13. Jgst.	2. Kursarbeit	Datum: 23.11.2017
Klasse: BGY LK 2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Bedingte W'keit & Vierfeldertafel; Binomial- & Normalverteilung; Sigma-Intervalle**

Name:	
Punkte:	Note:

Aufgabe 1: **Binomialverteilung I** **28**

a) In einer Urne liegen zwei rote, zwei grüne und eine goldene Kugel. Beschreiben Sie ein Zufallsexperiment und ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit sich mit dem folgenden Term berechnen lässt:

$$\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^1$$

Lösung: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei 5 Versuchen mit Zurücklegen 4 Mal die goldene Kugel zu ziehen.

$$B_{5;0,2}(X=4) \;=\; \binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^1$$

b) Ein Schnellrestaurant veranstaltet ein Gewinnspiel und schenkt jedem Kunden ein Los. Die Wahrscheinlichkeit für einen Sofortgewinn liegt bei p = 0,2.
Ordnen Sie den folgenden Ereignissen den richtigen Term (P_1 bis P_6) der Berechnung der Wahrscheinlichkeit zu:

(i) Unter **10** Losen sind **keine** Sofortgewinne.
(ii) Unter **10** Losen sind genau **4** Sofortgewinne.
(iii) Unter **10** Losen ist **mindestens ein** Sofortgewinn.

$$P_1=\left(\frac{1}{5}\right)^{10} \qquad P_2=\binom{10}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^6$$
$$P_3=1-\left(\frac{1}{5}\right)^{10} \qquad P_4=\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$
$$P_5=1-\left(\frac{4}{5}\right)^{10} \qquad P_6=\binom{10}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^5$$

Lösung: **(i) P_4** **(ii) P_2** **(iii) P_5**

c) Eine Zufallsvariable X sei binomialverteilt mit dem Parameter n = 100.

X habe die Varianz V(X) = 9. Wie hoch sind p und der Erwartungswert?

Lösung:

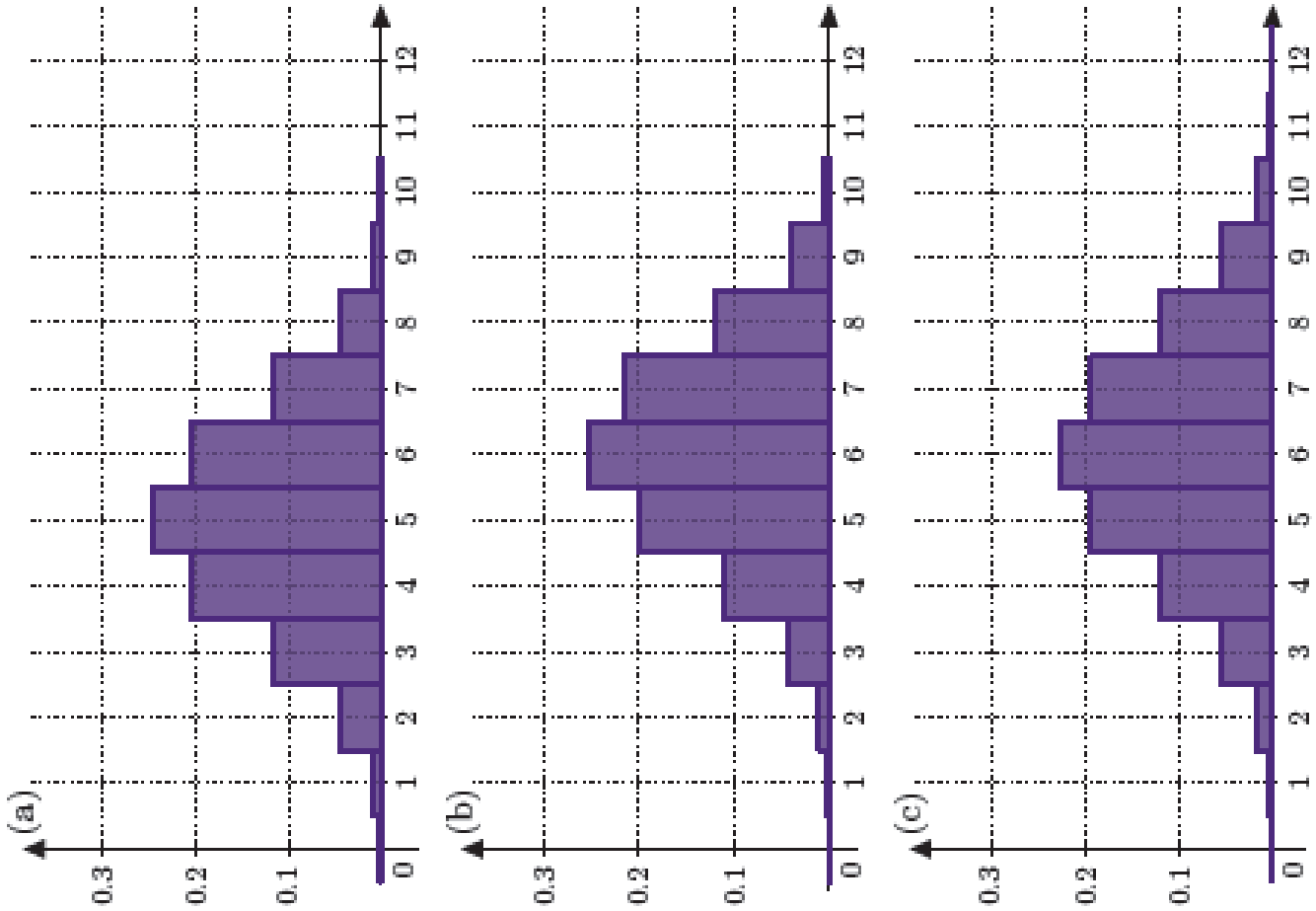
$$\mu = n \cdot p \quad \xrightarrow{n=100} \quad \mu = 100 \cdot p$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) \quad \xrightarrow[\mu = 100 \cdot p]{\sigma^2 = 9} \quad 9 = 100 \cdot p \cdot (1-p)$$

