12. Jgst.	3. Kursarbeit	Datum: 20.02.2017
Klasse: BGY 15 LK 2		Fach: Mathematik (Leistungsfach)

Thema: Analytische Geometrie; Punkte im R^3;
Rechenoperationen mit Vektoren;
Analysis: Kurvenscharen ganzrational

Name:	
Punkte:	Note:

Aufgabe 1: Dreiecksberechnung **36**

Gegeben sei das Dreieck ABC mit A(5/0/-1), B(3/4/-5) und C(-1/6/-1).

a) Ermitteln Sie Seitenvektoren des Dreiecks.

b) Wie groß ist der Umfang?

c) Begründen Sie, warum die drei Eckpunkte in jedem Fall ein Dreieck darstellen.

d) Geben Sie einen Punkt E derart an, so dass ABE kein Dreieck wäre. Begründen Sie warum dann kein Dreieck vorliegt.

e) Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks.

f) Wie groß ist die Fläche des Dreiecks?

g) Ergänzen Sie das Dreieck um den Punkt D derart, dass ein Parallelogramm entsteht und geben Sie die drei Punkte für D an (3 Lösungen möglich).

Aufgabe 2: Skalarprodukt **16**

a) Berechnen Sie das skalare Produkt der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Begründen Sie, warum folgende Gleichung in der Regel nicht gilt:

(i) $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c} \right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) \cdot \vec{c}$

(ii) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c}$

(iii) $\sqrt{\left(\vec{a} \right)^2} = \vec{a}$

c) Berechnen Sie folgende Terme

(i) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{d}$ (ii) $\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$

mit den Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$

d) Worin liegt der Fehler?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

12

Aufgabe 3: Skalarprodukt und Orthogonalität

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ s \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} -s \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ stets orthogonal zueinander stehen.

b) Bestimmen Sie einen Vektor, der zum Vektor $\vec{g} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ senkrecht steht.

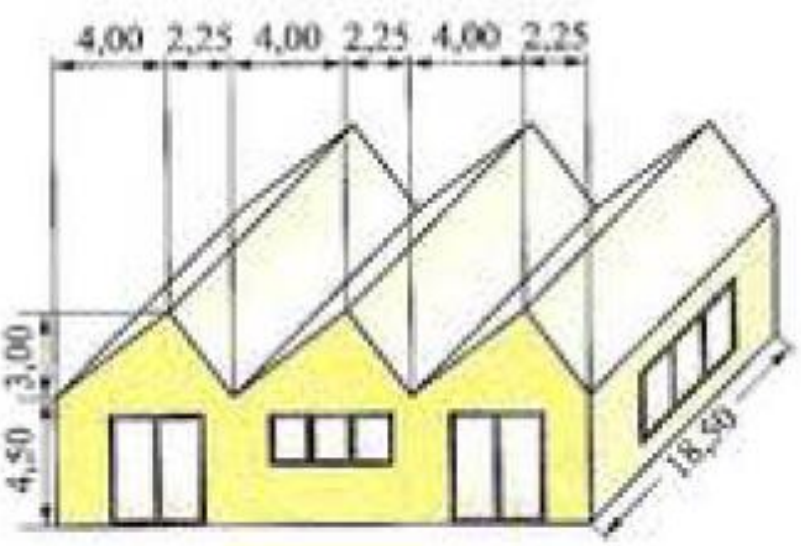
c) Prüfen Sie, ob es Werte für s gibt, so dass die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 3 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} s \\ -3s \\ 2 \end{pmatrix}$$

orthogonal zueinander stehen.

Aufgabe 4: **Die Fabrikhalle**

20	



a) Wie groß ist die gesamte Dachfläche?

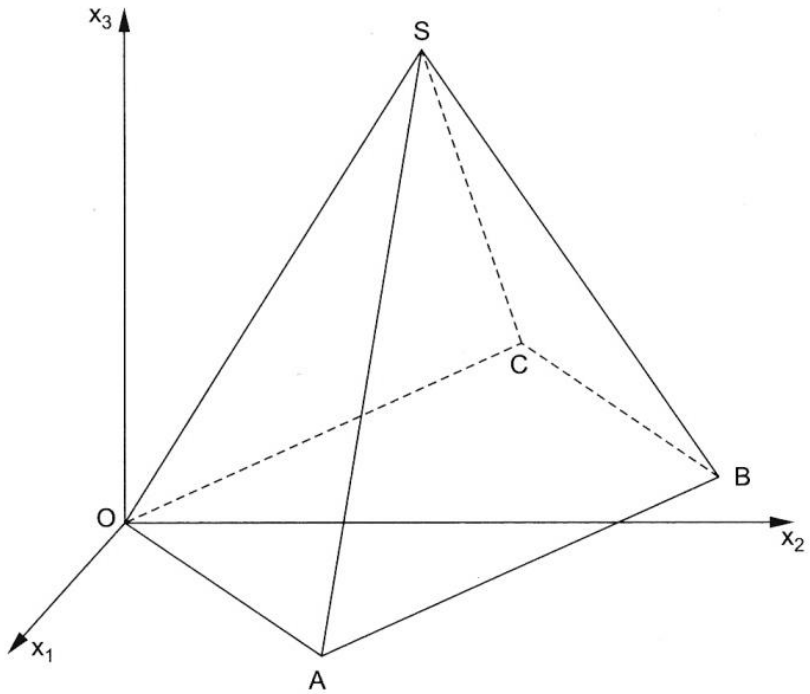
b) Welches Volumen besitzt die Fabrikhalle?

