

## Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

# Pool für das Jahr 2017

## Aufgabe für das Fach Mathematik

### Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Lineare Algebra	WTR

### 1 Aufgabe

- 1** Wölfe leben im Rudelverband. Ein Rudel besteht aus einem Elternpaar, das das Rudel führt, und dessen Nachkommen.

Betrachtet wird die Entwicklung einer Population der weiblichen Tiere eines Wolfsbestands in einem großen, abgeschlossenen Gebiet. Im ersten Lebensjahr werden die Tiere als Welpen und im zweiten als Jungtiere bezeichnet. Ab dem dritten Lebensjahr sind die Tiere geschlechtsreif und werden Rudelführerinnen. Jede Rudelführerin bringt pro Jahr durchschnittlich drei weibliche Welpen zur Welt.

In einem Modell werden Zusammensetzungen der Population der weiblichen Wölfe

durch Vektoren der Form  $\begin{pmatrix} W \\ J \\ R \end{pmatrix}$  dargestellt, wobei W die Anzahl der Welpen, J die

Anzahl der Jungtiere und R die Anzahl der Rudelführerinnen bezeichnet. Zu Beginn der Beobachtung wird die Zusammensetzung der Population durch den Vektor  $\vec{v}_0$  dargestellt.

Die Entwicklung der Population von einem Jahr n zum nächsten lässt sich zunächst

durch die Matrix  $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ x & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,8 \end{pmatrix}$  und die Gleichung  $\vec{v}_{n+1} = L \cdot \vec{v}_n$  beschreiben.

- a** Stellen Sie die Entwicklung der Population in einem Übergangsdiagramm dar.

- b** Beschreiben Sie die Bedeutung von x im Sachzusammenhang.

BE

3

1

**c** 72 % der Tiere sterben innerhalb der ersten zwei Lebensjahre. Ermitteln Sie den Wert von  $x$ . 2

**d** Zu Beobachtungsbeginn gehören zur Population 39 Rudelführerinnen, ein Jahr später sind es bereits 55. Bestimmen Sie die Anzahl der Jungtiere zu Beobachtungsbeginn. 2

Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn ändern sich die Umweltbedingungen und damit die Entwicklung der Population. Die Entwicklung kann nun im Zwei-Jahres-Rhythmus, d. h. von einem Jahr zum übernächsten, durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3,75 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0,24 & 0,45 & 0,56 \end{pmatrix} \text{ und die Gleichung } \vec{v}_{n+2} = M \cdot \vec{v}_n \text{ beschrieben werden. Sechs}$$

Jahre nach Beobachtungsbeginn wird die Zusammensetzung der Population durch

$$\text{den Vektor } \vec{v}_6 = \begin{pmatrix} 600 \\ 173 \\ 165 \end{pmatrix} \text{ dargestellt, d. h. die Population besteht aus 938 Tieren.}$$

**e** Bestimmen Sie die Anzahl der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen acht Jahre nach Beobachtungsbeginn. 2

**f** Die Vektoren  $\vec{v}_{10} \approx \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix}$  und  $\vec{v}_{12} \approx \begin{pmatrix} 4126 \\ 1195 \\ 1138 \end{pmatrix}$  stellen die Zusammensetzungen der 2

Population zehn bzw. zwölf Jahre nach Beobachtungsbeginn dar. Aus diesen Vektoren soll ein Faktor ermittelt werden, mit dem die Anzahl der Welpen, Jungtiere und Rudelführerinnen von einem Jahr zum nächsten zunimmt. Zeigen Sie rechnerisch, dass dieser Faktor für jede der drei Altersgruppen etwa 1,38 beträgt.

**g** Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung  $938 \cdot 1,38^{t-6} = 45000$  mit  $t \in [6; +\infty[$ . Interpretieren Sie unter Verwendung der Lösung dieser Gleichung die Zahl 45000 im Sachzusammenhang. 3

**h** Beurteilen Sie das verwendete Modell hinsichtlich seiner Eignung zur langfristigen Beschreibung der Entwicklung der Population. 2

**2** Betrachtet werden  $3 \times 3$ -Matrizen  $N$  sowie Vektoren  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$  mit  $\vec{u} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , für die

$N \cdot \vec{u} = \vec{u}$  gilt.

