02^{x} = 60.000 \xrightarrow{:43.048} 1{,}02^{x} = \frac{60.000}{43.048}$$

$$\xrightarrow{\ln} x = \frac{\ln\left(\frac{60.000}{43.048}\right)}{\ln 1{,}02} \approx 16{,}77 \approx 17\,[Jahre]$$

Im Jahr 2.024 wird Landau etwa 60.000 Einwohner haben.

$$d)\quad 43.048 \cdot a^{13} = 53.595 \xrightarrow{:43.048} a^{13} = \frac{53.595}{43.048}$$

$$\xrightarrow{\sqrt[13]{\ }} a = \sqrt[13]{\frac{53.595}{43.048}} \approx \sqrt[13]{1{,}245} \approx 1{,}017$$

Durchschnittliches jährliches Wachstum: $1{,}7$ %

6.) Die Leiter

Eine Leiter der Länge 3,50 m lehnt an einer Mauer.

Der Fuß der Leiter ist 80 cm von der Mauer entfernt.

a) In welcher Höhe berührt die Leiter die Mauer?

b) Welchen Neigungswinkel hat die Leiter gegen den Boden?

<u>Lösung:</u>

a) $x^2 = 3{,}5^2 - 0{,}8^2 \Rightarrow x = \sqrt{3{,}5^2 - 0{,}8^2} = 3{,}407$

b) $\cos(\alpha) = \dfrac{0{,}8}{3{,}5} = 0{,}2286 \xrightarrow{\text{arccos}} \alpha = 76{,}787°$

7.) Der Drachen

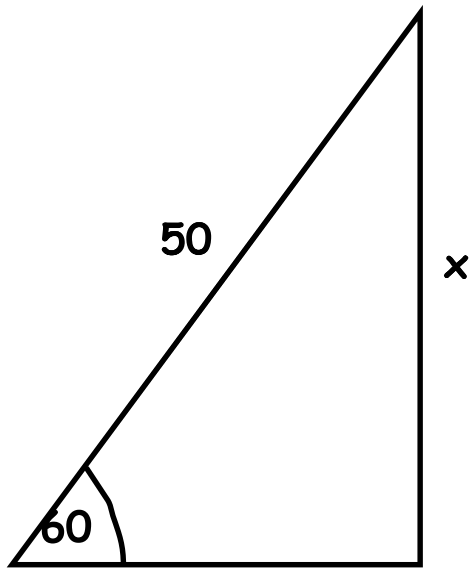
Holger lässt einen Drachen steigen. Schließlich ist die 50 m lange Schnur ganz abgewickelt. Schnur und Boden bilden miteinander einen Winkel von 60°.

Wie hoch steht der Drachen?

<u>Lösung:</u>

$$\sin(60) = \frac{x}{50}$$

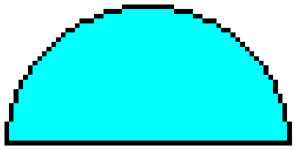
$$\Rightarrow x = 50 \cdot \sin(60) = 43{,}30$$

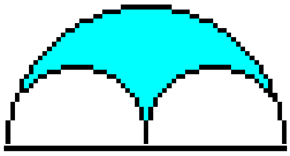


8.) Kreisflächen

Die Fläche des gegebenen

Halbkreises beträgt 8π cm^2.





Berechnen Sie daraus die gefärbte

Teilfläche des linken Halbkreises.

<u>Lösung:</u>

$$Ermittlung\ Radius: \quad A_{Halbkreis} = \frac{1}{2}r^2\pi = 8\pi \Rightarrow r = 4$$

$$Teilfläche: \quad A = 8\pi - \left(\frac{1}{2}r\right)^2 \pi = 8\pi - 4\pi = 4\pi$$

9.) Die kugelförmige Kuppel

Die Kuppel des Doms in St. Blasien hat die

Form einer Halbkugel.

Der Durchmesser der Kuppel beträgt 36 m.

a) Wie groß ist das Volumen der Kuppel?

