13. Jgst.	1. Kursarbeit	Datum: 22.09.2017
Klasse: BGY LK 2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: Grundlagen W'keit; Baumdiagramm; Pfadregeln; Erwartungswert; Kombinatorik; Bedingte W'keit

Name:	
Punkte:	Note:

Aufgabe 1: Boule-Ereignisse am Baumdiagramm | 18 |

Sepp und Herbert sind passionierte Boulespieler.
Sepp gewinnt ein Spiel mit der Wahrscheinlichkeit von g.

Es gilt folgende Vereinbarung:

Sieger ist, wer zuerst zwei von drei Spielen gewinnt, d.h. es müssen max. drei Spiele durchgeführt werden.

a) Bilden Sie das zugehörige Baumdiagramm.

b) Beschreiben Sie die Ergebnismenge mit S (Sepp gewinnt) und H (Herbert gewinnt).

c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse
(i) A = „Sepp gewinnt"
(ii) B = „Herbert gewinnt".

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Sepp, wenn er der Wert für g = 0,6 beträgt?

Aufgabe 2: Hypergeometrische Verteilung

Unter 25 Losen befinden sich 8 Gewinnlose. | 18 |
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter **fünf** zufällig ausgewählten Losen

a) genau ein Gewinnlos befindet.

b) nur Gewinnlose befinden.

c) höchstens ein Gewinnlos befindet.

d) Wie lautet das Gegenereignis zu b) und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit?

e) Wie viele Gewinnlose sind im Durchschnitt bei der Ziehung von fünf Losen zu erwarten?

Aufgabe 3: Kindergeburtstag | 12 |

An einem Kindergeburtstag nehmen 10 Mädchen und 5 Jungen teil.
Für die Schnitzeljagd wird eine Gruppe aus 4 Kindern per Los bestimmt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht die Gruppe

a) nur aus Mädchen
b) aus 2 Mädchen und 2 Jungen
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Gruppe beide Geschlechter vertreten sind?

Aufgabe 4: Eiscafé-Kombinatorik | 12 |

Das Eiscafé **C O R N N E T T A R I A T I S T A**
besitzt eine umfangreiche Speisenauswahl:
In der Eisspeisekarte gibt es insgesamt 10 Kalt- und 8 Heißgetränke,
10 Eisbechervariationen und schließlich 4 Waffelkreationen.

a) Wie viele mögliche Speisefolgen könnte man zusammenstellen, wenn man 1 Kaltgetränk – 1 Eisbecher – 1 Waffelkreation und abschließend 1 Heißgetränk konsumieren möchte?

b) Kuno Knödel isst gerne Eisbecher. Heute genehmigt er sich **drei** .

Wie viele Auswahlmengen könnte er bilden, wenn

(i) alle Becher verschieden sein sollen und die Reihenfolge wichtig ist?
(ii) alle Becher verschieden sein sollen ohne Beachtung der Reihenfolge?
(iii) die Becher auch gleich sein dürfen?

c) Wie viele Worte (auch sinnfreie) können aus Namen des Eiscafés gebildet werden, wenn alle Buchstaben verwendet werden?

Aufgabe 5: Baumdiagramm | 12 |

In einer Urne sind 4 weiße und eine unbekannte Anzahl roter Kugeln.

a) Es werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Wie viele rote Kugeln waren vorhanden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln weiß sind, $\frac{1}{6}$ beträgt?

b) Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Wie viele rote Kugeln waren vorhanden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Kugel weiß ist, $\frac{17}{28}$ beträgt?

Aufgabe 6: Pizza-Aufgaben mit Baumdiagramm | **18** |

Bei in einem Pizza-Lokal servierten Pizzen werden durchschnittlich 1,8 % reklamiert, beim Heimservice beträgt die entsprechende Reklamationsquote 2,5 %. 68 % aller hergestellten Pizzen werden im Lokal serviert, der Rest wird vom Heimservice ausgeliefert.

