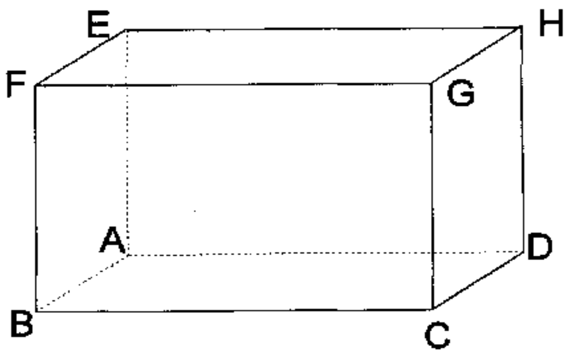
Abiturprüfung Mathematik 2007 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Analytische Geometrie – Aufgabe II, 2

Eine quaderförmige Kiste ist in einem Koordinatensytem durch die Eckpunkte A(0/0/0), B(3/0/0), D(0/5/0) und F(3/0/4) festgelegt.

Die Fläche EFGH stellt den Deckel der geschlossenen Kiste dar. Dieser ist drehbar um die Kante EH.



Weiterhin ist für jedes $t \geq 0$ eine Ebene E_t gegeben durch: $E_t:\ t \cdot x_1 - x_3 = -4$

a) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Kanten AB und GH.
Zeigen Sie, dass die Gerade durch E und H in jeder Ebene E_t liegt.
In welcher Ebene E_t liegt der Deckel bei geschlossener Kiste ?
Liegt der Deckel in einer Ebene E_{t^*}, wenn er um 90° geöffnet ist ?
(5 VP)

b) Wenn der Deckel der geöffneten Kiste in E_2 liegt, wird er durch einen Stab orthogonal zum Deckel abgestützt. Dieser Stab ist in der Mitte der Kante EF befestigt und trifft im Punkt P auf den Deckel. Berechnen Sie die Koordinaten von P.
(3 VP)

c) Wie groß ist der Öffnungswinkel, wenn der Deckel in E_2 liegt ?
In welcher Ebene E_t liegt der Deckel, wenn der Öffnungswinkel 60° betr ägt ?
Bestimmen Sie den Parameter t in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel α für $\alpha < 90°$.
(4 VP)

d) Eine punktförmige Lichtquelle in L(0/2,5/20) beleuchtet die Kiste. Wie weit kann man die Kiste höchstens öffnen, ohne dass Licht von L in die Kiste fällt ?
(4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2007 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analytische Geometrie II, 2

a) Zunächst werden die restlichen Koordinaten der Eckpunkte bestimmt:
A(0/0/0), B(3/0/0), C(3/5/0), D(0/5/0), E(0/0/4), F(3/0/4), G(3/5/4), H(0/5/4)

Der Abstand der Kanten AB und GH entspricht der Länge der Strecke $\overline{AH}$ bzw. $\overline{BG}$:

$$\overline{AH} = \left|\overrightarrow{AH}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\5\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

Geradengleichung durch E und H: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$

Um zu zeigen, dass die Gerade g in jeder Ebene der Schar liegt, wird der Schnittpunkt von g und der Ebenenschar ermittelt.
Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung in die Koordinatengleichung der Ebene ergibt

$t\cdot(0+0r)-4=-4 \Rightarrow -4=-4$
Es ergibt sich eine wahre Aussage unabhängig von der Variable r und unabhängig vom Parameter t. Damit liegt g in jeder Ebene der Schar.

Die Deckelebene EFGH ist parallel zur x_1-x_2-Koordinatenebene auf der Höhe 4.
Also besitzt die Deckelebene die Koordinatengleichung $x_3 = 4$.
Dies entspricht der Ebene E_0 der Schar.

Wird der Deckel um 90° geöffnet, liegt der Deckel i n der x_2-x_3-Koordinatenebene mit der Gleichung $x_1 = 0$.
Diese Ebenengleichung entspricht jedoch keiner Ebene der Schar, da die Variable x_3 in der Schar immer enthalten ist.

b) $E_2:\ 2x_1 - x_3 = -4$.
Der Befestigungspunkt des Stabes entspricht dem Mittelpunkt M der Kante $\overline{EF}$, also M(1,5/0/4).

