12. Jgst.	1. Kursarbeit	Datum: 30.09.2016
Kurs LK 15/1+2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **ganzrationale Kurvenuntersuchung; Newton-Iteration; Rekonstruktion; Extremwertaufgaben**

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

Aufgabe 1: **Nullstellen einer ganzrationalen Funktion** | **6** | |

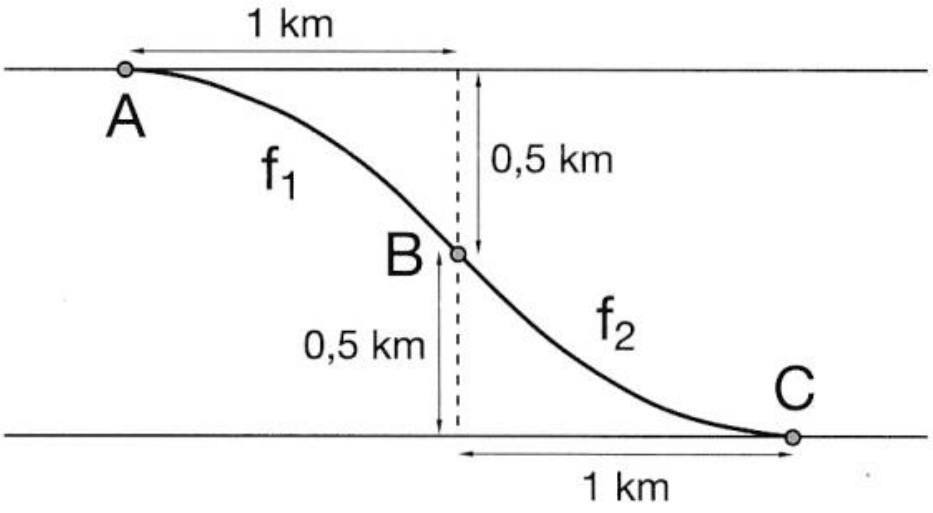
Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = x^5 - 241x^3 + 3600x$

Berechnen Sie nachvollziehbar alle Nullstellen der Funktion.

Aufgabe 2: **Rekonstruktion I** | **10** | |

Welche ganzrationale Funktion von möglichst kleinem Grad hat einen Extrempunkt in E(4/-27) und einen Wendepunkt in W(1/-9)?

Aufgabe 3: **Rekonstruktion II** | **10** | |



Zwei parallele Bahngleise werden zwischen den Punkten A und C durch ein Gleisstück verbunden. Diese Verbindung soll durch eine Funktion beschrieben werden.

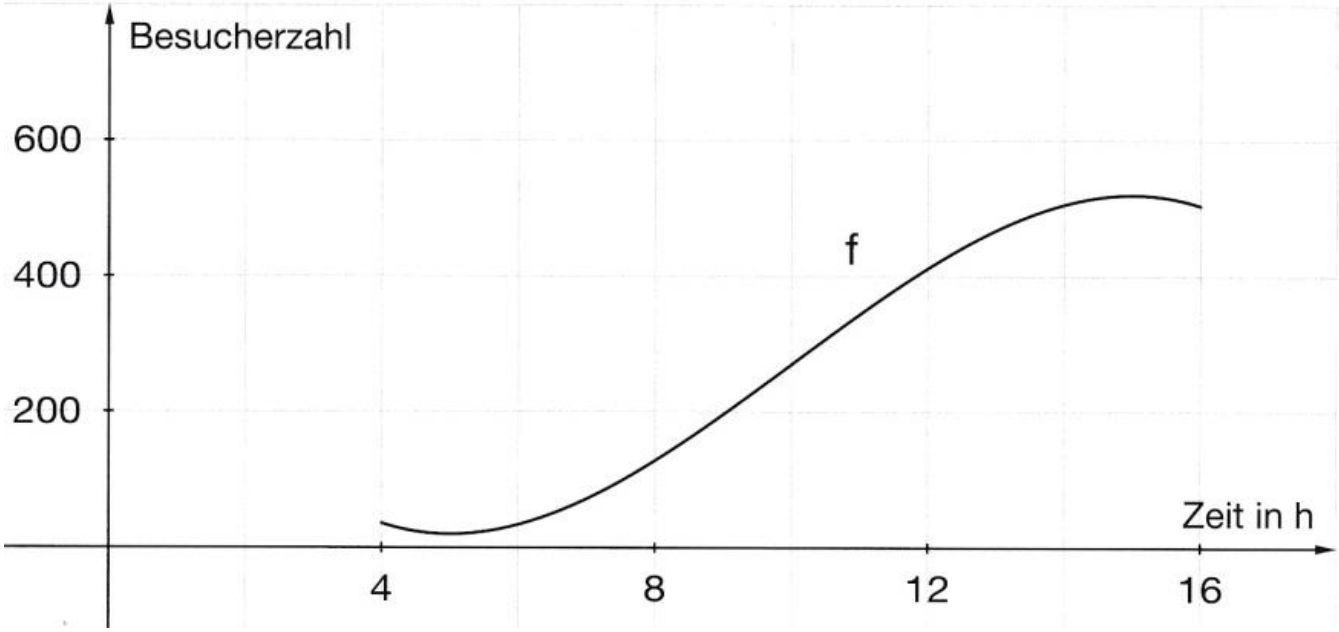
a) Wo würden Sie das Koordinatensystem anlegen? Fügen Sie es in das Bild ein.