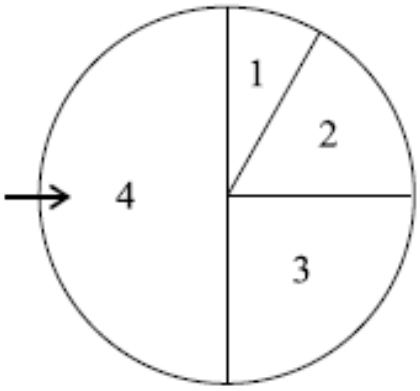
a) Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und ermitteln Sie, wie viel Prozent aller Pizzen insgesamt reklamiert werden.

b) Die Pizza „Hotfritz" wird durchschnittlich von 3 % aller Kunden bestellt. Wie viele Bestellungen müssen eingehen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % mindestens eine Bestellung für „Hotfritz" ist?

c) Aufgrund von Renovierungsmaßnahmen kann das Lokal nicht komplett besetzt werden; daher setzt die Pizzeria mehr auf den Heimservice. Pizzen im Lokal sind zu 97 % einwandfrei, während nur 1 % aller Heimservice-Pizzen reklamiert werden.
Wie hoch ist der Anteil der Pizzen, die im Lokal gegessen werden bzw. welchen Anteil umfasst der Heimservice, wenn 98,4 % aller Pizzen einwandfrei sind?

Aufgabe 7: Glücksrad mit Baumdiagramm | **6** |

Ein Glücksrad besteht aus vier Kreissektoren, die mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 versehen sind.
Die Mittelpunktswinkel der verschiedenen Sektoren haben die Weiten 30 °, 60 °, 90 ° und 180 ° (siehe Abbildung).



Nach jeder Drehung gilt diejenige Zahl als gezogen, auf deren Kreissektor der feststehende Pfeil zeigt.

Wie groß müsste der zur Zahl 1 gehörende Mittelpunktswinkel sein, damit bei dreimaligem Drehen mit 99,9%-iger Wahrscheinlichkeit höchstens zweimal die Zahl 1 gezogen wird?

Aufgabe 8: Vierfeldertafel, Baumdiagramm und bedingte Wahrscheinlichkeit

Ein Berufskolleg hat 1000 Schüler. Die folgende unvollständige Vierfeldtafel gibt Aufschluss darüber, wie die Handys auf die Schüler verteilt sind.

a) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel, berechnen Sie die relativen Häufigkeiten und tragen sie diese in eine neue Vierfeldtafel ein.

	B: weiblich		**Summe**
A: Handybesitzer	**410**		
		79	
Summe	**524**		

	B: weiblich		**Summe**
A: Handybesitzer			
Summe			

Gegeben sei nun eine ausgefüllte Vierfeldertafel:

	B: weiblich		Summe
A: Handybesitzer	0,4	0,25	0,65
	0,15	0,2	0,35
Summe	0,55	0,45	1

b) Wie müssten die beiden zugehörigen Baumdiagramme aussehen, wenn man einmal mit dem Geschlecht auf der ersten Stufe beginnt und ein zweites Mal mit dem Handybesitz auf der ersten Stufe startet?

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für

(i) $P_B(A)$ (ii) $P_A(B)$

und erklären Sie die ermittelten Wahrscheinlichkeiten anhand des Sachverhalts

Es gelten folgende neue Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A \cap \overline{B}) = 0,5 \qquad P(\overline{A} \cap B) = 0,1 \qquad P(A) = 0,8$$

d) Erstellen Sie nun hieraus eine Vierfeldertafel.

e) Bestimmen Sie $P_B(A)$

Wählen Sie hier entweder Aufgabe *9 und 10* oder nur die Aufgabe *11*

Aufgabe 9: Mengen und Mengenoperationen | 14 |

Im Supermarkt ist Obsttag. Von insgesamt 100 Testkäufern kaufen 95 % Obst. 70 Personen kaufen Äpfel (Menge A) und 45 kaufen Birnen (=Menge B).