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot r^3\cdot\pi$$

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot 18^3\cdot\pi$$

$$V = 12.214,51\left[m^3\right]$$

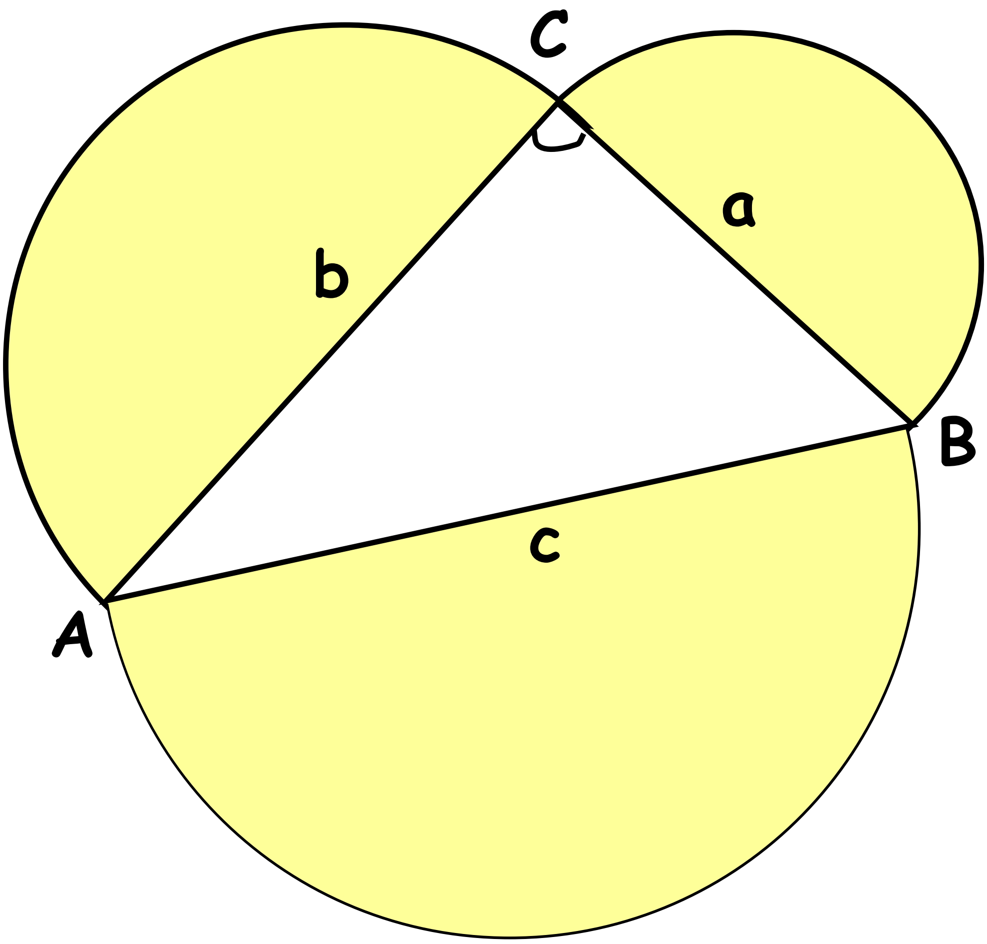
b) Wie viel Farbe würde man

benötigen, um sie zu streichen?

$$O = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot r^2\cdot\pi = 2\cdot r^2\cdot\pi \quad \Rightarrow \quad O = 2.035,75$$

10.) Der Satz des Pythagoras

Beweisen Sie, dass der Satz des Pythagoras auch für Halbkreisflächen über den Dreieckseiten gilt. Die Seitenlängen seien a = 6 cm und b = 8 cm.



Seite c:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow c = 10$$

Halbkreisfläche über Seite a:

$$A_a = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow A_a = \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \pi = \frac{9}{2}\pi$$

Halbkreisfläche über Seite b:

$$A_b = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow A_b = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \pi = 8\pi$$

Halbkreisfläche über Seite c:

$$A_c = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \pi \Rightarrow A_c = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \pi = \frac{25}{2}\pi$$

Probe: $$A_a + A_b = \frac{9}{2}\pi + 8\pi = \frac{25}{2}\pi = A_c \quad [q.e.d.]$$