b) Wie müsste eine Funktion dritten Grades lauten, welche die gesamte Verbindung beschreibt?

Aufgabe 4: Internetsurfer

22

Das Unternehmen Lepo lässt ständig beobachten, wie viele Surfer gerade die Internetpräsenz des Unternehmens besuchen. Die Kurve zeigt die durchschnittliche Besucherzahl der Webseite im Zeitraum von 4 Uhr morgens bis 16 Uhr nachmittags.



Die Anzahl der Surfer, die sich zu einem bestimmten Zeitpunkt auf der Webseite aufhalten, kann näherungsweise durch folgenden Funktionsterm beschrieben werden:

$$f(x) = -x^3 + 30x^2 - 225x + 520$$

a) Dabei gibt f(8) bspw. an, wie viele Surfer um 8 Uhr die Internetseite besuchen. Ermitteln Sie f(8).

b) Berechnen Sie f'(8) und erläutern Sie die Bedeutung von f'(8) in der betreffenden Situation.

c) In welchem Tagesabschnitt gibt es eine Zunahme der Besucherzahlen und wie kann dies mathematisch berechnet werden?

d) Wie hoch ist die durchschnittliche Zunahme der Besucherzahlen zwischen Minimum und Maximum?

e) Bestimmen Sie nun den Zeitpunkt, an dem die momentane Zunahme der durchschnittlichen Zunahme entspricht.

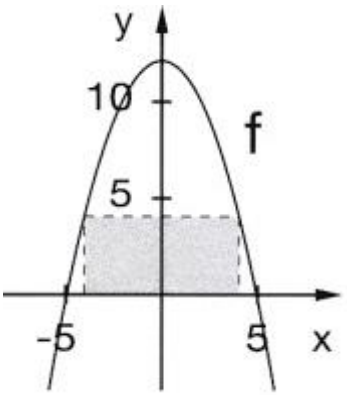
f) Zu welchem Zeitpunkt wird die größte Zunahme erreicht?

Aufgabe 5: **Extremwertaufgabe I**

8	

Der Graph der Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 12$ schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. In diese Fläche soll ein Rechteck mit achsenparallelen Seiten und möglichst großem Flächeninhalt gezeichnet werden.

Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?



Aufgabe 6: **Extremwertaufgabe II**

10	

Ein Fenster soll die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis haben.
Wie sind die Abmessungen (Höhe und Breite) zu wählen, damit bei einem gegebenen Umfang von 5 m die Fensterfläche möglichst groß wird?

Hilfreiche Formeln: $U = 2 \cdot r \cdot \pi$ *und* $A = r^2 \cdot \pi$

Zusatzaufgabe:

4	

Lösen Sie das LGS mit einem Verfahren Ihrer Wahl und tragen Sie das Ergebnis unten in die Lücken ein. Was fällt Ihnen dabei auf?