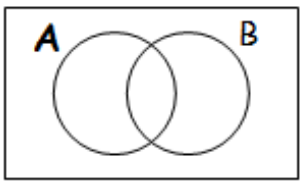
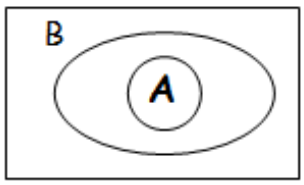
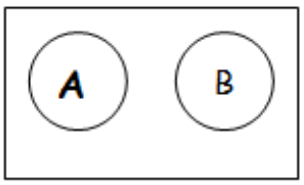
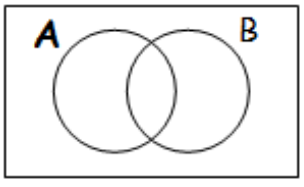
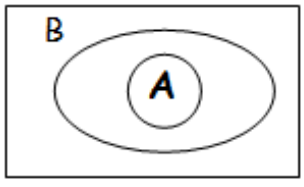
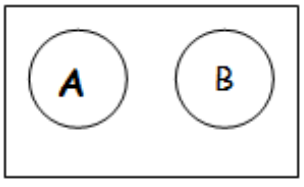
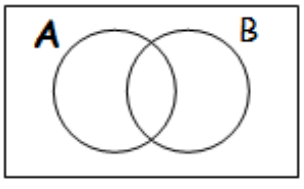
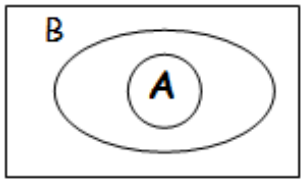
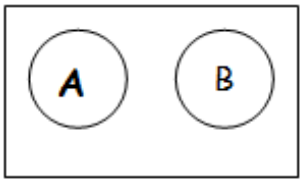
a) Bilden Sie die Gesamtsituation in einem Mengendiagramm ab.

Bestimmen Sie nun die Anzahl der Personen gemäß folgender Mengendarstellungen und beschreiben Sie die gesucht Menge:

b) $|A \cup B|$ c) $|A \setminus B|$ d) $|\overline{A \cap B}|$

Aufgabe 10: Ereignisse in Venn-Diagrammen | 18 |

Schraffieren Sie jeweils in den folgenden drei Diagrammen die Ereignisse:

$\overline{A} \cup B$			
$A \cap \overline{B}$			
$A \setminus B$			

Aufgabe 11: **Spielautomat Lucky Fruit**

Der elektrisch gesteuerte Geldspielautomat „Lucky Fruit" funktioniert folgendermaßen:
Auf einem Bildschirm erscheint eine von drei Früchten mit den in Klammern stehenden Anzeigewahrscheinlichkeiten:

Apfel (10 %) – Birne (30 %) oder Zitrone (???)

Beim Sonderspiel „Double Play" werden für den Einsatz von 20 Cent nacheinander zwei Spiele gestartet. Ein Gewinn stellt sich ein, wenn zweimal die gleiche Frucht angezeigt wird.

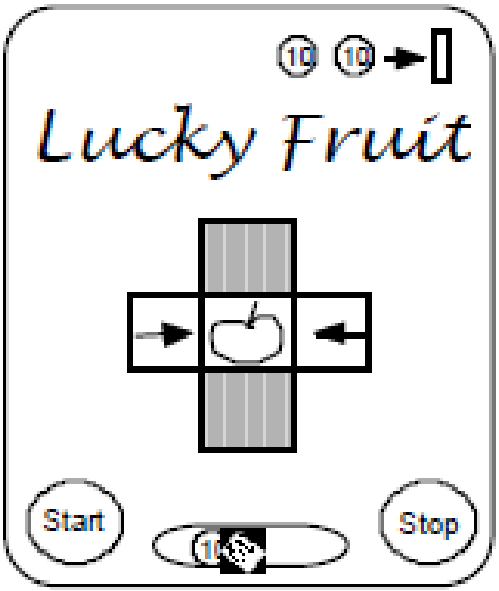
a) Zeichnen Sie ein passendes Baumdiagramm.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stellt sich kein Gewinn ein?
c) Wie viele Sonderspiele müssen mindestens gespielt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass „Apfel – Apfel" nicht eintrifft, kleiner ist als 10 %.

