Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2017

Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analytische Geometrie	WTR

1 Aufgabe

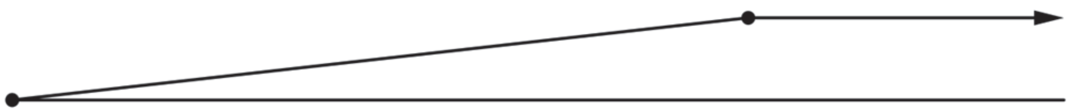
BE

Eine Radarstation überwacht die Bewegung eines Flugzeugs. Die Bewegung kann modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden, dessen x_1x_2-Ebene die Horizontale beschreibt; eine Längeneinheit entspricht einem Kilometer in der Realität. Der Standort der Radarstation wird durch den Punkt $R(18\,|\,0\,|\,-1)$ beschrieben.

Zu Beginn der Beobachtung um 14.00 Uhr wird die Position des Flugzeugs durch den Punkt $A(0|0|0)$ beschrieben. Anschließend bewegt es sich im Modell entlang einer Geraden durch den Punkt $B(8|4|1)$, der die Position um 14.02 Uhr darstellt. Ab 14.14 Uhr fliegt das Flugzeug in gleicher Himmelsrichtung horizontal weiter; im Modell bleibt es dabei in der Ebene, die die Punkte A und B enthält und zur x_1x_2-Ebene senkrecht steht. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass das Flugzeug von 14.00 Uhr bis 14.14 Uhr mit konstanter Geschwindigkeit fliegt.

a Berechnen Sie für die Zeit bis 14.14 Uhr den Steigungswinkel der Flugbahn gegenüber der Horizontalen. Geben Sie die Koordinaten des Punkts an, der die Position des Flugzeugs um 14.10 Uhr darstellt. 4

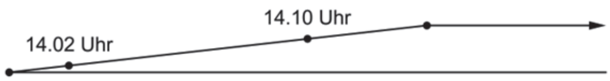
b Die Abbildung zeigt schematisch die Flugbahn des Flugzeugs sowie die Horizontale. Zeichnen Sie die Positionen des Flugzeugs zu den Zeitpunkten 14.02 Uhr und 14.10 Uhr ein. 2



c Ermitteln Sie für die Zeit bis 14.14 Uhr die Geschwindigkeit des Flugzeugs in Kilometer pro Stunde.	2
d Geben Sie eine Gleichung der Strecke an, die die Flugbahn von 14.00 Uhr bis 14.14 Uhr beschreibt.	2
Zu einem bestimmten Zeitpunkt zwischen 14.00 Uhr und 14.14 Uhr ist die Entfernung des Flugzeugs von der Radarstation am geringsten. Die bis dahin seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit soll in Minuten bestimmt werden. Dafür werden zwei verschiedene Lösungsansätze I und II betrachtet:	
I $\quad d(s)=\left\lvert\begin{pmatrix}18-8s\\-4s\\-1-s\end{pmatrix}\right\rvert=\sqrt{81s^2-286s+325}$ $\qquad$ II $\quad \begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}18-8s\\-4s\\-1-s\end{pmatrix}=0$	
$d'(s)=0$	
e Erläutern Sie jeden der beiden Lösungsansätze.	4
f Setzen Sie einen der beiden Ansätze bis zur Lösung fort und bestimmen Sie die geringste Entfernung des Flugzeugs von der Radarstation.	4
g Ist das Flugzeug mehr als 70 km von der Radarstation entfernt, so kann es von dieser nicht mehr erfasst werden. Die Position, an der das Flugzeug nach 14.14 Uhr den Erfassungsbereich der Radarstation verlässt, wird im Modell durch einen Punkt dargestellt. Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punkts.	7
	25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
a	Mit $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ergibt sich: $\sin\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\circ\vec{n}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$, d. h. $\alpha\approx 6{,}4°$ Koordinaten des Punkts: $(40\mid 20\mid 5)$	4
b		2
c	$\frac{1}{2}\cdot\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\cdot 60=270$, d. h. die Geschwindigkeit des Flugzeugs beträgt $270\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.	2
d	$\vec{x}=s\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix};\ 0\le s\le 7$	2

e	I: Die Entfernung des Flugzeugs von der Radarstation kann in Abhängigkeit von der Zeit im Modell durch eine Funktion d beschrieben werden. Dabei liefert $d(s)$ die Entfernung $2s$ Minuten nach Beobachtungsbeginn. Die geringste Entfernung lässt sich mithilfe der Differentialrechnung bestimmen. II: Ist die Entfernung des Flugzeugs von der Radarstation am geringsten, so stehen der Richtungsvektor der Geraden, entlang derer sich das Flugzeug im Modell bewegt, und der Verbindungsvektor zwischen den beiden Punkten, die das Flugzeug und die Radarstation im Modell darstellen, zueinander senkrecht. Das Skalarprodukt der beiden Vektoren ist dann null.	4
f	$d'(s)=0 \Leftrightarrow 162s-286=0 \Leftrightarrow s=\frac{143}{81}$, d. h. etwa 3,5 Minuten nach Beobachtungsbeginn ist die Entfernung am geringsten. $d\left(\frac{143}{81}\right)\approx 8{,}5$; d. h. die geringste Entfernung beträgt etwa 8,5 km.	4
g	$\vec{x}=\begin{pmatrix}56\\28\\7\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\0\end{pmatrix},\ u\in\mathbb{R}^+$ Für $u\in\mathbb{R}^+$ liefert $\left\lvert\begin{pmatrix}56+8u-18\\28+4u\\7+1\end{pmatrix}\right\rvert=70 \Leftrightarrow 80u^2+832u+2292=4900:\ u\approx 2{,}5$ Damit: $x_1\approx 76$, $x_2\approx 38$, $x_3=7$	7
		25

3 Standardbezug

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen[1]						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	4	X	X	X					I		II	I		X	
b	2		X	X			I		I	I			X		
c	2	X	X	X				I	I		I		X		
d	2	X		X			I		I		I		X		
e	4	X	X	X			III		III			III			X
f	4	X	X	X					II		III				X
g	7	X	X	X				II	II		II			X	

[1] Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsschlüssel[2] vorgesehen, der angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

[2] Der Bewertungsschlüssel ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.