12. Jgst.	6. Test	Datum: 24.05.2017
Kurs LK 15/2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Abstandsberechnungen;**
Lagebeziehungen Ebene - Gerade

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: | **56** | |

In einem kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte **A(2/-3/2)** ,

B(5/-5/0) , **C(-1/3/6)** , **D(4/-4/9)** und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad mit\ k \in \Re$$

a) Ermitteln Sie die Normalenform der Ebene, die durch die Punkte A, B und C geht.

b) Begründen Sie, warum die Gerade g die Ebene E schneidet und ermitteln Sie den Schnittpunkt.

c) Bestimmen Sie alle Punkte auf der Geraden g, die von der Ebene E den Abstand 7 haben.

d) Welchen Winkel schließen Gerade g und Ebene E miteinander ein?

e) Zeigen Sie, dass Punkt D nicht auf der Ebene E liegt.

f) Ermitteln Sie nun eine Gerade h, die durch den Punkt D echt parallel zur Ebene E verläuft.

g) Welchen Abstand besitzen h und E zueinander?

h) Geben Sie eine Gleichung der Lotgeraden l vom Punkt D auf die Ebene E an.

i) Zeigen Sie, dass Punkt R(0 / 2 / -3) der Spiegelpunkt zu D bezüglich der Ebene E ist.

j) Begründen Sie, dass das Viereck BDCR eine Raute darstellt und berechnen Sie deren Flächeninhalt.

Aufgabe 2: | 10 |

Gegeben seien eine Ebene $E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 1$ und die Geradenschar

$$g_{a,b}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \qquad mit\ a,b,k \in \Re$$

a) Für welchen Wert von b ist die Gerade parallel zu E?

b) Unter welcher Bedingung ist g echt parallel zu E?

c) Welchen Abstand besitzt g zu E, wenn b = -9 und $a \in \Re \setminus \{-1\}$ gilt?

Aufgabe 3: | 24 |

Gegeben seien die Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad k \in \Re$ und

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad r \in \Re$$

a) Beschreiben Sie kurz die besondere Lage der beiden Geraden im Koordinatensystem.

b) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden zueinander.

c) Welchen Abstand besitzt g zu h?

d) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform auf, die den Punkt A(1 / 1 / -1) enthält und zu den beiden Geraden h und g parallel verläuft.

e) Welchen Abstand besitzt die Ebene **F: -x + z + 2 = 0** zu den beiden Geraden?

Aufgabe 1

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{n}| = 7$

$3 \quad -3$
$-2 \quad 6$

$E: \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \vec{x} - 25 = 0$

b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{n} \rightsquigarrow \vec{u} \parallel \vec{n} \rightsquigarrow$ Gerade verläuft orthogonal zur Ebene $\Rightarrow$ Schnittpunkt

Schnittpunkt:

↳ Gerade: $\left.\begin{aligned} x &= 2 + 2k \\ y &= -3 - 3k \\ z &= 2 + 6k \end{aligned}\right\}$ in E einsetzen

$2(2+2k) - 3(-3-3k) + 6(2+6k) = 25$

$4 + 4k + 9 + 9k + 12 + 36k = 25$

$k = 0$

$\rightsquigarrow$ Punkt A

c) $\vec{e}_{1/2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \pm 7 \cdot \vec{n}^0$

$\vec{e}_{1/2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \nearrow \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\quad \searrow \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

d) Da $\vec{u} \parallel \vec{n} \Rightarrow \epsilon \perp g \Rightarrow 90°$ 4

e) Punktprobe D mit Ebene ϵ

ϵ: $2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-4) + 6 \cdot 9 = 25$

$74 = 25$ ↯

$\Rightarrow D \notin \epsilon$ 5

f) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ da gilt: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ 6

g) Abstand $h \hookrightarrow \epsilon$:

$$e = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$e = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot 49 = 7$$ 6

h) gerade $\ell: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ parallel $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{v}$ $\vec{n}$ 5

i) Möglichkeit 1: Abstand $D \hookrightarrow \epsilon$ und Abstand $\ell \hookrightarrow \epsilon$ + Punktprobe $R \in \ell$