Im Falle von „Apfel – Apfel" spielt der Automat 75 Cent aus, bei „Birne – Birne" 50 Cent und bei „Zitrone – Zitrone" 25 Cent.
In allen anderen Spielausgängen erfolgt keine Auszahlung.

d) Wie hoch ist der bei einem Sonderspiel zu erwartende Auszahlungsbetrag?
e) Ist es ein faires Spiel?
Begründen Sie und ermitteln Sie einen eventuell fairen Einsatzbetrag.

Die Einzelwahrscheinlichkeiten lassen sich elektronisch verstellen.
Das Gerät soll nun so eingestellt werden, dass die Ereignisse „Birne" und „Zitrone" gleichwahrscheinlich sind.

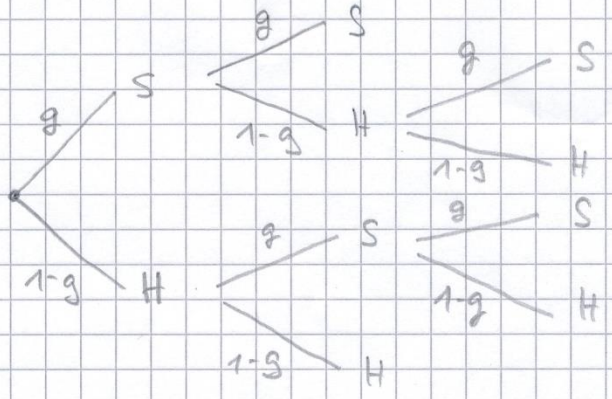
f) Ermitteln Sie nun, wie die Wahrscheinlichkeit p für „Apfel" gewählt werden muss, damit die zu erwartende Auszahlung für ein „Double Play" minimal ist.



Lösung

①

a)



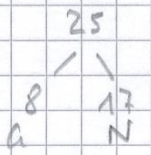
b) $\Omega = \{SS; SHS; HSS; HH; HSH; SHH\}$

c) $P(A) = g^2 + 2g^2(1-g)$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

d) $P(A) = 0{,}36 + 2 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}4 = 0{,}648$

②



Auswahl 5

a) $H(X=1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{17}{4}}{\binom{25}{5}} = \frac{272}{759} = 0{,}358$

b) $H(X=5) = \frac{\binom{8}{5}}{\binom{25}{5}} = \frac{4}{3795} = 0{,}00105$

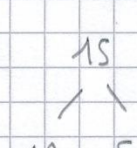
c) $H(X \leq 1) = H(X=1) + \frac{\binom{8}{0}\binom{17}{5}}{\binom{25}{5}} = \frac{272}{759} + \frac{442}{3795} = \frac{1802}{3795} \approx 0{,}47$

d) Gegenereignis: kein favorisierter oder mind. 2 favorisierte

$P(d) = 1 - P(5)$

e) $E(X) = \sum_{k=1}^{5} k \cdot H(X=k)$

③



Auswahl: 4

a) $H(X=4) = \frac{\binom{10}{4}\binom{5}{0}}{\binom{15}{4}} = \frac{2}{13} \approx 0{,}1538$

b) $H(X=2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{5}{2}}{\binom{15}{4}} = \frac{30}{91} \approx 0{,}3297$

c) $P(\text{beide Geschlechter}) = 1 - \frac{\binom{10}{4}\binom{5}{0}}{\binom{15}{4}} - \frac{\binom{10}{0}\binom{5}{4}}{\binom{15}{4}} = \frac{230}{273}$

$\approx 0{,}8425$

④

a) $|A| = 10 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 8 = 3.200$

b) (i) $|B| = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

(ii) $|C| = \binom{10}{3} = 120$

(iii) $|D| = 10^3 = 1.000$

c) $\text{Anzahl} = \frac{17!}{2! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2!} = 308.756.448.000$

R N T A I

⑤

a) $P(WW) = \frac{4}{4+n} \cdot \frac{3}{3+n} = \frac{1}{6}$

$72 = 12 + 7n + n^2$

$n^2 + 7n - 60 = 0$

$n_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 240}}{2}$

$n_{1/2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$ $\begin{cases} n_1 = 5 \\ n_2 = -12 \end{cases}$

