12. Jgst.	1. Test	Datum: 21.09.2016
Kurs LK 15/2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **ganzrationale Kurvenuntersuchung; Newton-Iteration; Rekonstruktion**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: **Untersuchung einer ganzrationalen Funktion** | **26** | |

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{1}{15}x^5 - \frac{4}{3}x^3$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion nur drei reelle Nullstellen besitzt.

b) Welches Symmetrieverhalten besitzt die Funktion?
Beweisen Sie Ihre Behauptung.

c) Ermitteln Sie nun die Extrema.
Führen Sie hierbei auch eine hinreichende Untersuchung durch.

d) Was versteht man unter der notwendigen und unter der hinreichenden Bedingung für die Extremwertbestimmung einer Funktion?

e) Welches Verhalten zeigt die Funktion für $x \to \pm\infty$

f) Zeigen Sie, dass die Funktion im Ursprung einen Sattelpunkt besitzt.

g) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

h) Der Hoch- und Tiefpunkt liegen auf einer Ursprungsgeraden.

Bestimmen Sie die Geradengleichung und berechnen Sie die Länge der Strecke zwischen Hoch- und Tiefpunkt.

Aufgabe 2: Newton-Iteration | 12 |

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + 1$

a) Beurteilen Sie kurz, warum im Intervall [0 ; 1] eine Nullstelle liegen muss.
b) Führen Sie zwei Iterationsschritte zur Ermittlung der Nullstelle durch.
c) Warum ist der Wert x = 0 als Startwert ungünstig?

Aufgabe 3: Rekonstruktion I | 10 |

Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades geht durch den Ursprung und hat in W(–2|2) eine Wendetangente mit der Steigung –3.

Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion.

Aufgabe 4: Rekonstruktion II (Eigenschaften formulieren) | 12 |

Gegeben sind verschiedene Ansätze zu Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen.
Formulieren Sie hier jeweils den mathematischen Sachverhalt mit korrekter Fachterminologie, so dass der entsprechende Ansatz zwangsläufig gebildet werden muss:

Ansatz	*Beschreibung*
$f'(3) = 0 \wedge$ $f(3) = 2$	
$f(1) = 4 \wedge$ $f'(1) = 0 \wedge$ $f''(1) = 0$	
$f''(8) = 0$	
$f'(4) = 1$	
$f(0) = 5$	
$-f(x) = f(-x)$	

Name	Klasse	Gruppe	Datum	Note
Art der Arbeit:	Fach:			

①

$f(x) = \frac{1}{15}x^5 - \frac{4}{3}x^3$

a) $x^3\left(\frac{1}{15}x^2 - \frac{4}{3}\right) = 0 \rightsquigarrow x = 0$ (dreifach) oder $x_{4/5} = \pm\sqrt{20}$ 4

b) Punktsymmetrie

Beweis: $f(-x) = \frac{1}{15}(-x)^5 - \frac{4}{3}(-x)^3 = -\frac{1}{15}x^5 + \frac{4}{3}x^3 = -f(x)$ ✱ 3

c) $f'(x) = \frac{1}{3}x^4 - 4x^2 = 0$

$x^2\left(\frac{1}{3}x^2 - 4\right) = 0 \rightsquigarrow x = 0$ (doppelt) oder $x_{3/4} = \pm\sqrt{12}$

$f''(x) = \frac{4}{3}x^3 - 8x$

$f''(0) = 0 \rightarrow$ Sattelpunkt $\quad f''(\sqrt{12}) = 8\cdot\sqrt{12} > 0 \Rightarrow$ Min

$f''(-\sqrt{12}) = -8\sqrt{12} < 0 \Rightarrow$ Max 5

d) notwendig: $f'(x) = 0$

hinreichend: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \gtrless 0$ 2

e) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \rightarrow \infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \rightarrow -\infty$ 2

f) $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \wedge f'''(0) = -8 \neq 0$ 2

g) Max $\left(-\sqrt{12} / \frac{32}{5}\sqrt{12}\right)$ Min $\left(\sqrt{12} / -\frac{32}{5}\sqrt{12}\right)$ $[\Rightarrow \pm 22{,}17]$

