12. Jgst.	3. Test	Datum: 11.01.2017
Kurs LK 15/2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Rotationsvolumina; Flächen zwischen Funktionen; uneigentliche Integrale;**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Flächen zwischen Funktionen** **8**

Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche, die die Funktionsgraphen von

$$g(x) = x^3 - 4x \quad und \quad h(x) = 5x$$

miteinander einschließen.

Aufgabe 2: **Uneigentliche Integrale** **18**

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

a) $\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ b) $\int\limits_1^{\infty} \frac{2}{x}\,dx$ c) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{x^{0,4}}\,dx$

Aufgabe 3: **Rotationsvolumina** **14**

Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f(x) und der x-Achse über dem angegebenen Intervall rotiere um die x-Achse.

Bestimmen Sie das entstehende Volumen.

a) $f(x) = \sqrt{4x} \qquad I = [0\,;4]$

b) $f(x) = \frac{2}{x} \qquad I = [1\,;\infty[$

Lösungen

① $\int_a^3 (g(x) - h(x))\,dx \rightsquigarrow$ Schnittstellen: $x^3 - 9x = 0$

$x(x^2 - 9) = 0$

$x_1 = 0 \;\vee\; x_{2,3} = \pm 3 \rightsquigarrow$ Punktsymmetrie

$$A = \left| 2 \int_0^3 (x^3 - 9x)\,dx \right| = \left| 2 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 \right]_0^3 \right|$$

$$= \left| 2 \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) \right| = 40{,}5$$

②

a) $$\lim_{k \to \infty} \int_2^k x^{-3}\,dx = \lim_{k \to \infty} \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right]_2^k$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_2^k = \lim_{k \to \infty} \left(-\frac{1}{2k^2} \right) - \left(-\frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8}$$

b) $$\lim_{k \to \infty} \int_1^k \frac{2}{x}\,dx = \lim_{k \to \infty} \left[2 \cdot \ln|x| \right]_1^k = \lim_{k \to \infty} 2 \cdot \ln k - 0 \to \infty$$

c) $$\int_{-1}^1 x^{-0,4}\,dx = 2 \cdot \lim_{k \to 0} \int_k^1 x^{-0,4}\,dx = 2 \lim_{k \to 0} \left[\frac{1}{0{,}6} x^{0{,}6} \right]_k^1$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{5}{3} - 0 \right] = \frac{10}{3}$$

③

a) $$V = \pi \int_0^4 \sqrt{4x}^{\,2}\,dx = \pi \int_0^4 4x\,dx = \pi \left[2x^2 \right]_0^4$$

$$= 32\pi$$

b) $$V = \pi \int_1^\infty \left(\frac{2}{x} \right)^2 dx = \pi \int_1^\infty \frac{4}{x^2}\,dx = \pi \cdot \left[-\frac{4}{x} \right]_1^\infty$$

$$= \pi \cdot \left[\lim_{k \to \infty} \left(-\frac{4}{k} \right) - (-4) \right]$$

$$= 4\pi$$