13. Jgst.	3. Test	Datum: 08.12.2017
Kurs BGY 15/2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **e-Funktionen; Differentialrechnung; Reihendarstellung e-Funktion**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **12**

Die Funktion $f(x)=e^x$ kann durch folgende Reihenentwicklung dargestellt werden:

$$f(x) \quad = \quad e^x \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot x^k$$

a) Berechnen Sie die ersten 8 Summanden der Reihe in Abhängigkeit von x.

b) Begründen Sie anhand

(i) der 8 Summanden

(ii) des allgemeinen Summenausdrucks

dass die erste Ableitung der Funktion wieder die Funktion selbst ergibt – d.h. dass gilt: $f(x) \quad = \quad f'(x)$

Zusatzaufgabe: **10**

Wie müssten der Summenausdruck und die Ableitung für $g(x)=e^{2x}$ lauten?

In welcher Form könnten Sie Ihre Annahmen beweisen, wenn Sie den Summenausdruck zu Hilfe nehmen?

Aufgabe 2: **20**

Bilden Sie die 1. Ableitung der gegebenen Funktionen:

a) $f(x) \quad = \quad e^{4x^2-6x}$

b) $f(x) \quad = \quad \left(x^2-2x\right)\cdot e^{x^2}$

c) $f_k(x)=e^{kx}+kx^2+e^k$

d) $f(x) \quad = \quad \frac{x^4}{e^{3x}}$

Anmerkung: Bitte den Ausdruck wieder vereinfachen.

Aufgabe 3: | 6 |

Zeigen Sie, dass die erste Ableitung zu $f(x) = e^{e^{4x}}$ lautet:

$$f'(x) = 4 \cdot e^{e^{4x}+4x}$$

Aufgabe 4: | 15 |

Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $e^{4x} - 4e^{x} = 0$

b) $e^{2x} - 5e^{x} = 6$

c) $10 \cdot e^{-2x+1} = 20$

Aufgabe 5: | 4 |

Begründen Sie mit Hilfe der Potenzgesetze, warum die beiden Ausdrücke unterschiedlich sind: $\left(e^{x}\right)^{2}$ *und* $e^{x^{2}}$

Aufgabe 6: | 25 |

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-x}$ hinsichtlich folgender Kriterien:

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge der Funktion

b) Ermitteln Sie die Schnittstellen mit den Koordinatenachsen.

c) Zeigen Sie, dass die beiden ersten Ableitungen folgende Form annehmen können:

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^{x}} \quad \textit{und} \quad f''(x) = \frac{x-2}{e^{x}}$$

d) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion.

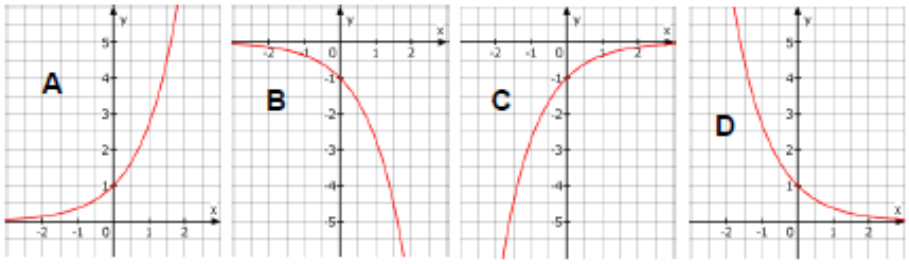
e) Ermitteln Sie die Wendepunkte der Funktion – die notwendige Bedingung genügt.

f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

Auswahlfragen:

20	

Ordnen Sie jeder Funktionsgleichung den passenden Graphen zu.



___ $f(x) = e^{-x}$

___ $g(x) = e^{x}$

___ $h(x) = -e^{x}$

___ $m(x) = -e^{-x}$

Welche Aussagen über die Zahl e sind wahr.
a) e ist eine reelle Zahl. b) e ist ein Bruch.
c) $e \approx 2{,}71828$. d) e hat eine Periode.