$$\rightarrow \quad 9 = -100p^2 + 100p \quad \rightarrow \quad 0 = -100p^2 + 100p - 9$$

$$\rightarrow \quad p_1 = 0{,}1 \quad \rightarrow \quad \mu_1 = 10 \quad und \quad p_2 = 0{,}9 \quad \rightarrow \quad \mu_2 = 90$$

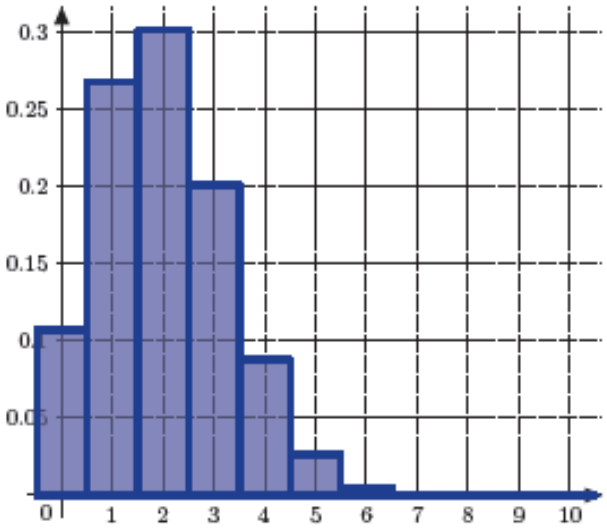
d) Beurteilen Sie, welches der folgenden Diagramme zu einer Binomialverteilung mit n = 10 Versuchen und einer Erfolgswahrscheinlichkeit von p = 0,6 gehört.



Lösung:

Diagramm (b), da der Erwartungswert bei 6 liegt und die Wahrscheinlichkeiten rechts vom Erwartungswert etwas größer sind als links wegen der p > 0,5

e) Die Abbildung zeigt eine Binomialverteilung.



Versuchen Sie, aus dem Graphen die Werte für n, μ und p zu bestimmen.

Zeigen Sie die Korrektheit Ihrer Werte, indem Sie die Wahrscheinlichkeiten für B(X=1) und B(X=2) berechnen und erläutern Sie, wo diese Ergebnisse im Graphen enthalten sind.