Um den Punkt P zu erhalten, wird eine Hilfsgerade h aufgestellt, die durch M und orthogonal zu E_2 verläuft:

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1{,}5\\0\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt von h und E_2 entspricht dem Punkt P.

Einsetzen der Zeilen der Geradengleichung von h in die Koordinatengleichung ergibt:

$$2(1{,}5+2s)-(4-s)=-4 \Rightarrow 3+4s-4+s=-4 \Rightarrow 5s=-3 \Rightarrow s=-\frac{3}{5}$$

Daraus ergibt sich der Punkt $P(0{,}3\,/\,0\,/\,4{,}6)$.

c) Der Öffnungswinkel entspricht dem Winkel der Ebene EFGH mit der Gleichung $x_3 = 4$ und der Ebene $E_2:\ 2x_1 - x_3 = -4$.

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = 63{,}4^\circ$$

Bei einem Öffnungswinkel von 60° gilt:

$$\cos 60^\circ = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t\\0\\-1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{t^2+1}} \Rightarrow 0{,}5 = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \Rightarrow t^2+1=4 \Rightarrow t=\pm\sqrt{3}$$

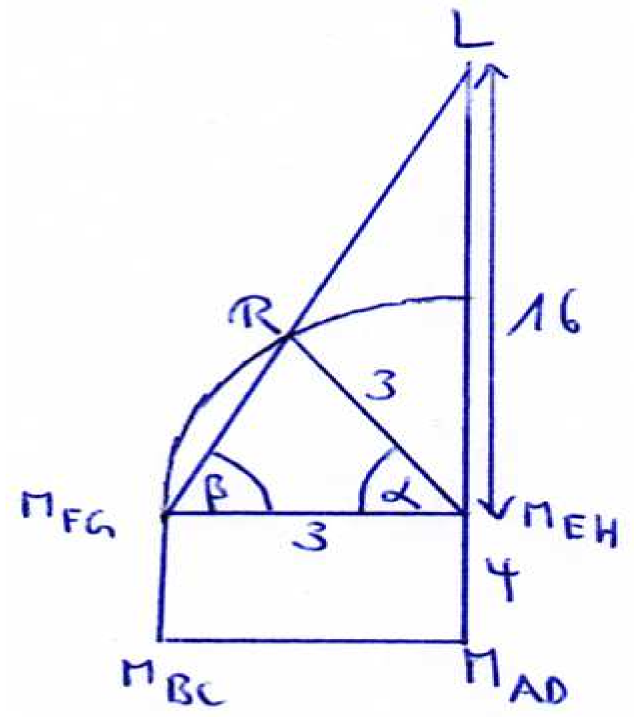
Da $t \ge 0$ gilt, folgt daraus $t=\sqrt{3}$.

Allgemeine Beziehung zwischen α und t:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \Rightarrow t^2+1 = \frac{1}{(\cos\alpha)^2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{1}{(\cos\alpha)^2}-1}$$

Das positive Vorzeichen der Wurzel ergibt sich aus der Bedingung $t \ge 0$

d) Die Lichtquelle L liegt genau oberhalb des Mittelpunktes der Kanten AD bzw. EH. Anhand der folgenden Skizze kann der gesuchte Winkel α ermittelt werden. Die Strecke von L zum Mittelpunkt M_{FG} der Kante FG stellt den Lichtstrahl dar. Sobald der Deckel, der in geschlossenem Zustand die Strecke von M_{FG} nach M_{EH} darstellt, über den Punkt R hinaus geöffnet wird, fällt Licht in die Kiste.



Zunächst wird der Winkel β bestimmt: $\tan\beta = \frac{16}{3} \Rightarrow \beta = 79{,}38°$.

Da das Dreieck $M_{FG}M_{EH}R$ gleichschenklig ist, folgt daraus $\alpha = 180 - 2 \cdot \beta = 21{,}24°$.

Dies ist der gesuchte Winkel.