Es waren 5 rote Kugeln vorhanden.

b) $P(rrr) = \frac{n}{4+n} \cdot \frac{n-1}{3+n} \cdot \frac{n-2}{2+n} = \frac{11}{28}$

$28n(n^2 - 3n + 2) = 11(4+n)(6+5n+n^2)$

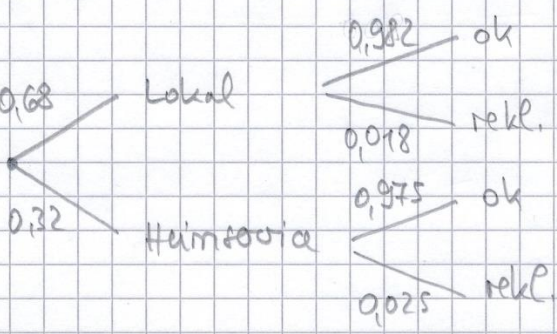
$28n^3 - 84n^2 + 56n = 264 + 286n + 99n^2 + 11n^3$

$17n^3 - 183n^2 - 230n - 264 = 0$

$n = 12$

(6)

a)



$P(\text{nekl.}) = 0,68 \cdot 0,018 + 0,32 \cdot 0,025 = 0,02024 \approx 2,02\%$

b) $P(X \geq 1) \geq 0,95$

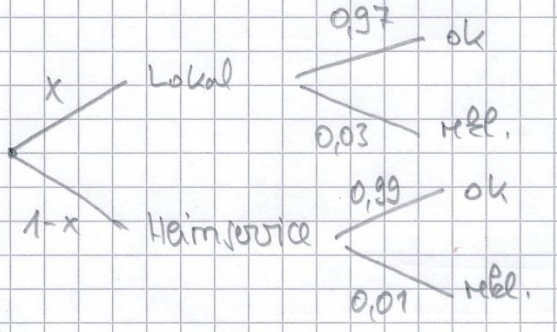
$1 - P(X=0) \geq 0,95$

$P(X=0) \leq 0,05$

$0,97^n \cdot 0,03^0 \leq 0,05 \Rightarrow n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,97} = 98,35$

$n \geq 99$

c)



$P(ok) = x \cdot 0,97 + (1-x) \cdot 0,99 = 0,984$

$0,97x + 0,99 - 0,99x = 0,984$

$-0,02x = -0,006$

$x = 0,3$

$\Rightarrow$ 30% der Pizzen wurden im Lokal gegessen.

