

Hauptprüfung Abiturprüfung 2015 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Wahlteil Analytische Geometrie / Stochastik 1

Hilfsmittel: GTR und Formelsammlung

allgemeinbildende Gymnasien

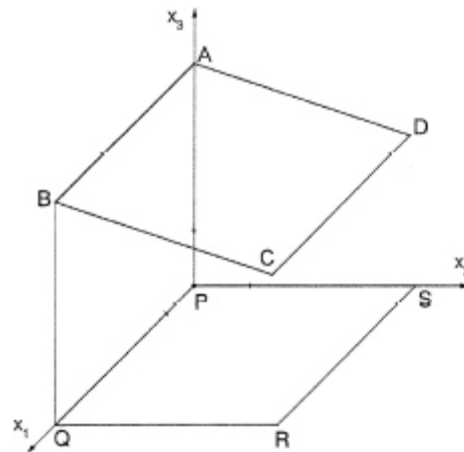
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

März 2015

Aufgabe B 1.1:

Über einer Terrasse ist als Sonnenschutz eine Markise an einer Hauswand befestigt. In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $P(0/0/0)$, $Q(5/0/0)$, $R(5/4/0)$, $S(0/4/0)$ die Eckpunkte der Terrasse dar. Die Markise wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten $A(0/0/4)$, $B(5/0/4)$, $C(5/3,9/2,7)$, $D(0/3,9/2,7)$ beschrieben (alle Koordinatenangaben in Meter). Die Lage der Hauswand wird durch die x_1x_3 – Ebene beschrieben.



- a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, welche die Lage der Markise beschreibt.
Berechnen Sie den Winkel zwischen Markise und Hauswand. (3 VP)
- b) In der Mitte zwischen Q und R steht eine 30cm hohe Stehlampe. Am Markisenrand CD wird ein senkrecht nach unten hängender Regenschutz angebracht, der genau bis auf die Terrasse reicht. Bei starkem Wind schwingt er frei um CD.
Kann der Regenschutz dabei die Stehlampe berühren ?
Welchen Abstand von der Hauswand darf die Stehlampe auf der Terrasse höchstens haben, damit dies nicht passiert ? (4 VP)
- c) Die Sonne scheint und der Regenschutz wird entfernt. Die Richtung der Sonnenstrahlen wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben.
Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Terrasse nicht vollständig beschattet wird. Die Markise kann ein- und ausgefahren werden. Dabei bewegen sich die äußeren Eckpunkte der Markise längs der Geraden BC und AD. Die Markise wird nun so weit eingefahren, dass der Terrassenrand zwischen Q und R genau zur Hälfte im Schatten liegt.
Bestimmen Sie die neuen Koordinaten der äußeren Eckpunkte der Markise. (4 VP)

Aufgabe B 1.2

Ein Großhändler gibt an, dass sein Weizensaatgut eine Keimfähigkeit von mindestens 80% hat. Mehrere Kunden vermuten, dass die Keimfähigkeit in Wirklichkeit kleiner ist. Deswegen wird die Aussage des Großhändlers mit Hilfe eines Tests auf einem Signifikanzniveau von 10% überprüft, indem 500 Weizenkörner untersucht werden. Als Nullhypothese wird die Angabe des Großhändlers verwendet. Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel in Worten.

Die tatsächliche Keimfähigkeit des Saatguts beträgt 82%.
Wie groß ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei obigem Test die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird ?

(4 VP)

Lösungen

Aufgabe B 1.1:

a) Koordinatengleichung von E:

Parametergleichung der Ebene durch die Punkte A, B, C:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3,9 \\ -1,3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor von E: } \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 3,9 \\ -1,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6,5 \\ 19,5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vereinfachung des Normalenvektors zu } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $x_2 + 3x_3 = d$

Einsetzen von A(0/0/4) ergibt sich $d = 12$.

Koordinatengleichung von E: $x_2 + 3x_3 = 12$

Winkel zwischen Markise und Hauswand:

Die $x_1 - x_3$ -Ebene besitzt den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Für den Winkel gilt: } \cos \alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}. \text{ Damit ist } \alpha \approx 71,6^\circ.$$

b) Der Regenschutz hat eine Länge von 2,7 Meter (x_3 -Koordinate von C).