c) Welche Kanten des Sägezahndaches sind orthogonal zueinander?

<u>Von den Aufgaben 5 und 6 bitte nur eine zur Bearbeitung auswählen!!!</u>

Aufgabe 5: **Pyramiden**

26	



Abbildung

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte O(Ursprung), A(6/8/0), B(-2/14/0), C(-8/6/0) und S(-1/7/10) Eckpunkte der Pyramide OABCS, deren Grundfläche das Viereck OABC ist.

a) Zeigen Sie, dass das Viereck ein Quadrat ist.

b) Berechnen Sie die Oberfläche der Pyramide OABCS.

c) Wo liegt der Lotfußpunkt der Höhe durch den Punkt S?

d) Auf dem Vektor $\overrightarrow{AS}$ gibt es genau einen Punkt P.

(i) Bestimmen Sie die Koordinaten des gesuchten Punktes P

unter Berücksichtigung, dass gilt: $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AS}$

(ii) und zeigen Sie, dass die Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{BP}$ senkrecht zueinander sind

Aufgabe 6: Kurvenscharen ganzrationaler Funktionen

26	

Gegeben ist die Kurvenschar mit $f_k(x) = \frac{1}{2k}x^4 - 2kx^2 \qquad mit \quad k > 0$

Untersuchen Sie den Graphen der Funktion hinsichtlich folgender Kriterien:

a) Nullstellen

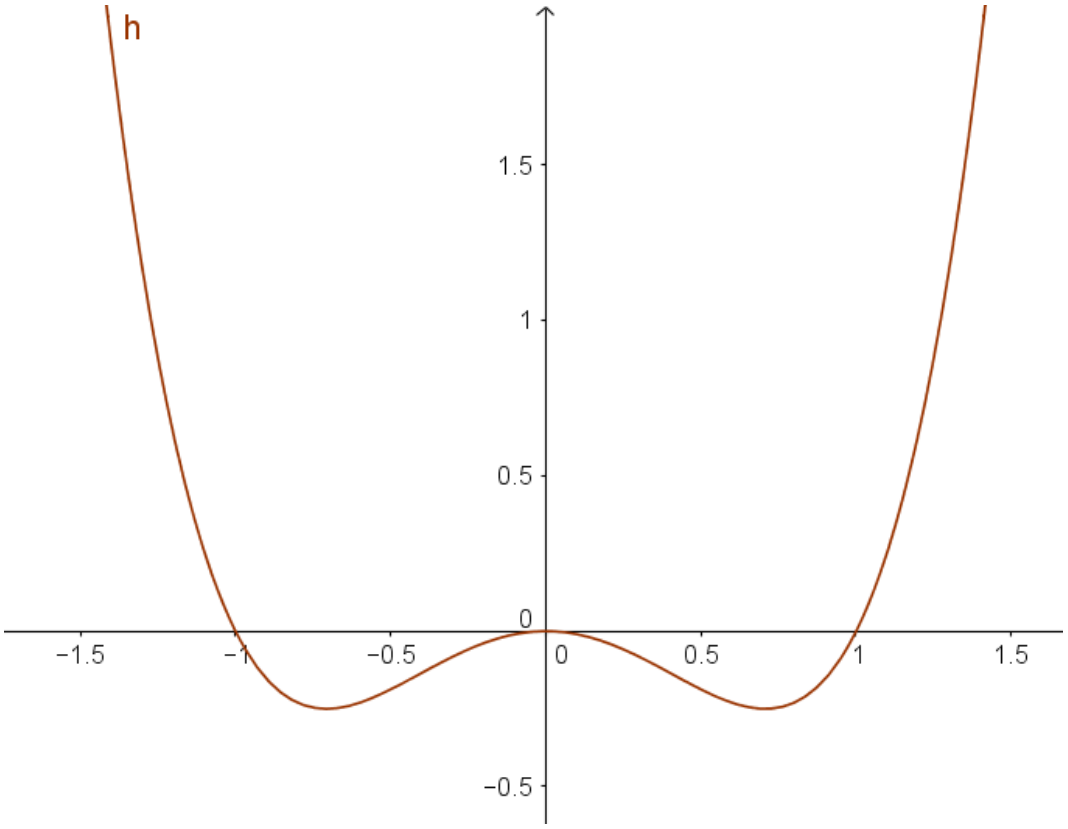
b) Extrema

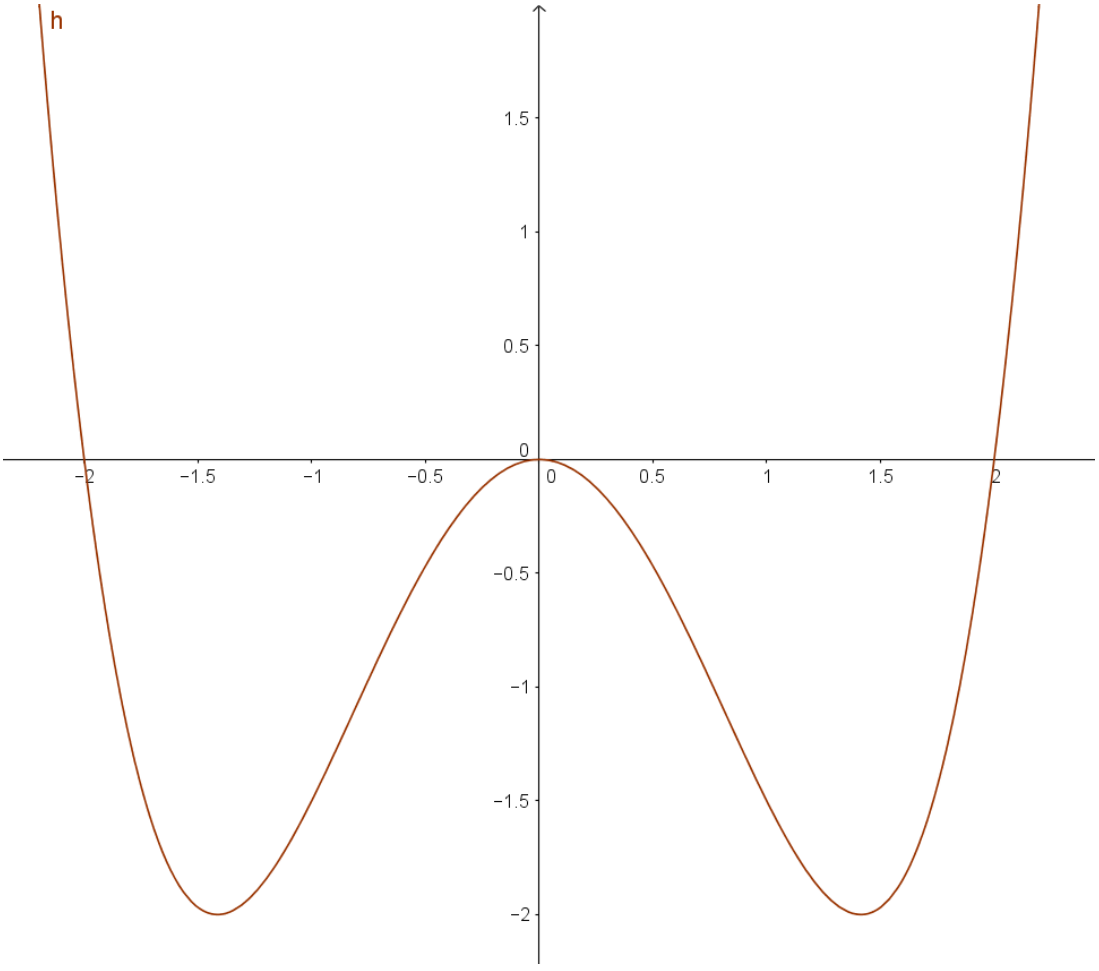
c) Ortskurve der Extrema

d) Für welche Werte von k wurde die Funktion hier gezeichnet (=> vgl. Anlage)?

e) Berechnen Sie die Stammfunktion der Kurvenschar.

f) Für welchen Wert von k hat das Flächeninhaltsmaß der Kurvenschar im Intervall [-2k ; 2k] den Wert $-\frac{4}{15}$?


h
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5


h
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2

Lösung

①

a) Seitenvektoren

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

6

b) Umfang

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 2 \cdot \sqrt{4+16+16} = 12$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{36+36+0} = \sqrt{72} \approx 8,5$

$\Rightarrow u = 20,5$

6

c) Die 3 Punkte liegen nicht auf einer Geraden, was man aus den 3 Seitenvektoren des $\triangle$ erkennen kann.