Wahr ist:
a) ☐ b) ☐
c) ☐ d) ☐

Gegeben sind f mit $f(x) = e^{x}$ und g mit $g(x) = e^{-x}$. Welche der Eigenschaften treffen auf den Graphen von f, welche auf g zu?
a) Der Graph ist streng monoton.
b) Der Graph ist immer rechtsgekrümmt.
c) Der Graph ist immer linksgekrümmt.
d) Der Graph verläuft durch den Punkt (1 | 0).
e) Der Graph schneidet die y-Achse bei 1.
f) Die positive x-Achse ist Asymptote.
g) Die negative x-Achse ist Asymptote.

Eigenschaft **trifft zu** für den Graphen von

	e^{x}	e^{-x}
a)	☐	☐
b)	☐	☐
c)	☐	☐
d)	☐	☐
e)	☐	☐
f)	☐	☐
g)	☐	☐

Wahr oder falsch?
a) Aus f mit $f(x) = e^{x}$ folgt $f'(x) = x \cdot e^{x-1}$
b) Aus f mit $f(x) = x \cdot e^{x}$ folgt $f''(x) = (x+2)e^{x}$
c) Aus f mit $f(x) = (e^{x})^{2}$ folgt $f'(x) = 2e^{2x}$
d) Aus f mit $f(x) = \frac{1}{e^{x}}$ folgt $f'(x) = -e^{-x}$

	Wahr	Falsch
a)	☐	☐
b)	☐	☐
c)	☐	☐
d)	☐	☐

Welche der Funktionen stimmt mit ihrer Ableitung überein?
$f(x) = 1{,}5e^{x-1} + 5$ $g(x) = 5e^{x+2}$
$h(x) = 2e^{-x} - 2e^{x}$ $k(x) = -e^{-x} + e^{x+1}$
$m(x) = -8e^{x}$

☐ f(x) ☐ g(x)
☐ h(x) ☐ k(x)
☐ m(x)

Anmerkung: Sie sollten 16 Kreuze setzen!

Aufgabe 1:

Lösung:

Die ersten 8 Summanden:

$$\sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} \cdot x^k = \frac{1}{0!} \cdot x^0 + \frac{1}{1!} \cdot x^1 + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \frac{1}{6!} \cdot x^6 + \frac{1}{7!} \cdot x^7$$

$$\sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} \cdot x^k = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{120} \cdot x^5 + \frac{1}{720} \cdot x^6 + \frac{1}{5.040} \cdot x^7$$

Ableitung:

$$f'(x) = 0 + 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + \frac{1}{120} \cdot x^5 + \frac{1}{720} \cdot x^6 = f(x)$$

Ableitung allgemein:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot x^k$$

$$\rightarrow \quad f'(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} \cdot x^{k-1} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \cdot x^{k-1} = f(x)$$

Zusatzaufgabe:

Lösung:

$$f(x) = e^{2x} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot (2x)^k$$

$$\rightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot e^{2x} = 2 \cdot \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot (2x)^k$$

Aufgabe 2:

Lösung:

a) $f'(x) = e^{4x^2-6x}\cdot(8x-6)$

$f'(x) = (2x-2)\cdot e^{x^2} + (x^2-2x)\cdot e^{x^2}\cdot 2x$

b) $f'(x) = \left[(2x-2)+(2x^3-4x^2)\right]\cdot e^{x^2} = (2x^3-4x^2+2x-2)\cdot e^{x^2}$

c) $f_k'(x) = ke^{kx} + 2kx$

d) $f'(x) = 4x^3e^{-3x} + (-3)x^4e^{-3x} = \dfrac{4x^3-3x^4}{e^{3x}}$

Aufgabe 3:

Lösung:

Ableitung mit 3-facher Kettenregel

$f'(x) = e^{e^{4x}}\cdot e^{4x}\cdot 4$

1. Potenzgesetz: Addition der Exponenten bei gleicher Basis

$f'(x) = 4\cdot e^{e^{4x}+4x}$

Aufgabe 4:

Lösung:

a)

