Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2017

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analytische Geometrie	WTR

1 Aufgabe

BE

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Viereck ABCD mit $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$, $C(-4|8|5)$ und $D(-6|2|5)$ gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks wird mit M bezeichnet.

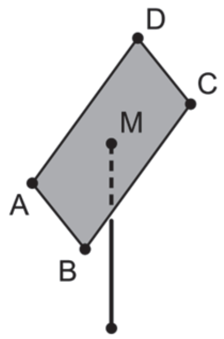
a Begründen Sie, dass die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft. 2

b Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist. Geben Sie die Koordinaten von M an. 4

c Das Rechteck ABCD liegt in einer Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 4

(zur Kontrolle: $3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$)

Solarmodule werden auf einem Trägergestell montiert, das an einem vertikal stehenden Metallrohr befestigt ist. Die gesamte Fläche der Solarmodule wird zu einem bestimmten Zeitpunkt modellhaft durch das Rechteck ABCD dargestellt. Das Metallrohr lässt sich im Modell durch eine Strecke beschreiben, der Befestigungspunkt am Trägergestell durch den Punkt M (vgl. Abbildung). Im Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht 0,8 m in der Wirklichkeit.



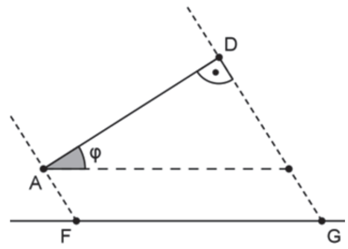
d Im Sinne eines möglichst großen Energieertrags sollte der Neigungswinkel φ der Modulfläche gegenüber der Horizontalen zwischen 30° und 36° liegen. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist. 3

e	Zum betrachteten Zeitpunkt fällt das Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, senkrecht auf die Fläche der Solarmodule. Diese Fläche erzeugt auf dem horizontalen Untergrund einen rechteckigen Schatten. Begründen Sie unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze, dass der Flächeninhalt des Schattens mithilfe des Terms $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \frac{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}{\cos\varphi} \cdot (0{,}8\,\text{m})^2$ berechnet werden kann.	5
	Um die Solarmodule während eines Tages ständig möglichst gut nach der Sonneneinstrahlung ausrichten zu können, lässt sich das Metallrohr mit dem Trägergestell um die Längsachse des Rohrs drehen. Die Neigung des Trägergestells bleibt dabei unverändert.	
f	Betrachtet wird der untere linke Eckpunkt der Modulfläche, der im Modell durch den Punkt A dargestellt wird. Berechnen Sie den Radius des Kreises, auf dem sich dieser Eckpunkt bei der Drehung des Metallrohrs bewegt.	4
g	Begründen Sie ohne zu rechnen, dass der in Teilaufgabe f ermittelte Radius entsprechend auch für den unteren rechten Eckpunkt der Modulfläche gilt.	3
		25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a	Die x_3-Koordinaten der Punkte A und B stimmen überein.	2
b	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0$ $M(-2\,\|\,4\,\|\,3)$	4
c	$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC};\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ Das daraus resultierende Gleichungssystem I $x_1 = 2\lambda - 4\mu$ II $x_2 = 6\lambda + 8\mu$ III $x_3 = 1 + 4\mu$ liefert $3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$.	4
d	Mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\cos\varphi = \frac{\vec{m} \circ \vec{n}}{\left\|\vec{m}\right\| \cdot \left\|\vec{n}\right\|}$, d. h. $\varphi \approx 32{,}3°$ Die Bedingung ist erfüllt.	3

e	Da die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft, ist $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ die Breite des Rechtecks, das den Schatten im Modell darstellt. Da $\cos\varphi = \frac{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}{\left\|\overrightarrow{FG}\right\|}$ gilt, ist $\frac{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|}{\cos\varphi}$ die Länge dieses Rechtecks. Durch den Faktor $(0{,}8\,\text{m})^2$ wird der Maßstab berücksichtigt. 	5
f	Fußpunkt des Lots von A auf die Strecke, die das Metallrohr darstellt: $L(-2\,\|\,4\,\|\,1)$ $\left\|\overrightarrow{LA}\right\| = 2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}\cdot 0{,}8\,\text{m} \approx 3{,}6\,\text{m}$	4
g	A und B haben vom Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks ABCD den gleichen Abstand. Die Strecke $\overline{AB}$ verläuft parallel zur x_1x_2-Ebene, die Strecke, die das Metallrohr darstellt, senkrecht dazu. Damit haben A und B von der Strecke, die das Metallrohr darstellt, den gleichen Abstand.	3
		25

3 Standardbezug

Teilaufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen[1]						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	X		X			I				I		X		
b	4	X		X			I				I		X		
c	4	X		X							II			X	
d	3	X	X	X					I		II	I		X	
e	5		X	X				III	III	II					X
f	4	X	X	X				II			I	I		X	
g	3			X			III	III				II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsschlüssel[2] vor-

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

[2] Der Bewertungsschlüssel ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur", das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.

gesehen, der angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.