

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2017

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Lineare Algebra	CAS

1 Aufgabe

BE

- 1 Wölfe leben im Rudelverband. Ein Rudel besteht aus einem Elternpaar, das das Rudel führt, und dessen Nachkommen.

Betrachtet wird die Entwicklung einer Population der weiblichen Tiere eines Wolfsbestands in einem großen, abgeschlossenen Gebiet. Im ersten Lebensjahr werden die Tiere als Welpen und im zweiten als Jungtiere bezeichnet. Ab dem dritten Lebensjahr sind die Tiere geschlechtsreif und werden Rudelführerinnen. Jede Rudelführerin bringt pro Jahr durchschnittlich drei weibliche Welpen zur Welt.

In einem Modell werden Zusammensetzungen der Population der weiblichen Wölfe

durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix} W \\ J \\ R \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei W die Anzahl der Welpen, J die

Anzahl der Jungtiere und R die Anzahl der Rudelführerinnen bezeichnet. Zu Beginn der Beobachtung wird die Zusammensetzung der Population durch den Vektor \vec{v}_0 dargestellt.

Die Entwicklung der Population von einem Jahr n zum nächsten lässt sich durch die

Matrix $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,8 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\vec{v}_{n+1} = L \cdot \vec{v}_n$ beschreiben.

- a Stellen Sie die Entwicklung der Population in einem Übergangsdiagramm dar.

3

- b** Nennen Sie den Eintrag der Matrix L , der die Überlebensrate der Welpen angibt. Beschreiben Sie, wie sich dieser Eintrag bei einer Erhöhung der Sterblichkeitsrate der Welpen ändern würde. 2

- c** Zu Beobachtungsbeginn gehören zur Population 39 Rudelführerinnen, ein Jahr später sind es bereits 55. Bestimmen Sie die Anzahl der Jungtiere zu Beobachtungsbeginn. 2

Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn ändern sich die Umweltbedingungen und damit die Entwicklung der Population. Die Entwicklung kann von diesem Zeitpunkt an im Zwei-Jahres-Rhythmus, d. h. von einem Jahr zum übernächsten, durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3,75 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0,24 & 0,45 & 0,56 \end{pmatrix} \text{ und die Gleichung } \vec{v}_{n+2} = M \cdot \vec{v}_n \text{ beschrieben werden. Sechs}$$

Jahre nach Beobachtungsbeginn wird die Zusammensetzung der Population durch den Vektor $\vec{v}_6 = \begin{pmatrix} 600 \\ 173 \\ 165 \end{pmatrix}$ dargestellt.

- d** Ermitteln Sie die Anzahl der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen vier Jahre nach Beobachtungsbeginn. 2

- e** Bestimmen Sie die Anzahl der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen acht Jahre nach Beobachtungsbeginn. 1

- f** Die Vektoren $\vec{v}_{10} \approx \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_{12} \approx \begin{pmatrix} 4126 \\ 1195 \\ 1138 \end{pmatrix}$ stellen die Zusammensetzungen der 2

Population zehn bzw. zwölf Jahre nach Beobachtungsbeginn dar. Aus diesen Vektoren soll ein Faktor ermittelt werden, mit dem die Anzahl der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen von einem Jahr zum nächsten zunimmt. Zeigen Sie rechnerisch, dass dieser Faktor für jede der drei Altersgruppen etwa 1,38 beträgt.

- g** Beurteilen Sie die Beschreibung der Entwicklung der Population durch die Matrix M hinsichtlich ihrer Eignung zur langfristigen Beschreibung der Entwicklung der Population. 2

2 Gegeben ist die Matrix $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ sowie Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$.

- a** Zeigen Sie, dass es keinen Vektor $\vec{u} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gibt, für den $N \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt. 2

- b** Für einen Vektor \vec{u} gilt $|\vec{u}|^2 = 1800$. Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $N \cdot \vec{u} = \vec{u}$. 4

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	<p>a</p>	3
	<p>b Eintrag: 0,4</p> <p>Bei einer Erhöhung der Sterblichkeitsrate der Welpen würde der Wert des Eintrags kleiner werden.</p>	2
	<p>c Da innerhalb des ersten Jahres nach Beobachtungsbeginn 70 % der Jungtiere zu Rudelführerinnen heranwachsen und 80 % der Rudelführerinnen dieses Jahr überleben, gilt: $0,7 \cdot J + 0,8 \cdot 39 = 55 \Leftrightarrow J = 34$</p>	2
	<p>d</p> $\vec{v}_4 = M^{-1} \cdot \vec{v}_6 \approx \begin{pmatrix} 313 \\ 92 \\ 87 \end{pmatrix}$	2
	<p>e</p> $\vec{v}_8 = M \cdot \vec{v}_6 \approx \begin{pmatrix} 1138 \\ 330 \\ 314 \end{pmatrix}$	1
	<p>f</p> $1,38^2 \cdot \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4129 \\ 1198 \\ 1139 \end{pmatrix} \approx \vec{v}_{12}$	2
	<p>g Das Modell ist zur langfristigen Beschreibung der Entwicklung der Population nicht geeignet. So ist davon auszugehen, dass sich diese mit den Umweltbedingungen ändert und damit das Modell im Abstand weniger Jahre angepasst werden muss.</p>	2
2	<p>a $N \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$</p>	2
	<p>b</p> $N \cdot \vec{u} = \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 4t \\ t \\ t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$ $(4t)^2 + t^2 + t^2 = 1800 \Leftrightarrow t = -10 \vee t = 10$ <p>Damit ergeben sich als Lösungen $-\begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$.</p>	4
		20

3 Standardbezug

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen ¹						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1a	3	X							I	I		I	X		
b	2	X					I		I	I			X		
c	2	X						II	II		I			X	
d	2	X							II		I	I		X	
e	1	X							I		I		X		
f	2	X					II				I	I		X	
g	2	X					II		II			I		X	
2a	2	X						II			I			X	
b	4	X						III			II				X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsschlüssel² vorgesehen, der angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

¹ Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

² Der Bewertungsschlüssel ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.