Lösung:

n = 10, μ = 2 und p = 0,2

$$B_{10;0,2}(X=1) = \binom{10}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9 = 0,2684$$

$$B_{10;0,2}(X=2) = \binom{10}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^8 = 0,302$$

Alternative 1:

n = 8, μ = 2 und p = 0,25

$$B_{8;0,25}(X=1) = \binom{8}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^7 = 0,267$$

$$B_{8;0,25}(X=2) = \binom{8}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^6 = 0,3115$$

Alternative 2 => nicht möglich wegen B(X=2)

n = 6, μ = 2 und p = 1/3

$$B_{6;\frac{1}{3}}(X=1) = \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0,2633$$

$$B_{6;\frac{1}{3}}(X=2) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0,3292$$

Aufgabe 2: Die Schießbude | 30 |

Ein Schießbudenbesitzer hat festgestellt, dass die Trefferwahrscheinlichkeit in den späten Abendstunden p = 0,1 pro Schuss beträgt.

Die Gewinne für die Trefferanzahl bei 5 Schüssen sind wie folgt verteilt:

0 – 2 Treffer:	**kein Gewinn**	**3 Treffer:**	**25,00 €**
4 Treffer:	**40,00 €**	**5 Treffer:**	**100.000,00 €**

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei 5 Schüssen mindestens 2 Treffer zu erzielen.

Lösung:

$$B_{5;0,1}(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{5} \binom{5}{k} \cdot 0,1^k \cdot 0,9^{5-k} = 0,08146$$

b) Ermitteln Sie die Mindestanzahl der notwendigen Schüsse, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,95

(i) Mindestens einen Treffer zu erzielen.

(ii) Mindestens zwei Treffer zu erzielen.

Lösung:

$$(i) \quad B_{n;0,1}(X \geq 1) \geq 0,95 \rightarrow 1 - B_{n;0,1}(X = 0) \geq 0,95$$

$$\rightarrow B_{n;0,1}(X = 0) \leq 0,05 \rightarrow \binom{n}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^n \leq 0,05$$

$$\rightarrow 0,9^n \leq 0,05 \rightarrow n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,9} \rightarrow n \geq 28,43 \rightarrow 29$$

$$(ii) \quad B_{n;0,1}(X \geq 2) \geq 0,95 \rightarrow 1 - B_{n;0,1}(X \leq 1) \geq 0,95$$

$$\rightarrow B_{n;0,1}(X \leq 1) \leq 0,05$$

$$\rightarrow \binom{n}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^n + \binom{n}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^{n-1} \leq 0,05$$

$$\rightarrow 0,9^n + n \cdot 0,1 \cdot 0,9^{n-1} \leq 0,05 \rightarrow n \geq 45,53 \rightarrow 46$$

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Trefferanzahl im doppelten $\sigma - Intervall$ liegt?

Lösung:

$$\mu = 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}5 \quad und \quad \sigma = \sqrt{0{,}5 \cdot 0{,}9} = \sqrt{0{,}45} \approx 0{,}6708$$

$$\rightarrow \quad \sigma - Intervall = [0\,;2]$$

$$\rightarrow \quad B_{5;0,1}(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{5}{k} \cdot 0{,}1^k \cdot 0{,}9^{5-k} = 0{,}99144$$

d) Wie hoch darf/muss der Einsatz sein, damit es sich um ein faires Gewinnspiel handelt?

Lösung:

Treffer	**0 - 2**	**3**	**4**	**5**
Gewinn	**0**	**25,00**	**40,00**	**100.000,00**
W'keit	**0,99144**	**0,0081**	**0,00045**	**0,00001**

$$B_{5;0,1}(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0081$$

$$B_{5;0,1}(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}00045$$

$$B_{5;0,1}(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}1^5 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}00001$$

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}99144 + 25 \cdot 0{,}0081 + 40 \cdot 0{,}00045 + 100.000 \cdot 0{,}00001 = 1{,}2205[€]$$

