Abiturprüfung Mathematik 2004 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Analysis – Aufgabe I, 1

Aufgabe I 1

Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x)=\frac{x^2-36}{x^2+16}$; $x \in \mathbb{R}$

Ihr Schaubild sei K.

a) Zeichnen Sie K.
Untersuchen Sie das Verhalten von K für $|x| \to \infty$.
Weisen Sie nach, dass K genau zwei Wendepunkte besitzt.

Hinweis: Der Nachweis der Wendepunkte mit Hilfe der Ableitung kann bei dieser Funktion sinnvollerweise nur mit der Quotientenregel geführt werden. Da die Quotientenregel ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr relevant ist, kann der Wendepunktnachweis hier auch übergangen werden.

(7 VP)

Nun stellt K für $-6 \le x \le 6$ den Querschnitt eines 500m langen Kanals dar. (x in Meter, f(x) in Meter). Die sich anschließende Landfläche liegt auf der Höhe y = 0. Der Pegelstand wird in Bezug auf den tiefsten Punkt des Kanals gemessen und beträgt maximal 2,25 m.

b) Wie viel Kubikmeter Wasser sind in dem Kanal, wenn er ganz gefüllt ist ?
Zu wie viel Prozent ist der Kanal bei einem Pegelstand von 1,00 m gefüllt ?

(5 VP)

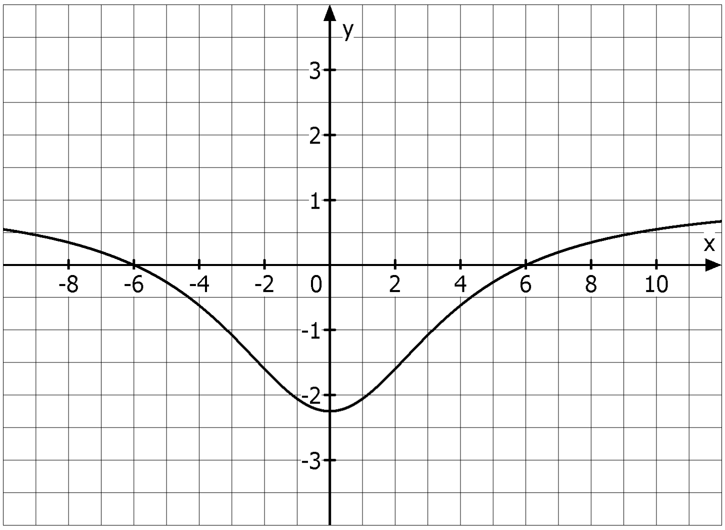
c) An Land steht eine Person.
In welcher Entfernung vom Kanalrand darf sie höchstens stehen, damit sie bei leerem Kanal die tiefste Stelle des Kanals sehen kann (Augenhöhe 1,50 m) ?

Hinweis: Wie in Teilaufgabe a) ist auch zur Lösung der Teilaufgabe c) das Ableiten der Funktion notwendig, das sinnvollerweise mit der Quotientenregel durchgeführt werden sollte. Damit die Aufgabe auch von Schülern bearbeitet werden kann, die die Quotientenregel im Unterricht nicht behandelt haben, kann die Ableitungsfunktion $f'(x)=\frac{104x}{(x^2+16)^2}$ *hier auch als bekannt vorgegeben werden.*

(6 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2004 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Analysis – Lösung zu Aufgabe I, 1

a)



Hinweis: Das Schaubild wird mit Hilfe der Wertetabelle des GTR gezeichnet.

Verhalten für $|x| \to \infty$: Das Schaubild K besitzt die waagerechte Asymptote y = 1.
(Rechnerischer Nachweis erfolgt durch Ausklammern von x^2 im Zähler und

Nenner: $f(x) = \frac{x^2 \cdot \left(1 - \frac{36}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left(1 + \frac{16}{x^2}\right)} = \frac{\left(1 - \frac{36}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{16}{x^2}\right)} \to \frac{1-0}{1+0} = 1$ für $x \to \pm\infty$)

Berechnung der Ableitungsfunktion mit Hilfe der Quotientenregel:
Hinweis: Ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+16) - (x^2-36) \cdot 2x}{(x^2+16)^2} = \frac{104x}{(x^2+16)^2}$$

$$f''(x) = \frac{104(x^2+16)^2 - 104x \cdot 2(x^2+16) \cdot 2x}{(x^2+16)^4} = \frac{104x^2 + 1664 - 416x^2}{(x^2+16)^3}$$

$$= \frac{-312x^2 + 1664}{(x^2+16)^3}$$

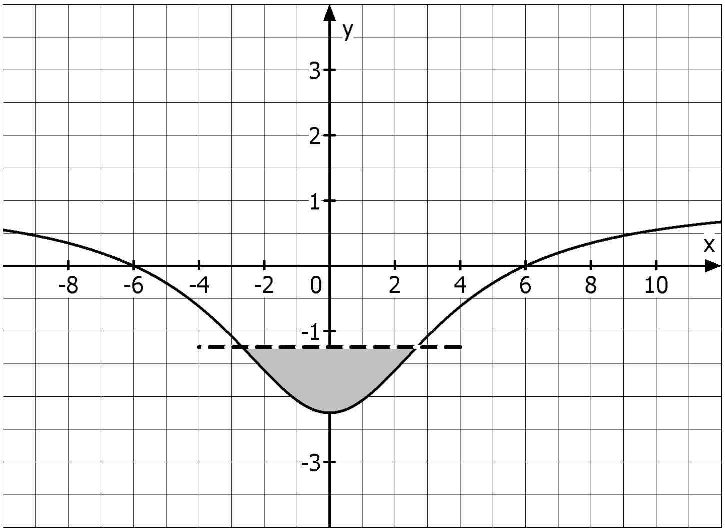
Wendepunktbedingung: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -312x^2 + 1664 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{3}}$