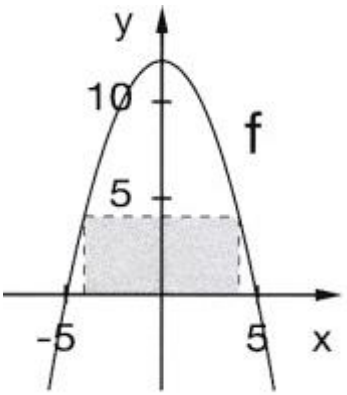
$$\begin{aligned} w + x + y + z &= 75 \\ 2w + 2x - 3y - z &= 2 \\ x - y + z &= 5 \\ 2w - x - y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Lösung: $\underbrace{\square}_{w}$. $\underbrace{\square}_{x}$. $\underbrace{\square}_{y}$ $\underbrace{\square}_{z}$

Aufgabe 5: **Extremwertaufgabe I** | 8 |

Der Graph der Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 12$ schließt mit der x-Achse eine Fläche ein. In diese Fläche soll ein Rechteck mit achsenparallelen Seiten und möglichst großem Flächeninhalt gezeichnet werden.

Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?



Aufgabe 6: **Extremwertaufgabe II** | 10 |

Ein Fenster soll die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis haben.
Wie sind die Abmessungen (Höhe und Breite) zu wählen, damit bei einem gegebenen Umfang von 5 m die Fensterfläche möglichst groß wird?

Hilfreiche Formeln: $U = 2 \cdot r \cdot \pi$ *und* $A = r^2 \cdot \pi$

Zusatzaufgabe: | 4 |

Lösen Sie das LGS mit einem Verfahren Ihrer Wahl und tragen Sie das Ergebnis unten in die Lücken ein. Was fällt Ihnen dabei auf?

$$\begin{aligned} w + x + y + z &= 75 \\ 2w + 2x - 3y - z &= 2 \\ x - y + z &= 5 \\ 2w - x - y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

Lösung : $\underbrace{\square}_{w} \; . \; \underbrace{\square}_{x} \; . \; \underbrace{\square}_{y} \; \underbrace{\square}_{z}$

①

$$f(x) = x^5 - 241x^3 + 3600x = 0$$

$$x\,(x^4 - 241x^2 + 3600) = 0$$

$x_1 = 0 \quad \wedge \quad x := u$

$$u^2 - 241u + 3600 = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{241 \pm \sqrt{58.081 - 14.400}}{2}$$

$$u_{1/2} = \frac{241 \pm \sqrt{43.681}}{2}$$

$$u_{1/2} = \frac{241 \pm 209}{2} \quad \begin{matrix} u_1 = 225 \\ u_2 = 16 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = \pm 15 \quad \wedge \quad x_{4/5} = \pm 4$$

②

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Ergebnis:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x - \frac{1}{3}$$

I	$f(4) = 64a + 16b + 4c + d$	$= -27$	
II	$f'(4) = 48a + 8b + c$	$= 0$	
III	$f(1) = a + b + c + d$	$= -9$	
IV	$f''(1) = 6a + 2b$	$= 0$	$\Rightarrow b = -3a$
I - III	$63a + 15b + 3c$	$= -18$	$\mid :3$
II	$48a + 8b + c$	$= 0$	
I	$21a + 5b + c$	$= -6$	
II	$48a + 8b + c$	$= 0$	
II - I	$27a + 3b$	$= 6$	$\xrightarrow{b=-3a} 18a = 6$

$$a = \frac{1}{3} \rightsquigarrow b = -1 \rightsquigarrow c = -8 \rightsquigarrow d = -\frac{1}{3}$$

③

a) Koordinatensystem: Ursprung bei B anlegen

b) $f(x) = ax^3 + cx$ wegen Punktsymmetrie

$f'(x) = 3ax^2 + c$

I $f(1) = a + c = -\frac{1}{2}$

II $f'(1) = 3a + c = 0$

II - I $\quad 2a = \frac{1}{2} \rightsquigarrow a = \frac{1}{4} \rightsquigarrow c = -\frac{3}{4}$

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x$

④

a) $f(8) = 128$

Horner-Schema:

	-1	30	-225	520
x = 8		-8	176	-392
	-1	22	-49	128 = f(8)

b)

x = 8	-8	112	
-1	14	63	= f'(8)

$f'(8) = 63 = m$

Erklärung: Zum Zeitpunkt 8.00 Uhr steigt die Besucheranzahl auf der Webseite um 63 Personen an.

c) $f'(x) = 0 \rightsquigarrow f'(x) = -3x^2 + 60x - 225 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm \sqrt{3600 - 2700}}{-6}$$

$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm 30}{-6} \quad \begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_2 = 15 \end{matrix}$$

Im Zeitraum von 5.00 Uhr bis 15.00 Uhr steigt die Besucheranzahl.