Aufgabe 3: Normalverteilung I

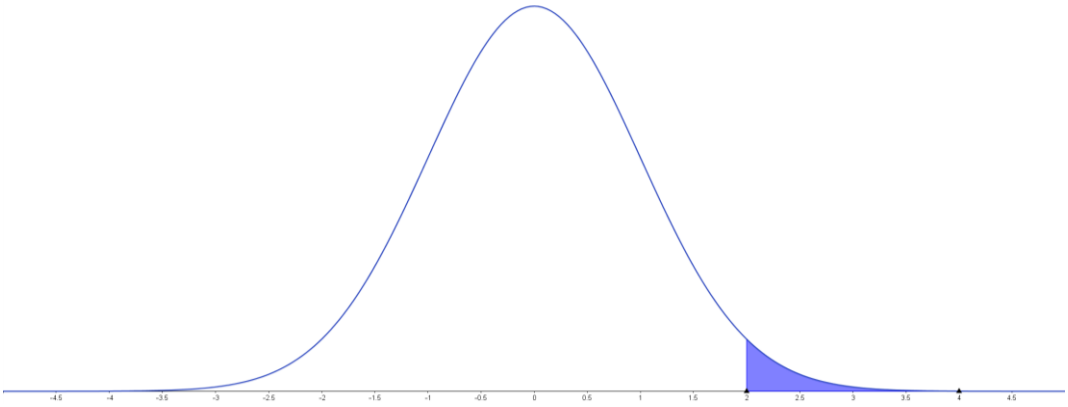
Eine Firma produziert Schokoladennikoläuse mit einem Sollgewicht von 200 g. Die Standardabweichung beträgt 10 g.
Das Gewicht der Nikoläuse kann als normalverteilt angesehen werden.
Bitte Ihre Ergebnisse in Form von Skizzen darstellen – verwenden Sie hierzu die Anlage.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Nikolaus
   (i) mehr als 220 g wiegt.
   (ii) weniger als 185 g wiegt.

Lösung:

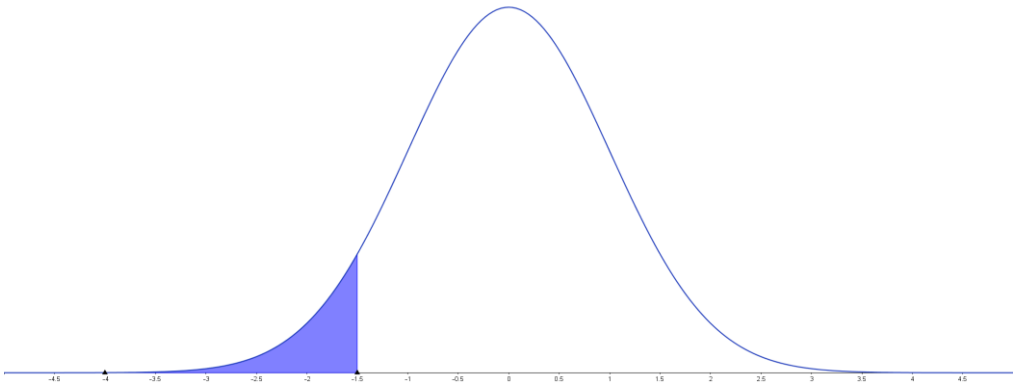
$$P(X > 220) = 1 - P(X \leq 220) = 1 - \Phi\left(\frac{220-200}{10}\right)$$