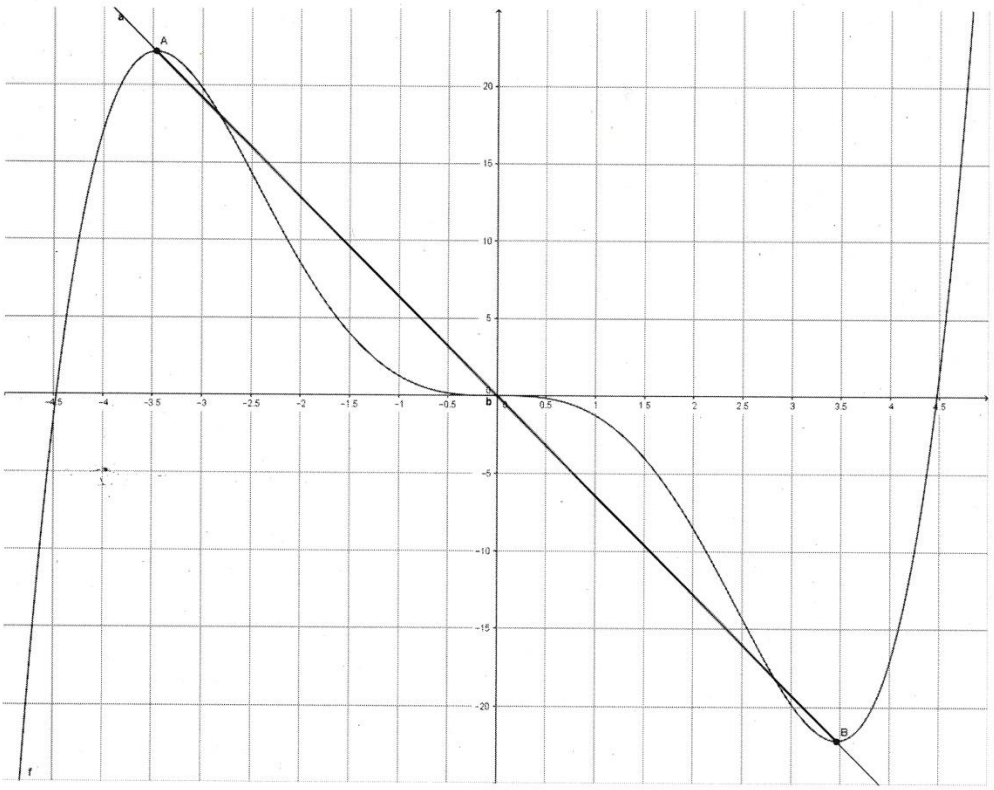
$m = \frac{-\frac{64}{5}\cdot\sqrt{12}}{2\cdot\sqrt{12}} = -\frac{32}{5} = -6{,}4$

$y = -6{,}4x$ Strecke: $e = \sqrt{4\cdot 12 + \left(\frac{64}{5}\right)^2\cdot 12}$

$e = 44{,}9$ 4

Schulformulare Steimer, Germersheim
Best.-Nr. 422-73

g)



4

Σ 26

② a) $f(0) = 1 \qquad f(1) = -1,5 \quad \Rightarrow \quad f(0) > 0$ und $f(1) < 0$

aufgrund Stetigkeit der Fkt. muss gelten (Zwischenwertsatz)

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in]0;1[$ mit $f(x_0) = 0$

3

b)

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
1	$-1,5$	-7	$1 - \frac{-1,5}{-7} = \frac{11}{14} \approx 0,785714$
$\frac{11}{14}$	$-0,264616$	$-4,586$	$\frac{11}{14} - \frac{-0,264616}{-4,586} = 0,728013$

6

c) $f'(x) = 2x^3 - 9x^2$

$f'(0) = 0 \quad \rightsquigarrow$ keine Iteration möglich

3

Σ 12

Name	Klasse	Gruppe	Datum	Note
Art der Arbeit:	Fach:			

③

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

I) $f(0) = d = 0$

II) $f(-2) = -8a + 4b - 2c = 2$

III) $f''(-2) = -12a + 2b = 0$

IV) $f'(-2) = 12a - 4b + c = -3$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$, $b = 3$, $c = 3$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + 3x$

x 2

2 / Σ 10

④

a) P(3/2) mit Steigung $m = 0$;
P(3/2) ist Extremstelle

b) P(1/4) ist ein Sattelpunkt

c) An der Stelle $x = 8$ hat die Fkt. eine Wendestelle

d) An der Stelle $x = 4$ hat die Fkt. die Steigung $m = 1$

e) P(0/5)
Die Fkt. schneidet die y-Achse bei 5.

f) Die Fkt. ist punktsymmetrisch.

x 2

2 / Σ 12

Schulformulare Steimer, Germersheim
Best.-Nr. 4227-3