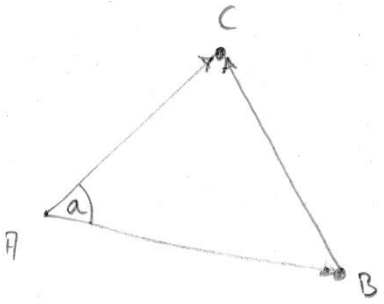
3

d) $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ E liegt auf der Geraden durch die Punkte A und B.

3

e)



$\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}}{6\sqrt{2} \cdot 6} = \dfrac{36}{36 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

$\alpha = 45$

$\cos\beta = \dfrac{\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}{6\sqrt{2} \cdot 6} = \dfrac{36}{36 \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

$\beta = 45$

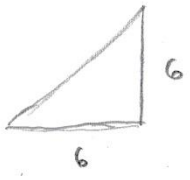
$\Rightarrow \gamma = 180 - 90$

$\gamma = 90$

7

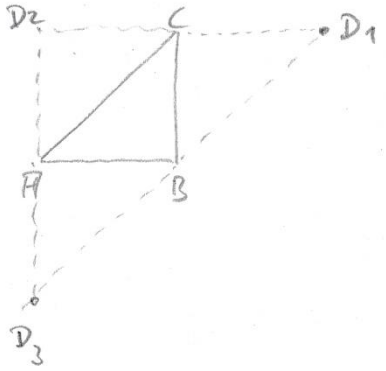
f) $A_\Delta = \frac{1}{2} g \cdot h$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$



2

g)



$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OD_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OD_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD_3} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OD_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

9

Σ 36

② a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = -7$ 2

b) (i) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = \underbrace{\vec{a} \cdot k}$ $(\vec{b} \cdot \vec{c})$ ist eine Zahl $k \in \mathbb{R}$ Skalarprodukt

ein um k gestreckter oder gestauchter Vektor

$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \underbrace{t \cdot \vec{c}}$ $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ Skalarprodukt mit $t \in \mathbb{R}$

ein um t gestreckter oder gestauchter Vektor

$\Rightarrow k\vec{a} \neq t \cdot \vec{c}$ im Regelfall wenn $\vec{a} \neq s \cdot \vec{c}$ 3

(ii) $\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}} + \vec{c} = k + \vec{c}$

Skalarprodukt

Voraussetzung für Addition von Vektoren nicht erfüllt

„Zahl" + „Vektor" nicht definiert 2

(iii) $\sqrt{(\vec{a})^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ → Zahl [Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{a}$]

$\vec{a}$ ist allerdings ein Vektor

$\Rightarrow$ ~~Z~~ Gleichheit

3

c) (i) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$

$= 0 + x^2 = x^2$

2

(ii) $\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= 1 + x^2 + x^2 + 1 = 2 + 2x^2$

2

d) vgl. b) (ii)

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \neq \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

* hier wurde zwar multipliziert aber die Einzelprodukte wurden nicht addiert

2 / Σ16

③ a) Orthogonalität $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 + 0 + 5$

$= 0$ ✱

4

b) $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

3

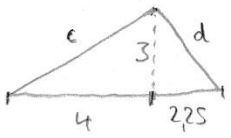
c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ -3s \\ 2 \end{pmatrix} = s - 3s^2 + 6 = 0$