Möglichkeit 2: Schnittpunkt ℓ mit ϵ und Punktabstände berechnen + Punktprobe $R \in \ell$

$2(4+2j) - 3(-4-3j) + 6(9+6j) = 25$

$8 + 4j + 12 + 9j + 54 + 36j = 25$

$49j = -49 \rightsquigarrow j = -1 \Rightarrow S(2/-1/3)$

d) Da $\vec{u} \parallel \vec{n} \Rightarrow \epsilon \perp g \Rightarrow 90°$

e) Punktprobe D mit Ebene ϵ

$$\epsilon: \quad 2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-4) + 6 \cdot 9 = 25$$

$$74 = 25 \quad \lightning$$

$\Rightarrow D \notin \epsilon$

f) $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ da gilt: $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

g) Abstand $h \hookrightarrow \epsilon$:

$$e = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$e = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot 49 = 7$$

h) Gerade $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$ parallel $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{n}}$

i) Möglichkeit 1: Abstand $D \hookrightarrow \epsilon$ und Abstand $R \hookrightarrow \epsilon$ + Punktprobe $R \in l$

Möglichkeit 2: Schnittpunkt l mit ϵ und Punktabstände berechnen + Punktprobe $R \in l$

$$2(4+2j) - 3(-4-3j) + 6(9+6j) = 25$$

$$8 + 4j + 12 + 9j + 54 + 36j = 25$$

$$49j = -49 \rightsquigarrow j = -1 \Rightarrow S(2/-1/3)$$

Punktabstände:

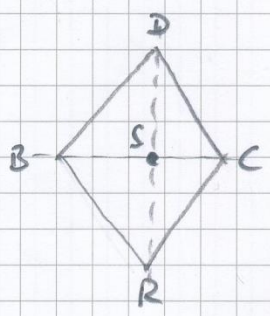
$$|\vec{DS}| = \sqrt{4+9+36} = 7$$

$$|\vec{RS}| = \sqrt{4+9+36} = 7 \quad \#$$

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow j = -2$$

j) Raute: alle Seiten gleich lang + gegenüberliegende Winkel gleich



oder

S halbiert die Verbindungsstrecken $\overline{BC}$ und $\overline{DR}$ mit Orthogonalität

⇓

aufgrund Spiegelpunkt gezeigt

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S$$

$$|\vec{DS}| = 7 \qquad |\vec{BS}| = \sqrt{9+16+0} = 5$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{DR} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = 24 + 48 - 72 = 0 \rightsquigarrow \vec{BC} \perp \vec{DR}$$

Fläche: $A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5$

$$A = 70$$

Aufgabe 2:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \rightsquigarrow 6 - 1,5 + 0,5b = 0$

$0,5b = -4,5$

$b = -9$

b) $b = -9$ und $P \notin E$

Punktprobe: $2 \cdot 1 - 1,5 \cdot a + 0,5 \cdot 1 = 1$

$-1,5a = -1,5$

$a = 1$

$\Rightarrow$ echt parallel für $b = -9 \wedge a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

c) $e = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6,5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$

$e = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6,5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6,5}}} (1,5 - 1,5a)$

Aufgabe 3:

a) h verläuft parallel zur y-Achse und g verläuft parallel zur xz-Koordinatenebene

b) nicht parallel, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

Prüfen auf Schnitt:

$r = 1$

$-1 = k$

$1 + r = 0 \rightsquigarrow 2 = 0$ ↯ $\Rightarrow$ h und g sind windschief

c) Abstand g zu h

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{n}| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$e = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$e = \left| \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot (-2) \right| = \sqrt{2}$$

d)

$$\in : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e)

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{n}| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$F \rightarrow \in$

Abstand $h \rightarrow F$:

$$e_{hF} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$e_{hF} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$e_{gF} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$e_{gF} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$