

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2017

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analytische Geometrie	CAS

1 Aufgabe

Ein geschlossenes Zelt, das auf horizontalem Untergrund steht, hat die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die seitlichen Kanten der Zeltwände werden durch vier gleich lange Stangen gebildet. Das Zelt ist 3,90 m hoch, die Seitenlänge des Zeltbodens beträgt 5,00 m.

Das Zelt kann in einem kartesischen Koordinatensystem durch eine Pyramide ABCDS mit der Spitze S modellhaft dargestellt werden. Der Punkt A liegt im Koordinatenursprung, B auf dem positiven Teil der x-Achse und D auf dem positiven Teil der y-Achse. Der Punkt C hat die Koordinaten $(5 | 5 | 0)$, der Mittelpunkt der Grundfläche wird mit M bezeichnet. Das Dreieck ABS liegt in der Ebene $E: -39y + 25z = 0$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

- a** Geben Sie die Koordinaten der Punkte B, D, M und S an und zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem gemäß Abbildung 1 ein.

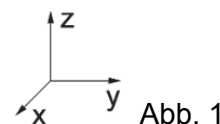


Abb. 1

- b** Jeweils zwei benachbarte Zeltwände schließen im Inneren des Zelts einen stumpfen Winkel ein. Ermitteln Sie dessen Größe.
- c** Im Zelt ist eine Lichtquelle so aufgehängt, dass sie von jeder der vier Wände einen Abstand von 80 cm hat. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts, der die Lichtquelle im Modell darstellt.
- d** Der Ortsvektor eines Punkts P lässt sich in der Form $\overrightarrow{OP} = r \cdot \overrightarrow{OC} + s \cdot \overrightarrow{OS}$ mit $r, s \in [0; 1]$ und $r + s = 1$ darstellen. Weisen Sie nach, dass P auf der Strecke \overline{CS} liegt.

BE

5

4

4

3

Betrachtet wird die Zeltwand, die im Modell durch das Dreieck CDS dargestellt wird. Ein Teil dieser Zeltwand kann mithilfe zweier weiterer Stangen zu einem horizontalen Vordach aufgespannt werden (vgl. Abbildung 2). Die dadurch entstehende Öffnung in der Zeltwand kann im Modell durch ein Rechteck dargestellt werden. Eine Seite dieses Rechtecks liegt so auf der Strecke \overline{CD} , dass der eine Endpunkt dieser Seite von C ebenso weit entfernt ist wie der andere Endpunkt von D.

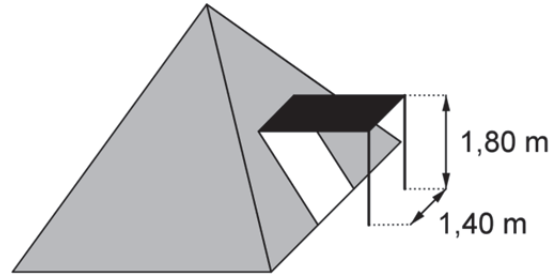


Abb. 2

- e Weisen Sie nach, dass die Länge des Vordachs etwa 2,14 m beträgt.

4

Alle Punkte derjenigen Kante des Vordachs, an deren Enden die beiden Stangen befestigt sind, haben im Modell die gleiche y-Koordinate. Bestimmen Sie diese y-Koordinate.

(zur Kontrolle: Die y-Koordinate beträgt etwa 5,98.)

- f Auf das Zelt treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell zu einem bestimmten Zeitpunkt durch parallele Geraden mit einem Richtungsvektor

5

$\begin{pmatrix} 0,5 \\ -4,2 \\ a \end{pmatrix}$ beschreiben. Zu diesem Zeitpunkt trifft Sonnenlicht durch ein kleines Loch im horizontalen Vordach genau auf den Mittelpunkt des Zeltbodens.

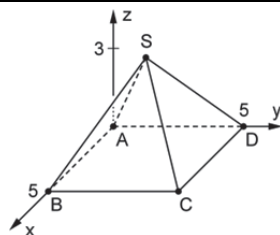
Für a kommen verschiedene ganzzahlige Werte infrage. Ermitteln Sie einen dieser Werte und geben Sie die Koordinaten des zugehörigen Punkts an, der im Modell eine mögliche Position des Lochs im Vordach darstellt.

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	$B(5 0 0),$ $D(0 5 0),$ $M(2,5 2,5 0),$ $S(2,5 2,5 3,9)$	5



b	<p>Ein Normalenvektor der Ebene, in der das Dreieck ADS liegt, ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} -39 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$.</p> <p>Mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ -39 \\ 25 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\cos \varphi = \frac{ \vec{m} \circ \vec{n} }{ \vec{m} \cdot \vec{n} }$, d. h. $\varphi \approx 73,1^\circ$</p> <p>Die Größe des Winkels beträgt etwa $180^\circ - 73,1^\circ = 106,9^\circ$.</p>	4
c	<p>Koordinaten des Punkts: $(2,5 2,5 z_L)$</p> <p>Für $z_L \leq 3,9$ liefert $\left \frac{-39 \cdot 2,5 + 25 \cdot z_L}{\sqrt{39^2 + 25^2}} \right = 0,8 : z_L \approx 2,4$</p>	4
d	<p>$\vec{OP} = (1-s) \cdot \vec{OC} + s \cdot \vec{OS} = \vec{OC} + s \cdot (\vec{OS} - \vec{OC}) = \vec{OC} + s \cdot \vec{CS}$</p> <p>Da $s \in [0;1]$, liegt P auf der Strecke \vec{CS}.</p>	3
e	<p>Die horizontale Entfernung von oberer und unterer Kante der Öffnung in der Zeltwand beträgt $\frac{1,8}{3,9} \cdot 2,5 \text{ m}$.</p> <p>Damit ergibt sich für die Länge des Vordachs: $\sqrt{1,80^2 + \left(\frac{1,8}{3,9} \cdot 2,5\right)^2} \approx 2,14$</p> <p>y-Koordinate: $5 - \frac{1,8}{3,9} \cdot 2,5 + \sqrt{1,80^2 + \left(\frac{1,8}{3,9} \cdot 2,5\right)^2} \approx 5,98$</p>	4
f	<p>Bezeichnet man die Koordinaten des gesuchten Punkts mit x_P, y_P und z_P, so muss gelten:</p> <ul style="list-style-type: none"> ♦ $x_P \in [1,8;3,2]$ ♦ $y_P \in [b;c]$, $b = 5 - \frac{1,8}{3,9} \cdot 2,5 \approx 3,85$, $c \approx 5,98$ ♦ $z_P = 1,8$ ♦ $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -4,2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ 1,8 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ <p>Probieren liefert für $a = -3$: $x_P = 2,2$, $y_P = 5,02$</p>	5
		25

3 Standardbezug

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen ¹						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	5	X		X					I	I		I	X		
b	4	X	X	X				II	I		II			X	
c	4	X	X	X				II	II		II			X	
d	3			X			III	III			III				X
e	4		X	X				II			II	II		X	
f	5	X		X			II	III	II						X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsschlüssel² vorgesehen, der angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

¹ Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

² Der Bewertungsschlüssel ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.