$\Rightarrow -3s^2 + s + 6 = 0 \rightsquigarrow s_1 = 1{,}591$

$s_2 = -1{,}257$

5 / Σ12

④



$c^2 = 4^2 + 3^2$

$c = 5$

$d^2 = 3^2 + 2{,}25^2$

$d = 3{,}75$

a) Dachfläche: $D = 3 \cdot 5 \cdot 18{,}50 + 3 \cdot 3{,}75 \cdot 18{,}50$

$D = 485{,}625\ m^2$

6

b) Volumen: Δ-Fläche: $\frac{1}{2} \cdot (4 + 2{,}25) \cdot 3 = 9{,}375$

$\Rightarrow$ Prisma: $V_{Prisma} = 9{,}375 \cdot 18{,}50 = 173{,}44$

$\Rightarrow$ 3 Prismen: $520{,}3125\ [m^3]$

Quader-Volumen: $3 \cdot 6{,}25 \cdot 4{,}5 \cdot 18{,}50 = 1.560{,}9375\ [m^3]$

Gesamtvolumen: $2.081{,}25\ [m^3]$

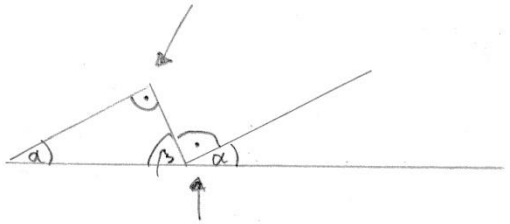
8

c) $\sin\alpha = \frac{3{,}75}{6{,}25} = 0{,}6 \rightsquigarrow \alpha = 36{,}87$

$\sin\beta = \frac{5}{6{,}25} = 0{,}8 \rightsquigarrow \beta = 53{,}13$

$\Rightarrow 90° \rightsquigarrow \gamma = 90$

$\Rightarrow$ Dachgiebelkante ist 90° groß.



Fußkantenwinkel ebenfalls 90°

natürlich auch die Seitenkanten nach hinten

6

Σ 20

⑤

a) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ und $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \rightsquigarrow$ orthogonal

8

b) Oberfläche

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{150} \cdot \sqrt{100}} = \dfrac{50}{5 \cdot \sqrt{6} \cdot 10} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$\alpha = 65{,}905$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \sin(65{,}905) \cdot \sqrt{150} \cdot 10 = 55{,}902$

Oberfläche = Mantel + Grundfläche

$O = 4 \cdot 55{,}902 + 100 = 323{,}608\ [m^2]$

Hilf.: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{OA}| = 10$ $|\overrightarrow{MS}| = \sqrt{16+9+100} = \sqrt{125}$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{125} \approx 55{,}902$

9

c) Projektion in xy-Ebene von S aus [orthogonal]

L (-1 / 7 / 0)

Beweis durch Skalarprodukt aus

$\overrightarrow{LS} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ und $\overrightarrow{LS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

4

d) $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AS}$

(i) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AS} \rightsquigarrow \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 22 \\ 20 \end{pmatrix}$

(ii) Behi: $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{BP}$

Bew.: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 22 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 10 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot (40 - 440 + 400) = 0$ ✱

5 / Σ26

Ergänzung: Ermittlung des Parameterwertes $t = \frac{2}{3}$

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 6-7t \\ 8-t \\ 10t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-7t \\ -6-t \\ 10t \end{pmatrix}$$

$$(8-7t)(6-7t) + (-6-t)(-t+8) + 100t^2 = 0$$

$$48 - 56t - 42t + 49t^2 - 48 + 6t - 8t + t^2 + 100t^2 = 0$$

$$150t^2 - 100t = 0 \rightsquigarrow t_1 = 0$$

$$t_2 = \frac{2}{3}$$

⑥ Kurvenscharen

$$f_k(x) = \frac{1}{2k}x^4 - 2kx^2 \quad \text{mit } k > 0$$

a) NS: $x^2\left(\frac{1}{2k}x^2 - 2k\right) = 0$

$x_{1/2} = 0$ (doppelt) $\qquad x_{2/3} = \pm 2k$

4

b) Extrema:

$$f_k'(x) = \frac{2}{k}x^3 - 4kx = 0$$

$$x\left(\frac{2}{k}x^2 - 4k\right) = 0$$

$x_1 = 0 \qquad x_{2/3} = \pm k\cdot\sqrt{2}$

$$f_k''(x) = \frac{6}{k}x^2 - 4k \rightsquigarrow f_k''(0) = -4k < 0 \Rightarrow \text{MAX}\,(0\,|\,0)$$

$$\text{MIN}\left(\pm\sqrt{2}k\,|\,-2k^3\right)$$

6

c) Ortskurve:

$x = \sqrt{2}k \rightsquigarrow k = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot x$

$y = -2k^3 \rightsquigarrow y_1 = -2\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x\right)^3 \qquad y_2 = -2\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x\right)^3$

$y_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x^3 \qquad y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x^3$

4

d) NS: $2k = 1 \rightsquigarrow k = \frac{1}{2}$

$2k = 2 \rightsquigarrow k = 1$

4

e) $F(x) = \frac{1}{10k}x^5 - \frac{2}{3}kx^3 + C$

4

f) $F(2k) - F(0) = \frac{32}{10}k^4 - \frac{16}{3}k^4 - 0 = -\frac{2}{15}$ (wegen Symmetrie)

$-\frac{32}{15}k^4 = -\frac{2}{15}$

$k^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

4

Σ26