⑦ $P(X \leq 2) = 1 - P(X=3) = 0{,}999$

$P(X=3) = 0{,}001$

$p^3 = 0{,}001$

$p = 0{,}1$

$\Rightarrow 0{,}1 \cdot 360 = 36°$

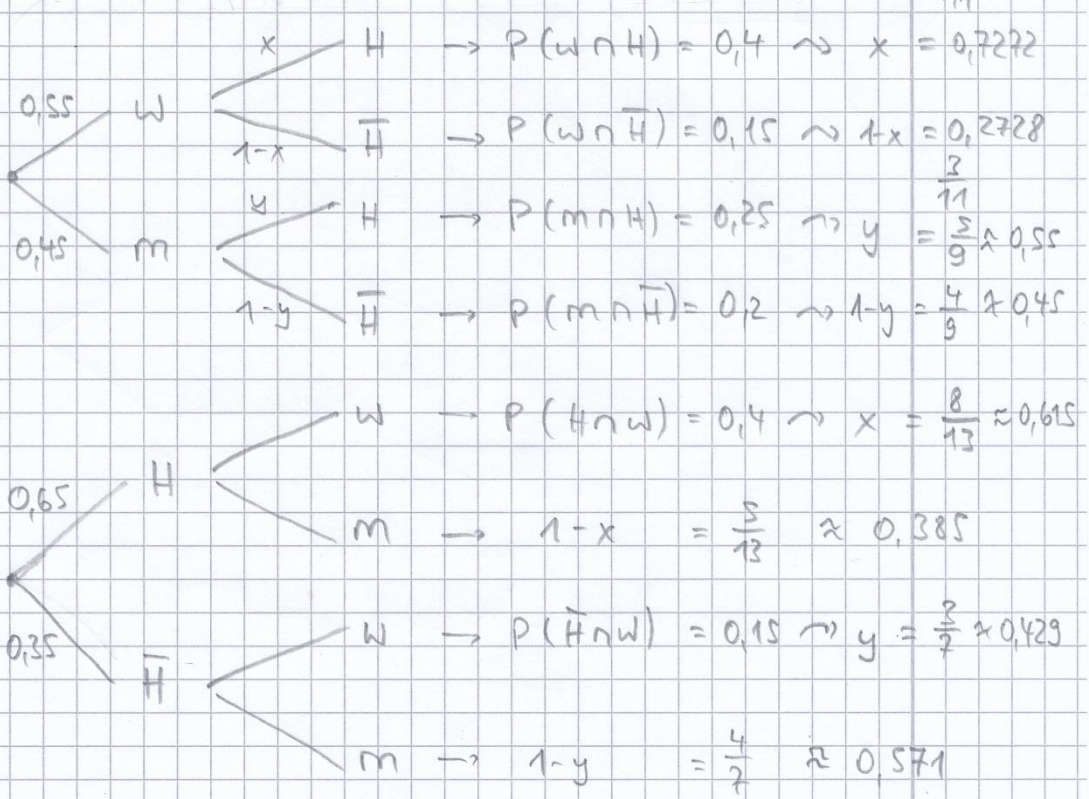
⑧

a)

	B: weiblich	$\overline{B}$: männlich	Summe
A: Handybesitzer	410	397	807
$\overline{H}$: kein Handy	114	79	193
Summe	524	476	1,000

	B: weiblich	$\overline{B}$: männlich	Summe
A: Handybesitzer	0,410	0,397	0,807
$\overline{H}$: kein Handy	0,114	0,079	0,193
Summe	0,524	0,476	1

b)



c) $$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$

$$P_B(A) = \frac{0,4}{0,55} = 0,7272 \quad \text{oder} \quad \frac{8}{11}$$

Die W'keit für einen Handybesitzer unter Bedingung, dass nur Frauen in der Grundmenge sind, beträgt 0,7272.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P_A(B) = \frac{0,4}{0,65} = 0,615 \quad \text{oder} \quad \frac{8}{13}$$

Die W'keit für eine Frau unter der Bedingung nur Handybesitzer in der Grundmenge zu haben, beträgt 0,615.

d)

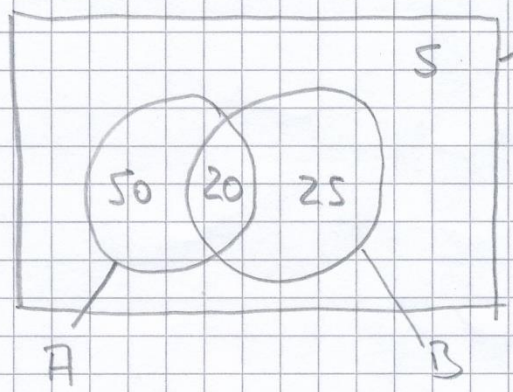
	A	$\overline{A}$	Σ
B	0,3	0,1	0,4
$\overline{B}$	0,5	0,1	0,6
Σ	0,8	0,2	1

e) $$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P_B(A) = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

(9)

a)



5

b) $|A \cup B| = 50 + 20 + 25 = 95$

Alle Personen, die Obst kaufen.

3

$|A \setminus B| = 70 - 20 = 50$

Alle Personen, die nur Äpfel kaufen.