$$P(X > 220) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275$$



$$P(X < 185) = \Phi\left(\frac{185-200}{10}\right) = \Phi(-1{,}5)$$

$$P(X < 185) = 1 - \Phi(1{,}5) = 1 - 0{,}93319 = 0{,}06681$$

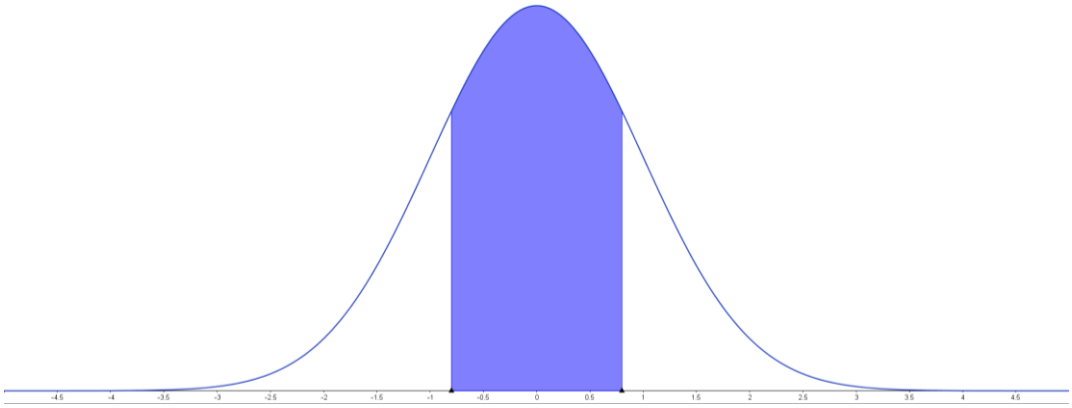


b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Nikolaus höchstens 208 g und mindestens 192 g wiegt.

Lösung:

$$P(192 \le X \le 208) = 2\Phi\left(\frac{208-200}{10}\right)-1 = 2\Phi(0{,}8)-1$$

$$P(192 \le X \le 208) = 2 \cdot 0{,}78814 - 1 = 0{,}57628$$

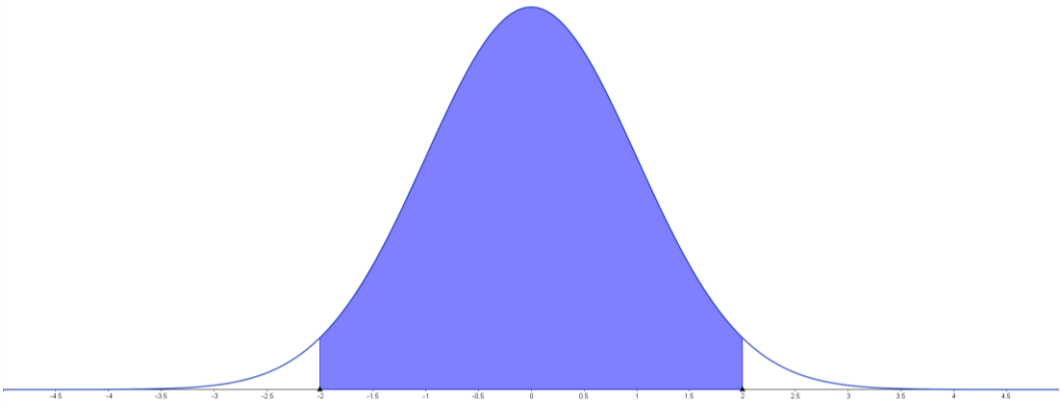


c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Nikolaus nicht verkauft werden kann, weil er um mehr als 20 g vom Standardwert (200 g) abweicht.

Lösung: vgl. Ergebnis von Teilaufgabe a)

$$P(X > 220) = 0{,}02275 \xrightarrow[P(X<180)]{\cdot 2} 0{,}0455$$

$$\textit{oder}: \quad 1 - P(180 \le X \le 220) = 1 - 2\Phi(2) = 1 - 0{,}9545 = 0{,}0455$$

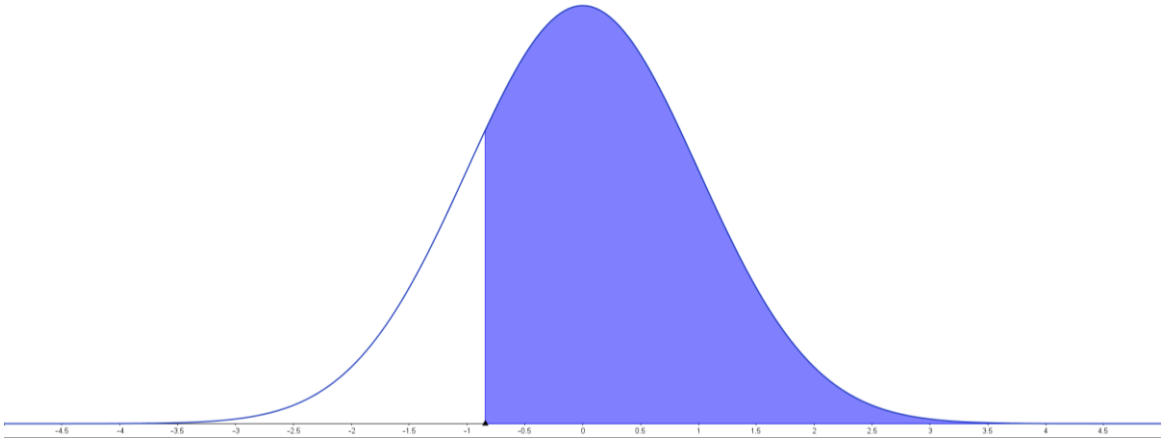


d) Welches Mindestgewicht besitzen 80 % der Nikoläuse?

