12. Jgst.	2. Kursarbeit	Datum: 14.12.2016
Kurs LK 15/2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Kurvenuntersuchung (gebr.-rat Fkt. und Wurzelfunktionen); Integralrechnung; Extremwertaufgaben**

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: Kurvenuntersuchung gebrochen-rationaler Funktionen | 20 | |

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 2x - 8}$

a) Bestimmen Sie Nullstellen, Polstellen und Lücken.

b) Wie lautet die vereinfachte Funktion $f^*(x)$?

c) Zeigen Sie, dass die ersten beiden Ableitungen der Funktion wie folgt lauten können:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} \qquad \textit{und} \qquad f''(x) = \frac{-4}{(x+2)^3}$$

d) Was können Sie aus den Ableitungen bezüglich der Extrema und Wendepunkte folgern?

e) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

Aufgabe 2: Rekonstruktion einer gebrochen-rationalen Funktion | 4 | |

Wie sind a und b zu wählen, damit die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 + bx}{x - a}$

einen Pol bei **x = - 2** und die Asymptote **y = x - 1** hat?

Aufgabe 3: **Extremwertaufgabe mit Wurzelfunktion**

16	

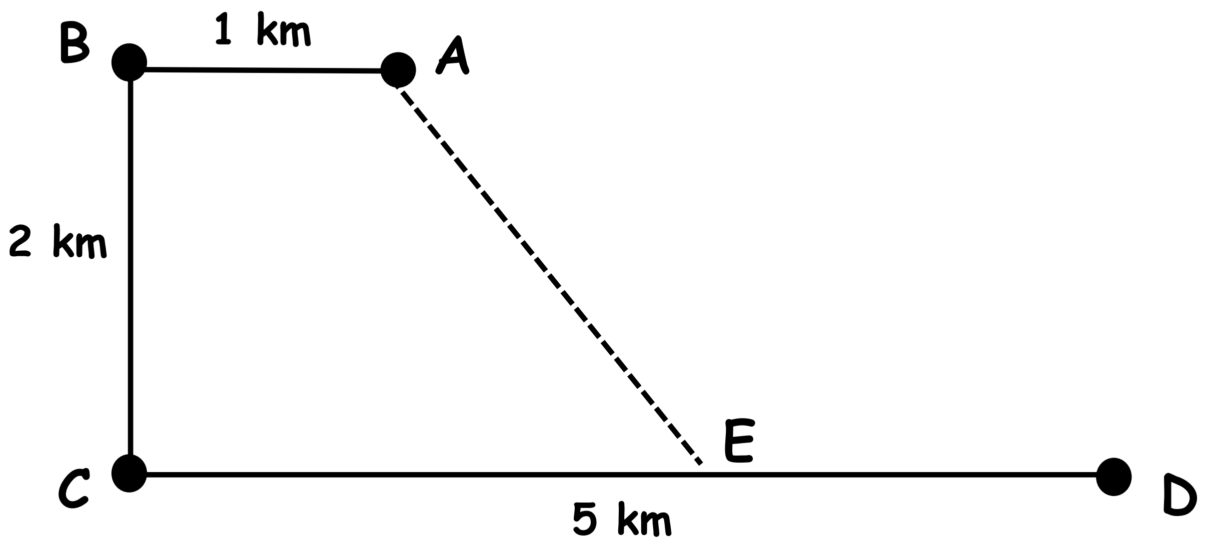
Der Landwirt Ludwig Knödel möchte zu seinem (**A**)ussiedlerhof einen schnellen Internet-Anschluss über Glasfaserkabel legen lassen.

Da sich sein Hof einige Kilometer vom nächsten Anschlusspunkt **D** befindet, verlangt der Interdienstleister eine Selbstbeteiligung für den Anschluss:

je 500,00 € je km entlang bestehender Straßen und befestigter Wege;

je 750,00 € je km bei Verlegung im offenen Gelände.

Zu Knödels Hof gelangt man vom Anschlusspunkt **D** gemäß der Skizze auf bestehenden Straßen und Wegen zum Gehöft.



Ludwig Knödel überlegt nun folgende Alternative für den Verlauf des Glasfaseranschlusses:

a) entlang bestehender Straßen und Wege von D über C und B nach A.
b) direkt über das freie Gelände von D nach A.
c) von D Richtung C entlang der Straße, aber an einem Punkt E direkt zu seinem Hof A.

