12. Jgst. **5. Test** **Datum: 20.03.2017**

Kurs 12/2 **Fach: Mathematik (Leistungsfach)**

Thema: **Skalar- und Vektorprodukt;**
Vektorielle Geradengleichung

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Produkte** | **8** |

a) Berechnen Sie das Skalar- und das Vektorprodukt

aus den beiden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Welchen Winkel schließen die beiden Vektoren ein?

c) Wie kann das Vektorprodukt aus den beiden Vektoren geometrisch interpretiert werden?

Aufgabe 2: **Geradengleichung** | **8** |

Gegeben seien zwei Punkte: $P(2 \quad 1 \quad 4)$ *und* $Q(4 \quad -2 \quad 8)$

a) Bestimmen Sie eine Geradengleichung, auf der die beiden Punkte liegen.

b) Ermitteln Sie zwei je weitere Punkte, für die gilt:

Sie liegen auf der Strecke PQ, sind aber nicht P oder Q

Aufgabe 3: **Geradenscharen** | **4** |

Gegeben ist die Punkteschar $P_k(3-k \quad 1+2k \quad 6+k)$

Erläutern Sie, warum alle Punkte der Schar auf einer Geraden liegen müssen

und nennen Sie die zugehörige Geradengleichung.

Kleiner Tipp: Denken Sie an k als Parameter einer Geradengleichung.

Aufgabe 4: **Lagebeziehungen zweier Geraden** | 20 |

Gegeben ist die Gerade $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Bestimme die Lage von g_1 zu den Geraden g_2 bis g_5! Ermittle ggf. den Schnittpunkt!

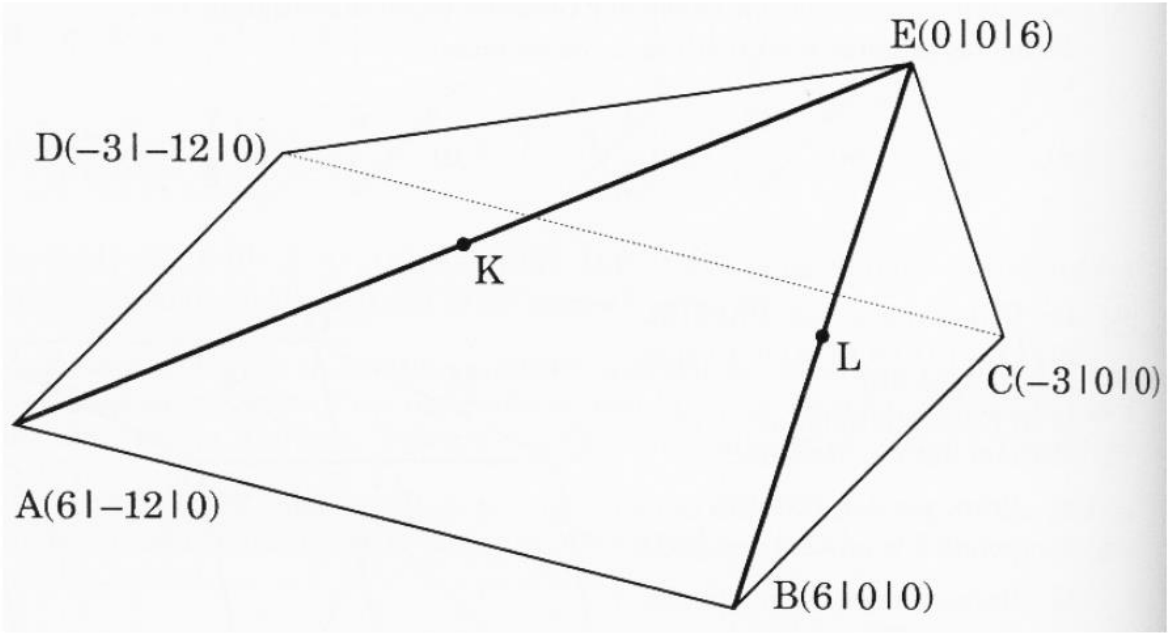
$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$g_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad g_5 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: **Geometrie im R^3** | 26 |

K und L sind Kantenmitten der vierseitigen Pyramide ABCDE.

a) Wo liegt in dieser Zeichnung der Ursprung des Koordinatensystems? Markieren Sie ihn in der Zeichnung.
b) Zeigen Sie, dass sich CK und DL schneiden und berechnen Sie den Schnittpunkt S.
c) Untersuchen Sie die Lagebeziehung von DK und CL.
d) DB und AC schneiden sich. Berechnen Sie den Schnittpunkt Q!