**a** Die Matrix  $N^{-1}$  ist die inverse Matrix zu einer der Matrizen  $N$ . Prüfen Sie für jede der beiden folgenden Gleichungen, ob es einen Wert von  $a \in \mathbb{R}$  gibt, für den die Gleichung erfüllt ist: 4

♦  $(N \cdot N^{-1}) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u}$

♦  $(N + N^{-1}) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u}$

b Zeigen sie für  $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ , dass  $u_2 = u_3$  gilt.

4

25

## 2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a		3
b	x ist der Anteil der Welpen, die innerhalb ihres ersten Lebensjahres zu Jungtieren heranwachsen.	1
c	28 % der Tiere überleben die ersten beiden Lebensjahre und werden zu Rudelführerinnen. Damit: $0,7 \cdot x = 0,28 \Leftrightarrow x = 0,4$	2
d	Da innerhalb des ersten Jahres nach Beobachtungsbeginn 70 % der Jungtiere zu Rudelführerinnen heranwachsen und 80 % der Rudelführerinnen dieses Jahr überleben, gilt: $0,7 \cdot J + 0,8 \cdot 39 = 55 \Leftrightarrow J = 34$	2
e	$\vec{v}_8 = M \cdot \vec{v}_6 = \begin{pmatrix} 3 \cdot 173 + 3,75 \cdot 165 \\ 2 \cdot 165 \\ 0,24 \cdot 600 + 0,45 \cdot 173 + 0,56 \cdot 165 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1138 \\ 330 \\ 314 \end{pmatrix}$	2
f	$1,38^2 \cdot \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4129 \\ 1198 \\ 1139 \end{pmatrix} \approx \vec{v}_{12}$	2
g	$938 \cdot 1,38^{t-6} = 45000$ liefert: $t \approx 18$ Die Zahl 45000 gibt die Anzahl der Tiere an, aus denen die Population etwa 18 Jahre nach Beobachtungsbeginn besteht.	3
h	Das Modell ist zur langfristigen Beschreibung der Entwicklung der Population nicht geeignet. So ist davon auszugehen, dass sich diese mit den Umweltbedingungen ändert und damit das Modell im Abstand weniger Jahre angepasst werden muss.	2
2 a	<p>♦ <math>(N \cdot N^{-1}) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = a \cdot \vec{u} \Leftrightarrow a = 1</math></p> <p>♦ Mit <math>(N + N^{-1}) \cdot \vec{u} = N \cdot \vec{u} + N^{-1} \cdot \vec{u} = \vec{u} + N^{-1} \cdot N \cdot \vec{u} = 2\vec{u}</math> ergibt sich:</p>	4

	$(N + N^{-1}) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} \Leftrightarrow a = 2$	
<b>b</b>	$N \cdot \vec{u} = \vec{u}$ liefert: $0,4u_2 + 0,6u_3 = u_3 \Leftrightarrow 0,4u_2 = 0,4u_3 \Leftrightarrow u_2 = u_3$	4
		25

### 3 Standardbezug

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen <sup>1</sup>						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
<b>1 a</b>	3	X							I	I		I	X		
<b>b</b>	1	X							I	I		I	X		
<b>c</b>	2	X						II	II		I			X	
<b>d</b>	2	X						II	II		I			X	
<b>e</b>	2	X							I		I	I	X		
<b>f</b>	2	X					II				I	I		X	
<b>g</b>	3	X					II		II		II			X	
<b>h</b>	2	X					II		II			I		X	
<b>2 a</b>	4	X					III	III			II				X
<b>b</b>	4	X					II	III			II				X

### 4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsschlüssel<sup>2</sup> vorgesehen, der angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

<sup>1</sup> Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

<sup>2</sup> Der Bewertungsschlüssel ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.