Wie hoch fällt in diesen drei Varianten jeweils die Selbstbeteiligung für Knödel aus?
Wie viel kostet die günstigste Variante?

Aufgabe 4: **Wurzelfunktionen** | 12 | |

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \sqrt{36-x^2} + \frac{1}{2}x$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich.

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion ein Maximum besitzt.

d) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

Aufgabe 5: **Bestimmen Sie die Stammfunktionen zu** | 10 | |

a) $$f(x) = \frac{1}{3}x^5 - \frac{3}{x^5} + \sqrt[5]{x^3}$$

b) $$f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 5}{3x^2}$$

Aufgabe 6: **Flächenberechnung**

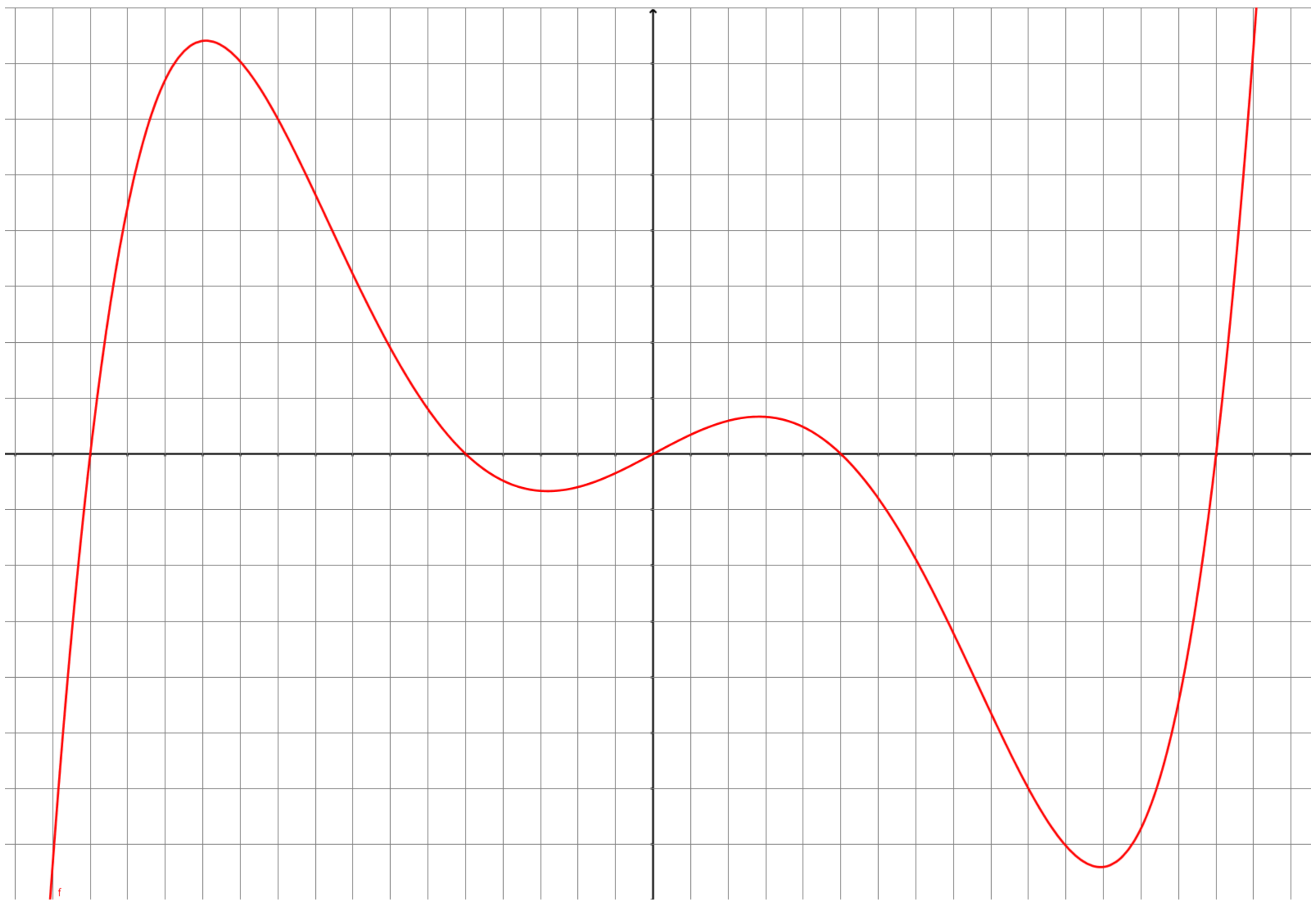
Die Funktion $$f(x) = x^5 - 10x^3 + 9x$$

wird durch folgenden Graph veranschaulicht.