Lösung:

$$P(X \geq k) = 0{,}8 \rightarrow 1 - P(X < k) = 0{,}8 \rightarrow P(X < k) = 0{,}2$$

$$\Phi(z) = 0{,}2 \xrightarrow{\text{Tabelle}} z = -0{,}84 = \frac{k - 200}{10} \rightarrow k = 191{,}6$$

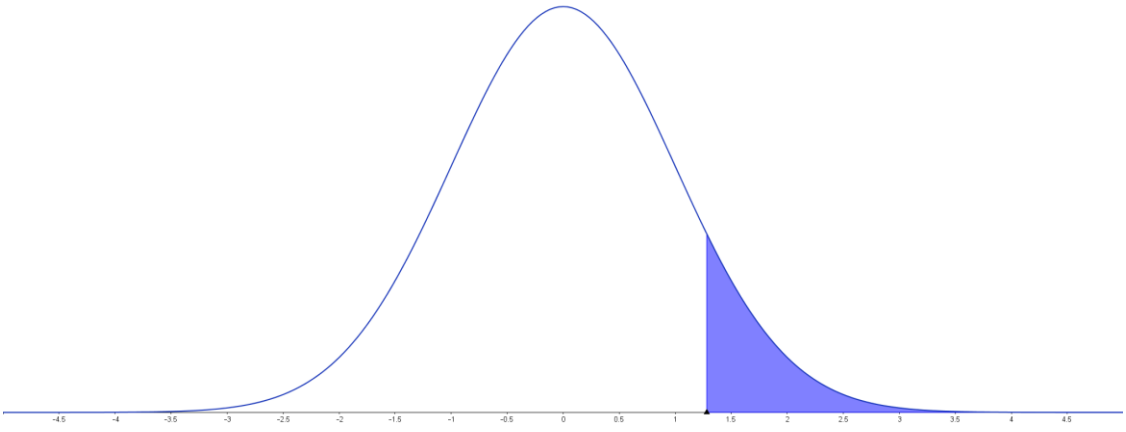


e) Welches Gewicht besitzen die 10 % schwersten Nikoläuse?

Lösung:

$$P(X \geq k) = 0{,}1 \rightarrow 1 - P(X < k) = 0{,}1 \rightarrow P(X < k) = 0{,}9$$

$$\Phi(z) = 0{,}9 \xrightarrow{\text{Tabelle}} z = 1{,}28 = \frac{k - 200}{10} \rightarrow k = 212{,}8$$



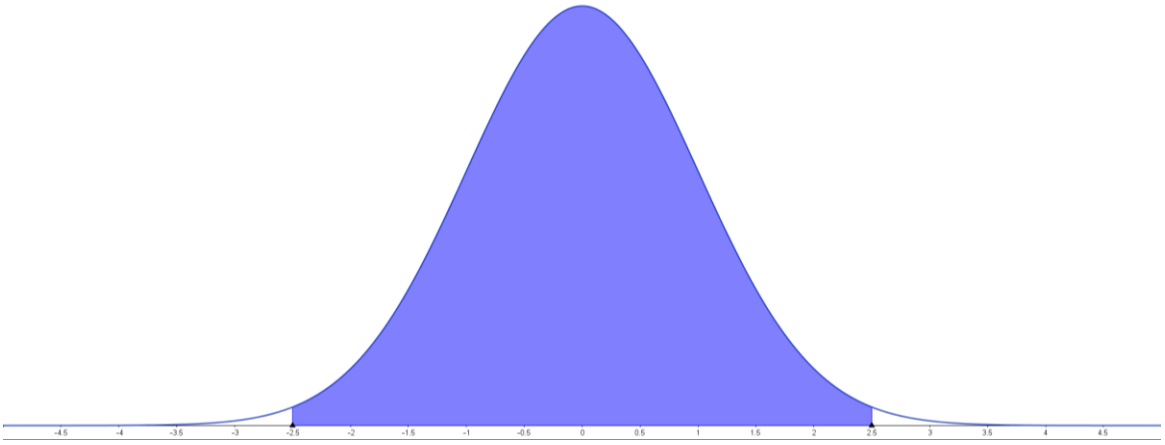
Durch ein neues Herstellungsverfahren gelingt es, die Standardabweichung um 20 % zu verbessern – also zu verringern.