Die Lampe endet im Punkt L(5/2/0,3).

$$\text{Der Abstand von L zu C beträgt } |\overline{LC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1,9 \\ 2,4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1,9^2 + 2,4^2} \approx 3,06 \text{ m} > 2,7 \text{ m}.$$

Der Regenschutz kann die Stablampe nicht berühren.

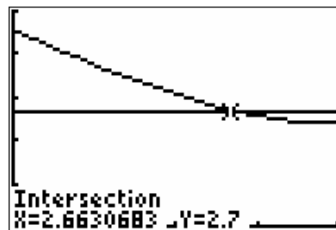
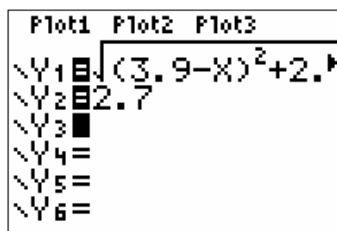
Der gesuchte Abstand der Lampe von der Hauswand sei a .

Der Endpunkt der Lampe sei $L^*(5/a, 0, 3)$ mit $0 < a < 4$ (aufgrund der Terrassenfläche)

Bedingung, damit der Regenschutz die Lampe nicht berührt: $\overline{L^*C} > 2,7$

$$\overline{L^*C} = |\overline{L^*C}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3,9 - a \\ 2,4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(3,9 - a)^2 + 2,4^2} > 2,7$$

Lösung mit GTR:



Es ergibt sich $a < 2,66$ m.

Die Lampe darf höchstens 2,66 m von der Hauswand entfernt stehen.

c) Begründung, dass die Terrasse nicht vollständig beschattet wird:

Die x_2 -Koordinate des Vektors \vec{v} ist negativ.

Da die x_2 -Koordinaten der Markisenpunkte C und D kleiner sind als die der Terrassenpunkte R und S reicht der Schatten, den die Markise wirft, nicht bis zur äußeren Terrassenkante RS.

Der Schatten soll bis zum Mittelpunkt der Strecke \overline{QR} reichen, also bis zum Punkt $M(5/2/0)$.

Nun wird eine Hilfsgerade g aufgestellt, die M enthält und den Richtungsvektor \vec{v} besitzt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Einen Punkt des Markisenrands in der neuen Position erhält man durch den Schnitt von g mit der Ebene E , in der die Markise liegt:

$$2 - t + 3 \cdot (-3t) = 12 \Rightarrow -10t = 10 \Rightarrow t = -1$$

Der Schnittpunkt von g mit E lautet $S(4/3/3)$.

Da der gesuchte Eckpunkt C^* auf der Kante BC liegt, muss er die x_1 -Koordinate 5 besitzen. Daher ist $C^*(5/3/3)$.

Da der gesuchte Eckpunkt D^* auf der Kante AD liegt, muss er die x_1 -Koordinate 0 besitzen. Daher ist $D^*(0/3/3)$.

Aufgabe B 1.2:

Formulierung der Entscheidungsregel:

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der keimfähigen Weizenkörner.

Nullhypothese $H_0 : p \geq 0,8$

Alternativhypothese $H_1 : p < 0,8$

Gilt die Nullhypothese, ist X im Extremfall binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0,8$.

Es handelt sich um einen linksseitigen Test.

Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{0, \dots, k\}$.

Gesucht ist die größte Zahl k , so dass gilt: $P(X \leq k) \leq 0,1$

Mit dem GTR folgt: $P(X \leq 387) \approx 0,083$ und $P(X \leq 388) \approx 0,1004$

Daraus folgt $k = 387$.

Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{0, \dots, 387\}$ und Annahmebereich $A = \{388, \dots, 500\}$

Wenn von den 500 Weizenkörnern höchstens 387 keimfähig sind, wird die Nullhypothese verworfen, andernfalls wird sie nicht verworfen.

Die Zufallsvariable Y sei binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0,82$.

Die Nullhypothese wird fälschlicherweise verworfen, wenn die Trefferanzahl in den Ablehnungsbereich fällt.

$P(Y \leq 387) \approx 0,0053$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird, beträgt ca. 0,5%.