Welche Fläche schließt der Graph der Funktion f(x) mit der x-Achse ein.

Bitte beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise und führen Sie diese entsprechend durch.

Welchen besonderen Rechenvorteil können Sie aufgrund einer bestimmten Eigenschaft der Funktion nutzen?



Lösung

A1 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 2x - 8} = \dfrac{x(x-4)}{(x-4)(x+2)}$

a) NS: $x = 0$ Lücke: $L(4/\frac{2}{3})$

Pol: $x = -2$ (m VZW) $a(x) = 1$

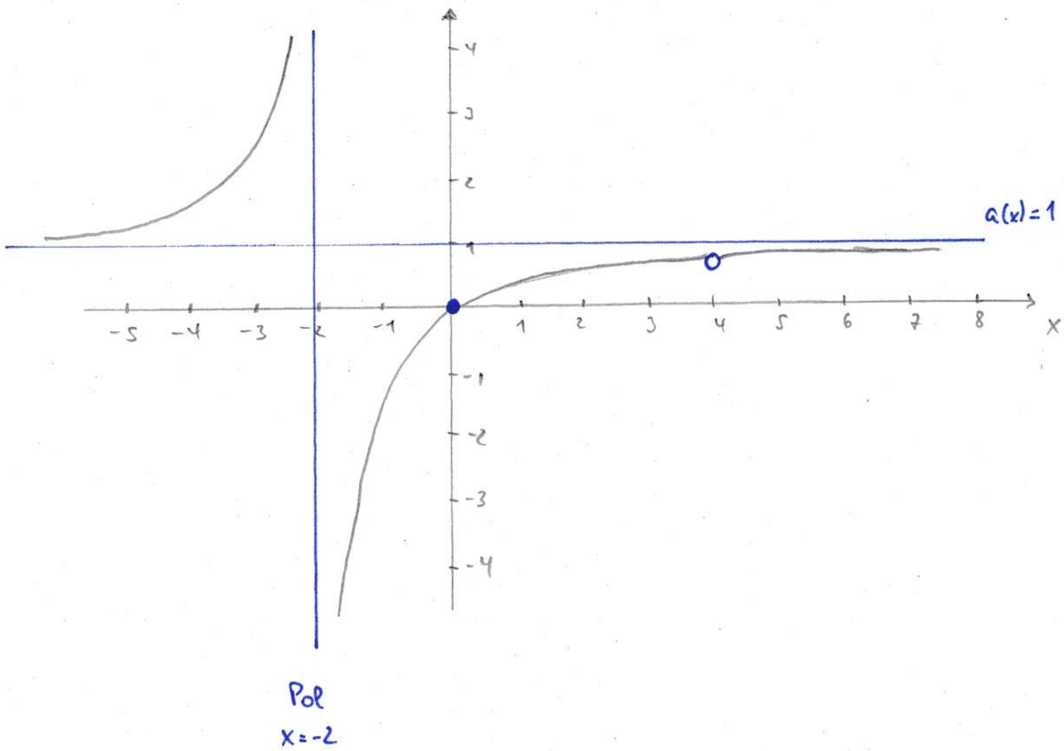
b) $f^*(x) = \dfrac{x}{x+2}$

c) $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x+2) - x \cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{2}{(x+2)^2}$

$f''(x) = 2 \cdot (-2)(x+2)^{-3} \cdot 1 = \dfrac{-4}{(x+2)^3}$

d) Es gibt weder Extrema noch WP, da jeweils das notwendige Kriterium $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ nicht erfüllt ist.

e)