f) Ermitteln Sie nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Nikolaus in den Verkauf gehen kann – d.h. dass das Gewicht höchstens um 20 g vom Standardwert (200 g) abweicht.

Lösung:

$$P(180 \le X \le 220) = 2\Phi\left(\frac{220-200}{8}\right)-1 = 2\Phi(2{,}5)-1$$

$$P(180 \le X \le 220) = 1-0{,}99379 = 0{,}98758$$



Aufgabe 4: **Vierfeldertafel, Baumdiagramm und bedingte Wahrscheinlichkeit** | **30**

Ein Kraftfahrzeughändler weiß aus langjähriger Erfahrung, dass bei den in Zahlung genommenen Wagen 50 % Mängel am Motor, 70 % Mängel an der Karosserie und 30 % an Motor und Karosserie aufweisen.

a) Vervollständigen Sie hieraus die nachfolgende Vierfeldertafel:

	M: Motormangel		Summe
K: Karosseriemangel			
Summe			

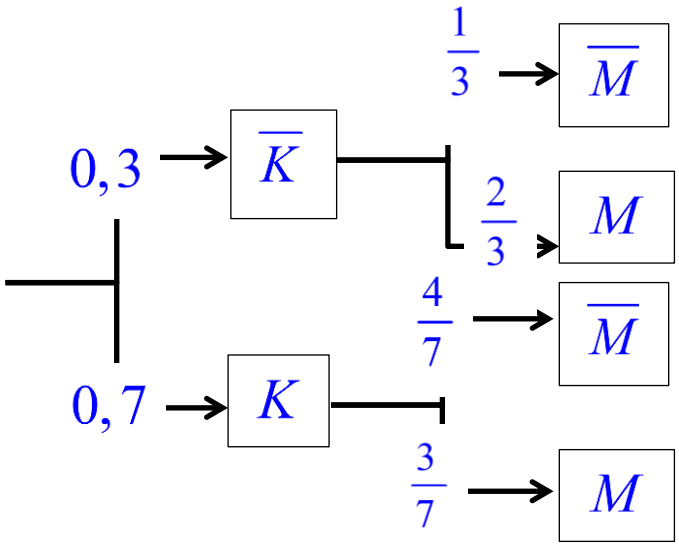
Lösung:

	M: Motormangel	$\overline{M}$	Summe
K: Karosseriemangel	**0,3**	**0,4**	**0,7**
$\overline{K}$	**0,2**	**0,1**	**0,3**
Summe	**0,5**	**0,5**	**1,0**

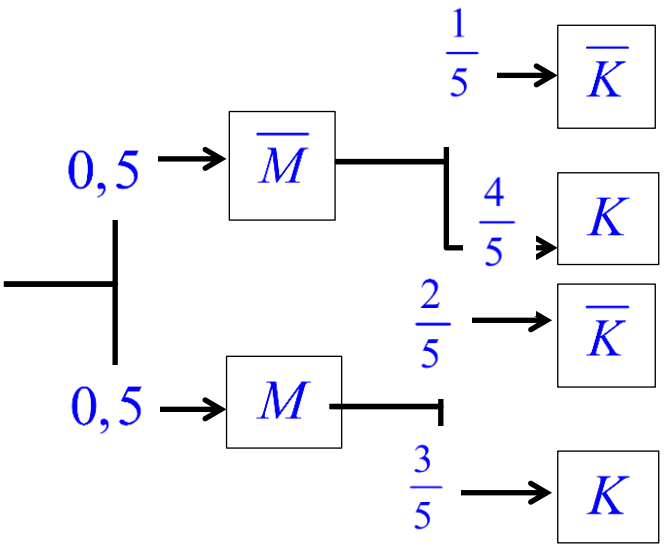
b) Wie müssten die beiden zugehörigen Baumdiagramme aussehen, wenn man einmal mit der Karosserie auf der ersten Stufe beginnt und ein zweites Mal mit dem Motor auf der ersten Stufe startet?