3

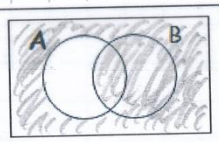
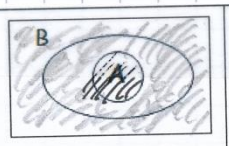
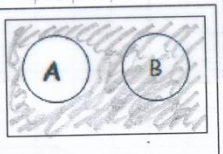
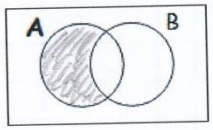
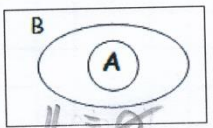
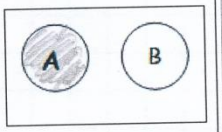
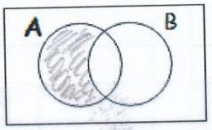
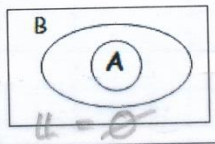
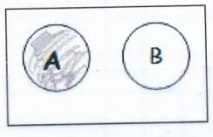
$|\overline{A \cap B}| = 100 - 20 = 80$

Alle Personen, die nur Äpfel oder nur Birnen oder kein Obst kaufen.

3

Σ 14

(10)

$\overline{A} \cup B$			
$A \cap \overline{B}$			
$A \setminus B$			

6

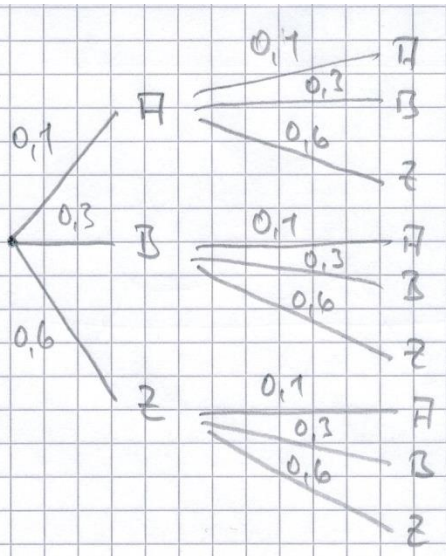
6

6

Σ 18

(4)

a)



b) $P(\text{kein Gewinn}) = 1 - 0{,}1^2 - 0{,}3^2 - 0{,}6^2$

$= 1 - 0{,}01 - 0{,}09 - 0{,}36 = 0{,}54$

c) $P(AA) = 0{,}01$

$\Rightarrow 1 - P(AA) = 0{,}99$

$\Rightarrow 0{,}99^n \leq 0{,}1 \rightsquigarrow n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}99} \approx 229{,}11$

$n \geq 230$

d) $AZ = 0{,}01 \cdot 75 + 0{,}09 \cdot 50 + 0{,}36 \cdot 25$

$AZ = 14{,}25$ Cent

e) Es ist kein faires Spiel, da der durchschnittliche Gewinn für den Spieler negativ ist: $\varnothing G = 14{,}25 - 20 = -5{,}75$

$\Rightarrow$ Bei einem Einsatz von 14,25 Cent wäre das Spiel fair.

f) $P(\text{Gewinn}) = p \cdot p + \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1-p}{2} + \frac{1-p}{2} \cdot \frac{1-p}{2}$

$f(p) = p^2 + \frac{1 - 2p + p^2}{4} \cdot 2$

$f'(p) = 2p + \frac{1}{2}(-2+2p) = 0$

$3p = 1 \rightsquigarrow p = \frac{1}{3}$

$f''(p) = 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 > 0 \Rightarrow \text{MIN}$

Aufg. zu 11

g)

AA	BB	zz
p^2	$\frac{1}{4}(1-p)^2$	$\frac{1}{4}(1-p)^2$
0,75	0,5	0,25

$$P(A) = \frac{3}{4} \cdot p^2 + \frac{1}{8}(1-p)^2 + \frac{1}{16}(1-p)^2$$

$$P(A) = \frac{3}{4}p^2 + \frac{3}{16}(1-p)^2$$

$$P'(A) = \frac{3}{2}p + \frac{3}{8}(1-p) \cdot (-1) = 0$$

$$\frac{15}{8}p = \frac{3}{8}$$

$$p = \frac{1}{5} = 0{,}2$$