A2

$$f(x) = \frac{x^2+bx}{x-a} \xrightarrow[x=-2]{\text{Pol}} \frac{x^2+bx}{x+2}$$

Asymptote: Koeffizientenvergleich

$$x^2+bx = (x+2)(x-1)$$

$$x^2+bx = x^2+x-2$$

$$\Rightarrow \quad b = 1$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{x^2+x}{x+2}$$

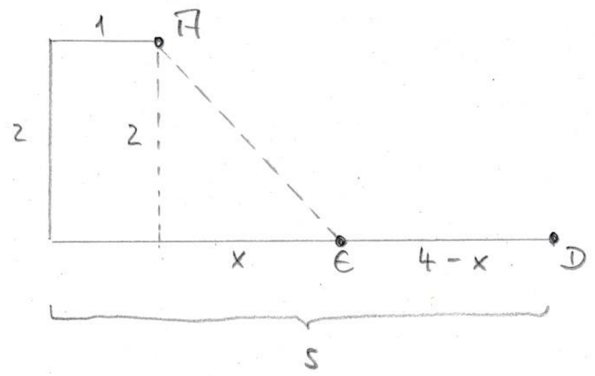
A3

a) $K_1 = 8 \cdot 500{,}00 = 4.000{,}00$

b) Weg $\overline{DA} = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$

$K_2 = \sqrt{20} \cdot 750{,}00 = 3.354{,}10$

c)



$$f(x) = \sqrt{4+x^2} \cdot 750 + (4-x) \cdot 500$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} \cdot 750 - 500 = 0$$

$$750\,x = 500 \cdot \sqrt{4+x^2}$$

$$\frac{3}{2}\,x = \sqrt{4+x^2} \quad |^2$$

$$\frac{9}{4}x^2 = 4+x^2 \quad \rightsquigarrow |x| = \sqrt{\frac{16}{5}} = \sqrt{3{,}2}$$

$K_3 = \sqrt{4+3{,}2} \cdot 750 + (4 - \sqrt{3{,}2}) \cdot 500$

$K_3 = \sqrt{7{,}2} \cdot 750 + 2{,}21 \cdot 500$

$K_3 = 3.118{,}03$

$\Rightarrow$ Die dritte Alternative ist am günstigsten.

A4 $f(x) = \sqrt{36 - x^2} + \frac{1}{2}x$

a) $\mathbb{D}: \quad 36 - x^2 \geq 0 \quad \leadsto \quad |x| \leq 6 \quad \leadsto \quad \mathbb{D} = [-6;6]$

b) $S_y(0/6)$

NS: $\sqrt{36-x^2} = -\frac{1}{2}x \quad |^2$

$36 - x^2 = \frac{1}{4}x^2$

$\frac{5}{4}x^2 = 36 \quad \leadsto \quad |x| = \sqrt{28{,}8}$

Probe: $x_1 = \sqrt{28{,}8} \quad \leadsto \quad \sqrt{36-28{,}8} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{28{,}8}$ ↯

$\Rightarrow$ keine NS

$x_2 = -\sqrt{28{,}8} \quad \leadsto \quad \sqrt{36-28{,}8} = -\frac{1}{2} \cdot (-\sqrt{28{,}8})$

$\sqrt{7{,}2} = \sqrt{7{,}4} \quad \ast$

$\Rightarrow$ 1 NS bei $x_2 = -\sqrt{28{,}8} \approx -5{,}37$

c) $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{36-x^2}} + \frac{1}{2} = 0 \quad \leadsto \quad -x = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{36-x^2}$