$e^{4x}-4e^x = 0 \xrightarrow{\text{Ausklammern}} (e^{3x}-4)e^x = 0$

$\xrightarrow{\text{Satz vom Nullprodukt}} (e^{3x}-4)e^x \neq 0 \quad und \quad e^{3x}=4 \xrightarrow{\ln} x = \frac{1}{3}\ln 4$

b)

$$e^{2x}-5e^{x}-6 \;=\; 0 \quad \xrightarrow[e^x=u]{Substitution} \quad u^2-5u-6 \;=\; 0$$

$$u_1=-1 \quad und \quad u_2=6$$

$$\xrightarrow[e^x=u]{\mathrm{Re}-Substitution} \quad e^x=-1 \quad nicht\ definiert \quad und \quad e^x=6 \quad \xrightarrow{\ln} \quad x=\ln 6$$

c) $10\cdot e^{-2x+1} \;=\; 20$

$$10\cdot e^{-2x+1} \;=\; 20 \quad \xrightarrow{:10} \quad e^{-2x+1} \;=\; 2 \quad \xrightarrow{\ln} \quad -2x+1 \;=\; \ln 2$$

$$\rightarrow \quad x \;=\; \frac{1}{2}\left(1-\ln 2\right) \quad \rightarrow \quad x \;=\; 0{,}5-\ln\sqrt{2} \quad \approx \quad 0{,}153$$

Aufgabe 5:

Begründen Sie mit Hilfe der Potenzgesetze, warum die beiden Ausdrücke unterschiedlich sind: $\left(e^x\right)^2 \quad und \quad e^{x^2}$

Lösung:

$$\left(e^x\right)^2 \;=\; e^x\cdot e^x \;=\; e^{x+x} \;=\; e^{2x}$$

$$e^{x^2} \;=\; e^{x\cdot x} \;\neq\; e^{2x}$$

Aufgabe 6:

Untersuchen Sie die Funktion $f\left(x\right) \;=\; x\cdot e^{-x}$ hinsichtlich folgender Kriterien:

Lösung:

Definitionsmenge: $D \;=\; \Re \quad weil\ e^x\neq 0$

$$S_y\left(0\mid 0\right) \quad und \quad Nullstelle: \quad x=0$$

Ableitungen:

$$f'(x) = 1\cdot e^{-x} + x\cdot e^{-x}\cdot(-1) = (1-x)\cdot e^{-x} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f''(x) = (-1)\cdot e^{-x} + (1-x)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = \left[(-1)+(-1+x)\right]\cdot e^{-x} = \frac{x-2}{e^x}$$

Extrema:

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x} = 0 \rightarrow 1-x = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f''(1) = \frac{1-2}{e^1} = -\frac{1}{e} < 0 \rightarrow Max\left(1 \,\middle|\, \frac{1}{e}\right)$$

Wendepunkt:

$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x} = 0 \rightarrow x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow W\left(2 \,\middle|\, \frac{2}{e^2}\right)$$

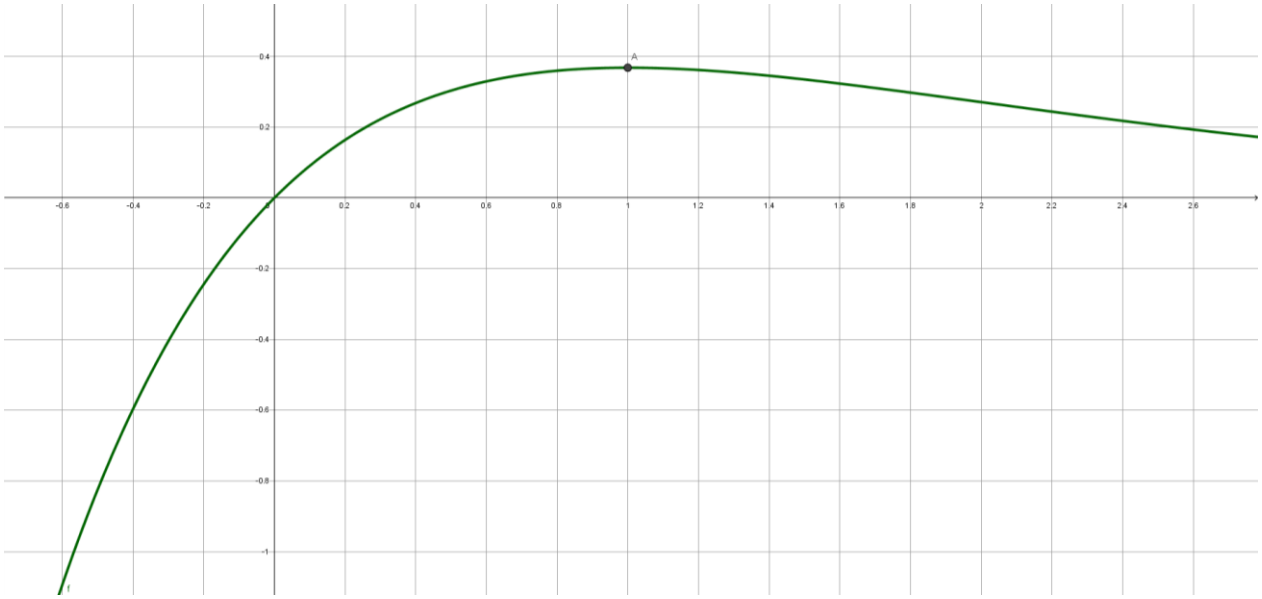
Grenzwerte:

Regel von de L'Hospital

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} \underset{\frac{1}{\infty}}{\rightarrow} 0$$

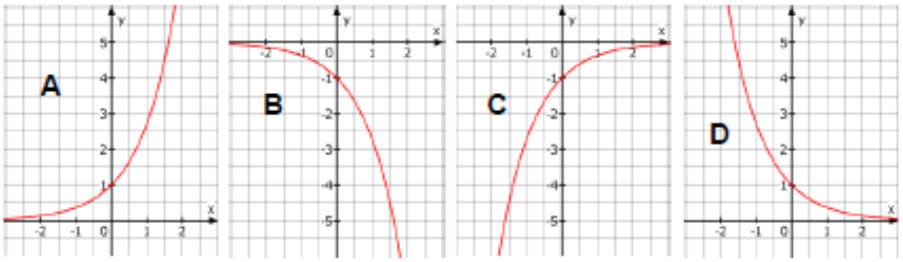
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} \underset{\frac{-\infty}{0^+}}{\rightarrow} -\infty$$

Graph der Funktion:



Lösung:

Ordnen Sie jeder Funktionsgleichung den passenden Graphen zu.



D $f(x) = e^{-x}$

A $g(x) = e^{x}$

B $h(x) = -e^{x}$

C $m(x) = -e^{-x}$

Welche Aussagen über die Zahl e sind wahr.
a) e ist eine reelle Zahl. b) e ist ein Bruch.
c) $e \approx 2{,}71828$. d) e hat eine Periode.

Wahr ist:
a) ☑ b) ☐
c) ☑ d) ☐

Gegeben sind f mit $f(x) = e^{x}$ und g mit $g(x) = e^{-x}$. Welche der Eigenschaften treffen auf den Graphen von f, welche auf g zu?
a) Der Graph ist streng monoton.
b) Der Graph ist immer rechtsgekrümmt.
c) Der Graph ist immer linksgekrümmt.
d) Der Graph verläuft durch den Punkt (1 | 0).
e) Der Graph schneidet die y-Achse bei 1.
f) Die positive x-Achse ist Asymptote.
g) Die negative x-Achse ist Asymptote.

Eigenschaft **trifft zu** für den Graphen von

	e^x	e^{-x}
a)	☑	☑
b)	☐	☐
c)	☑	☑
d)	☐	☐
e)	☑	☑
f)	☐	☑
g)	☑	☐

Wahr oder falsch?
a) Aus f mit $f(x) = e^{x}$ folgt $f'(x) = x \cdot e^{x-1}$
b) Aus f mit $f(x) = x \cdot e^{x}$ folgt $f''(x) = (x+2)e^{x}$
c) Aus f mit $f(x) = (e^{x})^{2}$ folgt $f'(x) = 2e^{2x}$
d) Aus f mit $f(x) = \frac{1}{e^{x}}$ folgt $f'(x) = -e^{-x}$

	Wahr	Falsch
a)	☐	☑
b)	☑	☐
c)	☑	☐
d)	☑	☐

Welche der Funktionen stimmt mit ihrer Ableitung überein?
$f(x) = 1{,}5e^{x-1} + 5$ $g(x) = 5e^{x+2}$
$h(x) = 2e^{-x} - 2e^{x}$ $k(x) = -e^{-x} + e^{x+1}$
$m(x) = -8e^{x}$

☐ f(x) ☑ g(x)
☐ h(x) ☐ k(x)
☑ m(x)