Da $f''(x)$ an diesen Stellen das Vorzeichen wechselt, liegen an beiden Stellen Wendepunkte vor. Somit hat K genau zwei Wendepunkte.
(Man hätte die hinreichende Bedingung auch mit Hilfe von $f'''(x) \neq 0$ durchführen können).

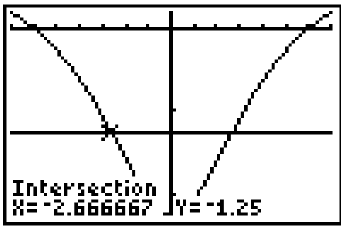
b) Querschnittsfläche des Kanals = $\int_{-6}^{6}(0-f(x))dx = 13{,}55\ m^2$ (GTR)

Volumen des Wassers = $13{,}55 \cdot 500 = 6775\ m^3$ wenn der Kanal ganz gefüllt ist.

Füllung bei Pegelstand 1 m :



Auch hier wird die Querschnittsfläche benötigt.
Dazu müssen zunächst die Schnittpunkte von K mit der Geraden y = -1,25 ermittelt werden.



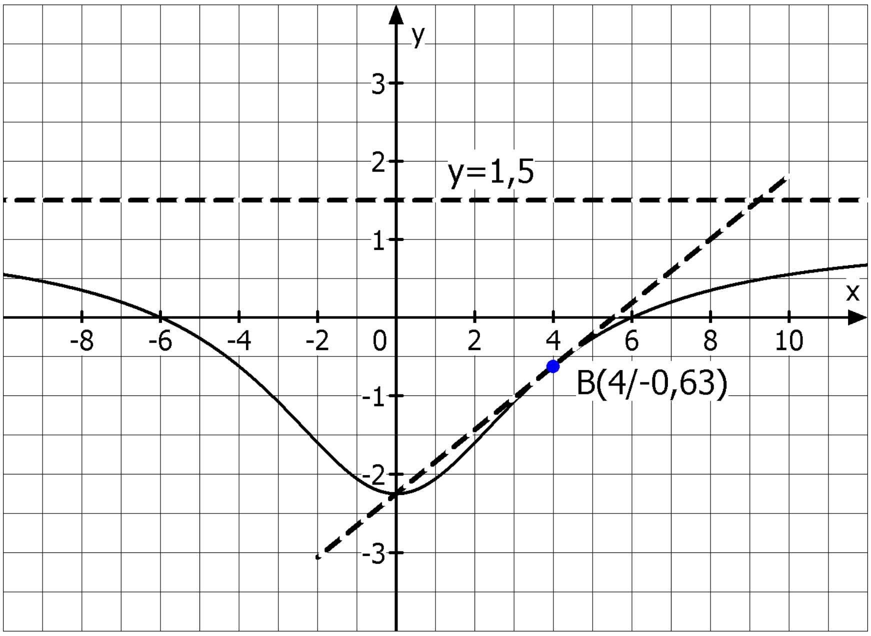
Die Gerade schneidet K an den Stellen $x = \pm 2{,}666$

Mit dem GTR: $\int_{-2{,}666}^{2{,}666}(-1{,}25-f(x))dx = 3{,}29\ m^2$

Neues Wasservolumen = $3{,}29 \cdot 500 = 1645\ m^3$

Prozentualer Anteil, mit dem Kanal gefüllt ist = $\frac{1645}{6775} = 0{,}243 = 24{,}3\%$.

c)



Die Sichtlinie der Person ergibt sich aus der Tangente, die vom Punkt P(0/-2,25) aus an die Kurve K angelegt wird.
Der unbekannte Berührpunkt hat die Koordinaten B(u/f(u)).
Allgemeine Tangentengleichung in B: $y = f'(u)(x-u)+f(u)$

Die Ableitung $f'(x) = \frac{104x}{(x^2+16)^2}$ ergibt sich entweder aus a) oder aus dem Hinweis in der Aufgabenstellung.

Nun wird in die allgemeine Tangentengleichung durch B der bekannte Tangentenpunkt P(0/-2,25) eingesetzt.

$$-2,25 = \frac{104u}{(u^2+16)^2}\cdot(0-u)+\frac{u^2-36}{u^2+16}$$

Als Lösung mit dem GTR ergibt sich $u = \pm 4$.

Für u = 4 lautet die Tangentengleichung

$$y = 0,40625x - 2,25$$

(Die andere Lösung muss aus Symmetriegründen nicht extra untersucht werden).

Um den Standpunkt der Person mit Augenhöhe 1,5 m zu erhalten, schneidet man die Tangente mit der Geraden y = 1,5:
Mit dem GTR ergibt sich x = 9,23.

Da der Kanalrand bei x = 6 ist, beträgt die Entfernung der Person zum Kanalrand 9,23 m – 6 m = 3,23 m.