$2x = \sqrt{36-x^2}$

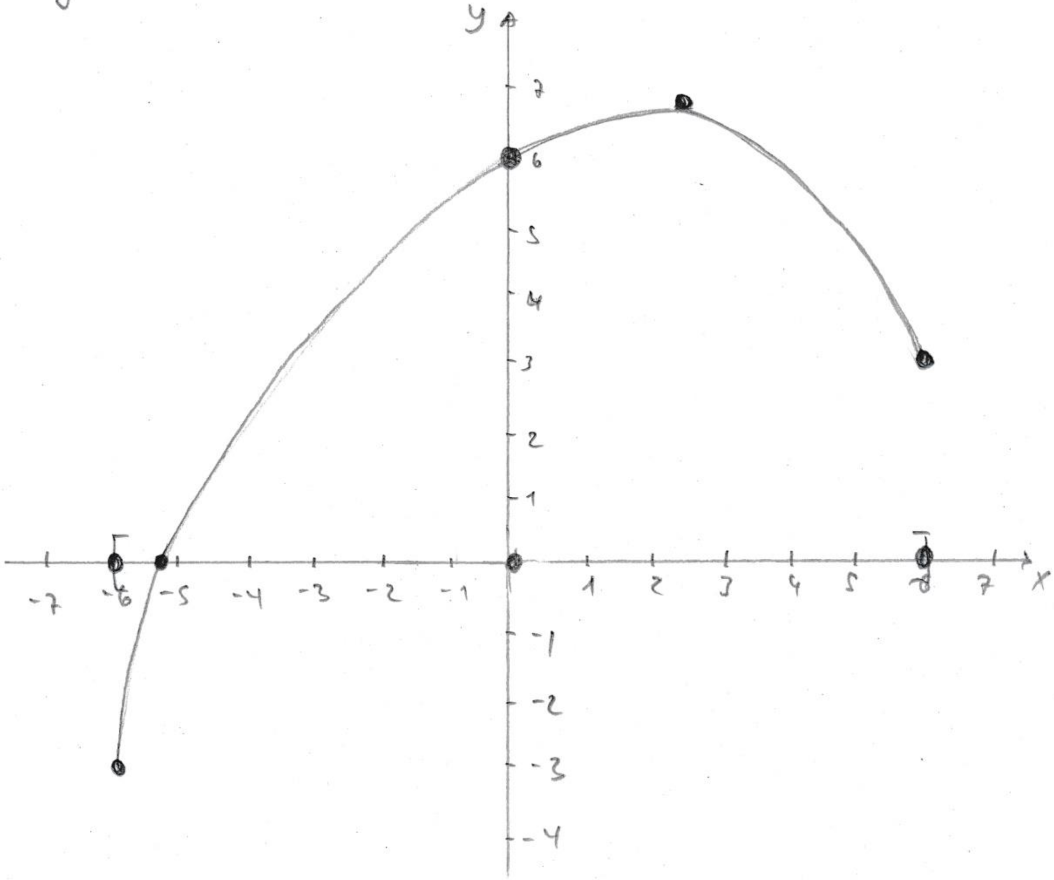
$4x^2 = 36 - x^2$

$5x^2 = 36$

$|x| = \sqrt{7{,}2}$

$\Rightarrow \text{Max}(\sqrt{7{,}2} / 3\sqrt{5}) = \text{Max}(2{,}68 / 6{,}71)$

d) Zeichnung



AS

a) $\int\left(\frac{1}{3}x^5 - \frac{3}{x^5} + \sqrt[5]{x^3}\right)dx$

$= \int\left(\frac{1}{3}x^5 - 3\cdot x^{-5} + x^{\frac{3}{5}}\right)dx$

$= \frac{1}{18}x^6 + \frac{3}{4}x^{-4} + \frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + C$

$= \frac{1}{18}x^6 + \frac{3}{4x^4} + \frac{5}{8}\cdot\sqrt[5]{x^8} + C$

b) $\int \frac{x^4 - 6x^2 + 5}{3x^2}\,dx$

$= \int\left(\frac{x^2}{3} - 2 + \frac{5}{3x^2}\right)dx$

$= \frac{1}{9}x^3 - 2x - \frac{5}{3x}$

A6

- Rechenvorteil durch Punktsymmetrie

- NS bestimmen mittels Substitution

$$x\,(x^4 - 10x + 9) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_{2/3} = \pm 1 \quad \vee \quad x_{4/5} = \pm 3$$

- Flächenberechnung:

$$2\int_0^1 f(x)\,dx + 2\left|\int_1^3 f(x)\,dx\right|$$

$$= 2\left[\tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{5}{2}x^4 + \tfrac{9}{2}x^2\right]_0^1 + 2\left|\left[\tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{5}{2}x^4 + \tfrac{9}{2}x^2\right]_1^3\right|$$

$$= 4\tfrac{1}{3} + 85\tfrac{1}{3}$$

$$= 89\tfrac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ Stammfkt. bilden

$\Rightarrow$ Grenzen einsetzen