$f''(x) = -6x + 60$

$f''(5) = 30 > 0 \Rightarrow$ MIN

$f''(15) = -30 < 0 \Rightarrow$ MAX

d) $f(5) = 20$ $\qquad$ $f(15) = 520$

Horner - Schema:

	-1	30	-225	520		-1	30	-225	520
$x=5$		-5	125	-500	$x=15$		-15	225	0
	-1	25	-100	20		-1	15	0	520

$$m = \frac{520 - 20}{15 - 5} = \frac{500}{10} = 50$$

e) $f'(x) = m \rightsquigarrow -3x^2 + 60x - 225 = 50$

$$-3x^2 + 60x - 275 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm \sqrt{3600 - 3.300}}{-6}$$

$$x_{1/2} = \frac{-60 \pm 17.32}{-6} \quad \begin{matrix} x_1 = 12,89 \\ x_2 = 7,11 \end{matrix}$$

Die Zeitpunkte Paulen: 7.06 Uhr und 12.53 Uhr

f) $f''(x) = -6x + 60 = 0 \rightsquigarrow x = 10$

$f'''(x) = -6 < 0 \rightsquigarrow$ Max der Zunahme bzw. WP

$\Rightarrow$ Zunahme im WP: $f'(10) = 75$

(5)

ZF: $A(x,y) = 2x \cdot y$ NB: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 12$

$A(x) = 2x\left(-\frac{1}{2}x^2 + 12\right)$

$A(x) = -x^3 + 24x$

$A'(x) = -3x^2 + 24 = 0 \quad \sim \quad x^2 = 8$

$|x| = \sqrt{8}$

$y = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{8}^2 + 12$

$y = 8$

$\Rightarrow$ Fläche: $A = 2 \cdot \sqrt{8} \cdot 8$

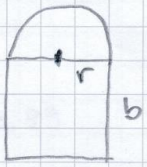
$A = 16 \cdot \sqrt{8}$

$A''(x) = -6x$

$A''(\sqrt{8}) = -6 \cdot \sqrt{8} < 0 \Rightarrow$ Max.

(6) ZF: $A = 2r \cdot b + \frac{1}{2} r^2 \pi$

(Rechteck)



NB: $S = 2r + 2b + r\pi$

$b = 2{,}5 - r - \frac{1}{2} r\pi$

$A(r) = 2r(2{,}5 - r - \frac{1}{2} r\pi) + \frac{1}{2} r^2 \pi$

$A(r) = 5r - 2r^2 - r^2\pi + \frac{1}{2} r^2 \pi$

$A(r) = 5r - 2r^2 - 0{,}5 r^2 \pi$

$A'(r) = 5 - 4r - r\pi = 0$

$r(4 + \pi) = 5$

$r = \frac{5}{4 + \pi} \approx 0{,}7$

$A''(r) = -4 - \pi < 0 \Rightarrow$ MAX

$b = 0{,}7$

$\Rightarrow$ Höhe: $b \approx 0{,}7$ und Breite: $2r \approx 1{,}4$

Zusatzaufgabe:

III $\quad z = 5 - x + y$

I	$w + x + y + 5 - x + y$	$= 75$	
II	$2w + 2x - 3y - 5 + x - y$	$= 2$	
IV	$2w - x - y - 10 + 2x - 2y$	$= -1$	
I	$w + 2y$	$= 70$	$\Rightarrow w = 70 - 2y$
II	$2w + 3x - 4y$	$= 7$	
IV	$2w + x - 3y$	$= 9$	
II	$140 - 4y + 3x - 4y$	$= 7$	
IV	$140 - 4y + x - 3y$	$= 9$	
II	$3x - 8y$	$= -133$	
IV	$x - 7y$	$= -131$	
II - 3 IV	$13y$	$= 260$	$\sim y = 20$

$w = 30$

$x = 9$

$z = 16$

$\underbrace{30}_{w} \cdot \underbrace{09}_{x} \cdot \underbrace{20}_{y} \underbrace{16}_{z}$ (Datum der KA)