Lösungen

① a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = -3 + 6 - 10 = -7$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - (-4) \\ -6 - (-5) \\ -2 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ -11 \end{pmatrix}$

$-1 \quad 3$
$3 \quad 2$

b) $\cos\alpha = \dfrac{-7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{38}} = -0{,}3035 \Rightarrow \alpha = 107{,}67$

c) Der Ergebnisvektor des Vektorprodukts aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht orthogonal zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

② a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $k \in]0;1[$ $\quad P_1(2{,}2 \mid 0{,}7 \mid 4{,}4) \quad k = 0{,}1$

$P_2(2{,}4 \mid 0{,}4 \mid 4{,}8) \quad k = 0{,}2$

③ $P_k(3-k \mid 1+2k \mid 6+k)$

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 - k \\ y &= 1 + 2k \\ z &= 6 + k \end{aligned}\right\} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

④ Lagebeziehungen

$g_1 \iff g_2$

Richtungsvektoren: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow s = -0{,}5$

$\rightsquigarrow$ linear abhängig

Punktprobe: $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow r = -1$

$\Rightarrow$ identisch

$g_1 \iff g_3$

Richtungsvektoren: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} \rightsquigarrow s = 3$

$\rightsquigarrow$ linear abhängig

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ↯

$\Rightarrow$ echt parallel

$g_1 \iff g_4$

Richtungsvektoren: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} s = 1{,}5 \\ s = \frac{4}{3} \end{matrix}$ ↯

$\rightsquigarrow$ linear unabhängig

Schnitt:

I)	7	+ 2s	=	1	+ 3r
II)	10	+ 3s	=	2	+ 4r
III)	13	+ 4s	=	3	+ 5r
I)	6		=	3r	- 2s
II)	8		=	4r	- 3s
III)	10		=	5r	- 4s

III - 2I) $-2 = -r \rightarrow r = 2 \rightarrow s = 0$

Probe mit II) $8 = 4 \cdot 2 - 0$ #

$S(7 / 10 / 13)$

$g_1 \not\Leftrightarrow g_s$

Richtungsvektoren: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} s = 0{,}75 \\ s = -4 \end{matrix}$ ↯

→ linear unabhängig

Schnitt:

I	2	+ 4s	=	1	+ 3r
II	3	- s	=	2	+ 4r
III	4	+ 6s	=	3	+ 5r
I	1		=	3r	- 4s
II	1		=	4r	+ s
III	1		=	5r	- 6s

I + 4II $s = 19r \rightsquigarrow r = \frac{5}{19} \rightsquigarrow s = -\frac{1}{19}$

Probe mit III) $1 = \frac{25}{19} - \left(-\frac{6}{19}\right)$ ↯

→ windschief

⑤

a) Die Grundfläche ist ein Rechteck, da die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind

$|\overline{AB}| = |\overline{DC}| = 12$ und $|\overline{AD}| = |\overline{BC}| = 9$

und die Winkel 90° betragen.

$\Rightarrow$ Lot von E teilt $\overline{BC}$ im Verhältnis 2:1

b)

$$g_{\overline{CK}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 - (-3) \\ -6 - 0 \\ 3 - 0 \end{pmatrix}$$

$$g_{\overline{CK}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g_{\overline{DL}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 - (-3) \\ 0 - (-12) \\ 3 - 0 \end{pmatrix}$$

$$g_{\overline{DL}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & -3 + 6t & = & -3 + 6r \\ \text{II} & -6t & = & -12 + 12r \\ \text{III} & 3t & = & 3r \end{array} \quad \Rightarrow \quad r = t$$

$12 = 18r \Rightarrow r = \frac{2}{3}$

S(1 / -4 / 2)

c)

$$g_{\overline{DK}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3-(-3) \\ -6-(-12) \\ 3-0 \end{pmatrix}$$

$$g_{\overline{DK}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g_{\overline{CL}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3-(-3) \\ 0-0 \\ 3-0 \end{pmatrix}$$

$$g_{\overline{CL}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Richtungsvektoren linear unabhängig

$\Rightarrow$ Schnitt:

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & -3+6t & = & -3+6r & \Rightarrow & r=t \\ \text{II} & -12+6t & = & 0 & \Rightarrow & t=2 \\ \text{III} & 0+3t & = & 3r & \Leftrightarrow & r=t \end{array}$$

$S(9/0/6)$

d)

$$g_{\overline{HC}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_{\overline{SD}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & r = t & \\ \text{II} & -12 = -12r - 12t & \rightsquigarrow r = t = \frac{1}{2} \end{array}$$

$S(1{,}5/-6/0)$