

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2017

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Analytische Geometrie	WTR

1 Aufgabe

Die abgebildete Pagode, Zeichen ostasiatischer Architektur, steht im Hamburger Tierpark Hagenbeck. Jede der drei Dachetagen besteht aus vier Dachflächen gleicher Form und Größe. Die Dachflächen der mittleren und oberen Etage sind jeweils parallel zu einer Dachfläche der unteren Etage.

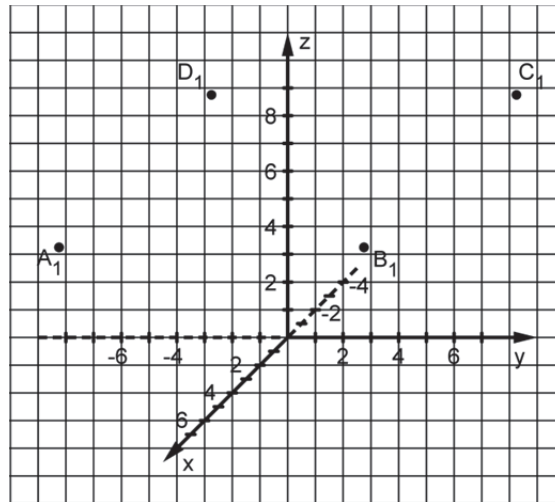
In einem kartesischen Koordinatensystem können die Dachflächen der unteren Etage modellhaft als Vierecke dargestellt werden. Die Punkte $A_1(5,5 | -5,5 | 6)$, $B_1(5,5 | 5,5 | 6)$, $C_1(-5,5 | 5,5 | 6)$, $D_1(-5,5 | -5,5 | 6)$, $A_2(2 | -2 | 8,1)$, $B_2(2 | 2 | 8,1)$, $C_2(-2 | 2 | 8,1)$ und $D_2(-2 | -2 | 8,1)$ sind die Eckpunkte dieser vier Vierecke. Dabei beschreibt die xy -Ebene die Horizontale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.



- a** Zeichnen Sie in das abgebildete Koordinatensystem für die untere Dachetage die fehlenden Eckpunkte sowie die Strecken ein, die die Kanten der Dachflächen darstellen.

BE

3

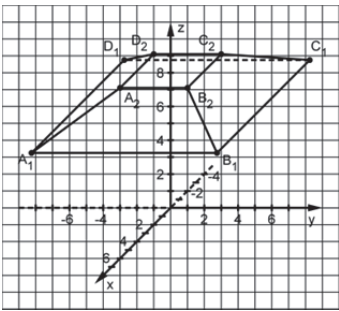


- b** Zeigen Sie rechnerisch, dass das Viereck $A_1B_1B_2A_2$ ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. Begründen Sie, dass es sich nicht um ein Parallelogramm handelt.
- c** Geben Sie die Koordinaten der Mittelpunkte M_1 und M_2 der Seiten A_1B_1 bzw. A_2B_2 an. Berechnen Sie den gesamten Inhalt der Dachflächen der unteren Etage in Quadratmetern.
- d** Die Strecke $\overline{A_1A_2}$ ist Teil einer Geraden g . Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g mit der z -Achse.
- Das Viereck $A_1B_1B_2A_2$ liegt in der Ebene $E: 3x + 5z = 46,5$ und stellt die untere der drei Dachflächen auf der Südseite der Pagode dar.
- e** Berechnen Sie den Neigungswinkel dieser Dachfläche gegenüber der Horizontalen.
- f** Auch die beiden Dachflächen der mittleren und oberen Etage auf der Südseite der Pagode können im Modell jeweils durch ein Viereck dargestellt werden. Die Ebenen, in denen diese beiden Vierecke liegen, werden durch zwei der folgenden Gleichungen beschrieben. Ordnen Sie die beiden Dachflächen jeweils einer Gleichung zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.
- | | | | | | |
|----|-------------------|----|------------------|-----|------------------|
| I | $3x + 8z = 46,5$ | II | $3x + 5z = 24,5$ | III | $3x + 5z = 58$ |
| IV | $3x + 10z = 46,5$ | V | $3x + 5z = 35$ | VI | $3x + 5z = 68,5$ |

20

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
<p>a</p> 	3
<p>b $\overrightarrow{A_1B_1}$ und $\overrightarrow{A_2B_2}$ sind kollinear und es gilt $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_2}$. Da $\overrightarrow{A_1B_1} \neq \overrightarrow{A_2B_2}$, ist $A_1B_1B_2A_2$ kein Parallelogramm.</p>	3
<p>c $M_1(5,5 0 6)$, $M_2(2 0 8,1)$ $\frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \approx 30,6$ Der gesamte Inhalt der Dachflächen der unteren Etage beträgt etwa 122m^2.</p>	5
<p>d $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ -5,5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3,5 \\ 3,5 \\ 2,1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ $5,5 - 3,5\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{11}{7}; 6 + 2,1 \cdot \frac{11}{7} = 9,3$ Damit: $(0 0 9,3)$</p>	3
<p>e Mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\cos \varphi = \frac{ \vec{m} \circ \vec{n} }{ \vec{m} \cdot \vec{n} }$, d. h. $\varphi \approx 31^\circ$</p>	2
<p>f III: Dachfläche der mittleren Etage VI: Dachfläche der oberen Etage Die drei Dachflächen auf der Südseite der Pagode sind parallel zueinander. Die Normalenvektoren der Ebenen, in denen im Modell die drei zugehörigen Vierecke liegen, sind deshalb kollinear. Damit kommen nur die Gleichungen II, III, V und VI infrage. Betrachtet man für die drei Vierecke zur unteren, mittleren und oberen Dachfläche jeweils einen Punkt mit der gleichen x-Koordinate und den z-Koordinaten z_1, z_2 bzw. z_3, so gilt $z_1 < z_2 < z_3$ und damit $3x + 5z_1 < 3x + 5z_2 < 3x + 5z_3$.</p>	4
	20

3 Standardbezug

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen ¹						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	X		X						I		I	X		
b	3	X	X	X			II	II			I			X	
c	5	X	X	X					I		II			X	
d	3	X		X				I			I		X		
e	2	X	X	X					I		II			X	
f	4			X			III	III	II						X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsschlüssel² vorgesehen, der angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

¹ Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

² Der Bewertungsschlüssel ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.