Lösung:

Start: Karosserie



Start: Motor



c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein in Zahlung genommener Wagen

(i) ohne Mängel an Motor und Karosserie ist?

(ii) einen Mangel am Motor besitzt, wenn bekannt ist, dass bereits die Karosserie schadhaft ist?

Lösung:

$$(i) \quad P\left(\overline{M} \cap \overline{K}\right) = 0{,}1$$

$$(ii) \quad P_K(M) = \frac{P(M \cap K)}{P(K)} \rightarrow P_K(M) = \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7} \approx 0{,}4286$$

Zusatzaufgabe: **Bedingte Wahrscheinlichkeit**

Zeichnen Sie zu folgenden Mengenrelationen die Mengendiagramme und geben Sie zu den Ereignissen A und B die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ an, wenn gilt:

a) $A \subset B$ b) $B \subset A$ c) $A = \Omega$

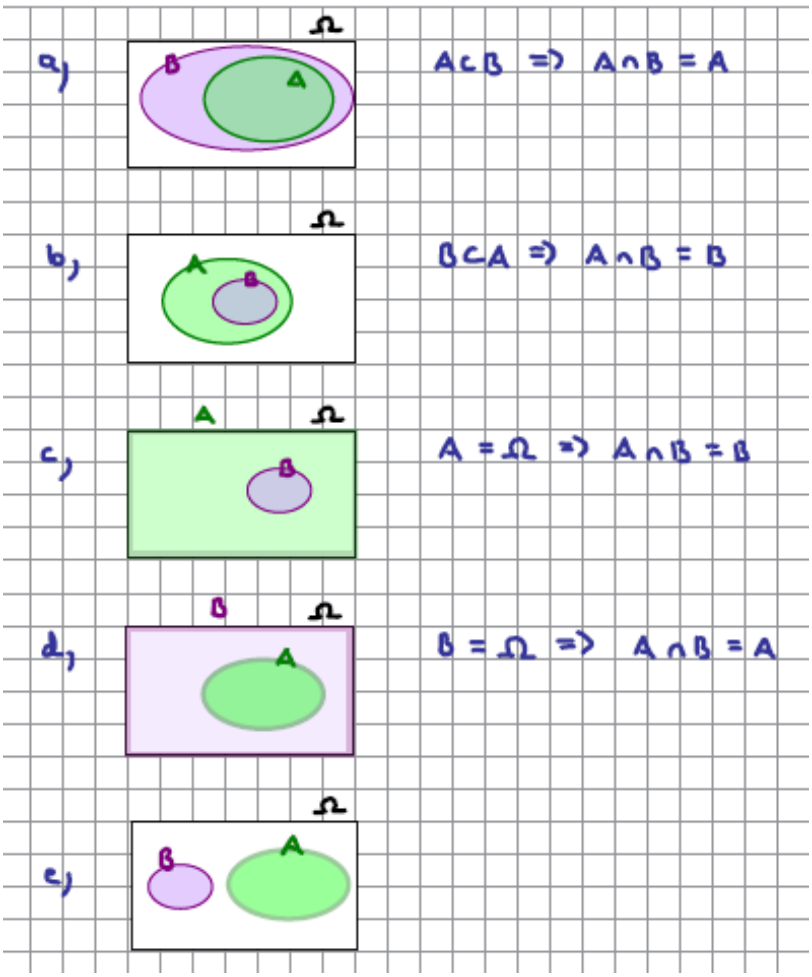
d) $B = \Omega$ e) $A \cap B = \{\ \}$

Lösung:

$$a)\quad A \subset B \rightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{A \subset B \rightarrow A \cap B = A} \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$b)\quad B \subset A \rightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{B \subset A \rightarrow A \cap B = B} \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$c)\quad A = \Omega \rightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{A = \Omega \rightarrow A \cap B = B} \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$d)\quad B = \Omega \rightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{B = \Omega \rightarrow A \cap B = A} \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$e)\quad A \cap B = \{\ \} \rightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{A \cap B = \{\ \}} \frac{P(\{\ \})}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$