Abiturprüfung Mathematik 2013 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Pflichtteil – Aufgaben

Aufgabe 1: (2 VP)

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 2: (2 VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4\sin(2x)$
Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(\pi) = 7$.

Aufgabe 3: (2 VP)

Lösen Sie die Gleichung $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$

Aufgabe 4: (4 VP)

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 5: (5 VP)

Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:
(1) $f(2) = 1$
(2) $f'(2) = 0$
(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$
(4) Für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 5$

Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat.
Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen.

Aufgabe 6: (4 VP)

Die Gerade g verläuft durch die Punkte A(1/-1/3) und B(2/-3/0).
Die Ebene E wird von g orthogonal geschnitten und enthält den Punkt C(4/3/-8).
Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E.
Untersuchen Sie, ob S zwischen A und B liegt.

Aufgabe 7: (4 VP)
Gegeben snid die beiden Ebenen

$$E_1:\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \text{ und } E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die beiden Ebenen parallel zueinander sind.
Die Ebene E_3 ist parallel zu E_1 und E_2 und hat von beiden Ebenen denselben Abstand.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_3.

Aufgabe 8: (4 VP)

Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch.

a) Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch.
B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch.

b) Die neun Spielkarten werden gemischt und erneut verdeckt ausgelegt. Laura dreht nun so lange Karten um und lässt sie aufgedeckt auf dem Tisch liegen, bis ein Ass erscheint.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an.
Welche Werte kann X annehmen ?
Berechnen Sie $P(X \leq 2)$.

Aufgabe 9: (3 VP)

Gibt es eine ganzratioale Funktion vierten Grades, deren Graph drei Wendepunkte besitzt ?
Begründen Sie Ihre Antwort.

Abiturprüfung Mathematik 2013 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Pflichtteil – Lösungen

Aufgabe 1:
Die Funktion wird mit der Produkt- und Kettenregel abgeleitet:

Es ist $u(x) = 2x^2 + 5$ und $v(x) = e^{-2x}$.
Dann folgt $u'(x) = 4x$ und $v'(x) = -2e^{-2x}$.

$f'(x) = 4x \cdot e^{-2x} + (2x^2 + 5) \cdot (-2) \cdot e^{-2x}$

Ausklammern der e-Funktion ergibt zusammengefasst:
$f'(x) = e^{-2x} \cdot (4x - 2 \cdot (2x^2 + 5)) = e^{-2x} \cdot (4x - 4x^2 - 10)$

Aufgabe 2:
Die allgemeine Stammfunktion lautet $F(x) = 4 \cdot (-\cos(2x)) \cdot \frac{1}{2} + C = -2 \cdot \cos(2x) + C$
Die Konstante C muss nun so gewählt werden, dass $F(\pi) = 7$ gilt:
Einsetzen der Bedingung ergibt
$7 = -2 \cdot \cos(2\pi) + C$
Da $\cos(2\pi) = 1$ ist, folgt C = 9. Die Stammfunktion lautet $F(x) = -2 \cdot \cos(2x) + 9$.

Aufgabe 3:
$2e^x - \frac{4}{e^x} = 0 \quad | \cdot e^x \qquad \Rightarrow 2e^{2x} - 4 = 0 \qquad \Rightarrow 2e^{2x} = 4 \qquad \Rightarrow e^{2x} = 2 \qquad \Rightarrow 2x = \ln(2)$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$

Aufgabe 4:
Um die Fläche zu bestimmen, werden zunächst die Schnittpunkte der Schaubilder von f(x) und g(x) berechnet:

Ansatz: $f(x) = g(x)$
$-x^2 + 3 = 2x \qquad \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$

Mit der Mitternachtsformel ergibt sich $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2}$
Als Lösungen folgen x = -3 und x = 1.

$$\int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))dx = \int_{-3}^{1} (-x^2 + 3 - 2x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x - x^2\right]_{-3}^{1} = -\frac{1}{3} + 3 - 1 - (-\frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + 3 \cdot (-3) - 9)$$

$$= \frac{5}{3} - (9 - 9 - 9) = \frac{5}{3} + 9 = \frac{32}{3}$$

Die gesuchte Fläche beträgt $A = \frac{32}{3} FE$

Hinweis: Man hätte auch das Integral $\int_{-3}^{1} (g(x) - f(x))dx$ berechnen können.

Das Ergebnis dieses Integrals wäre dann $-\frac{32}{3}$. Da die Fläche jedoch eine positive Zahl sein muss, wäre die Antwort auch hier $A = \frac{32}{3} FE$.

Aufgabe 5:
Die Eigenschaften haben folgende Bedeutung:

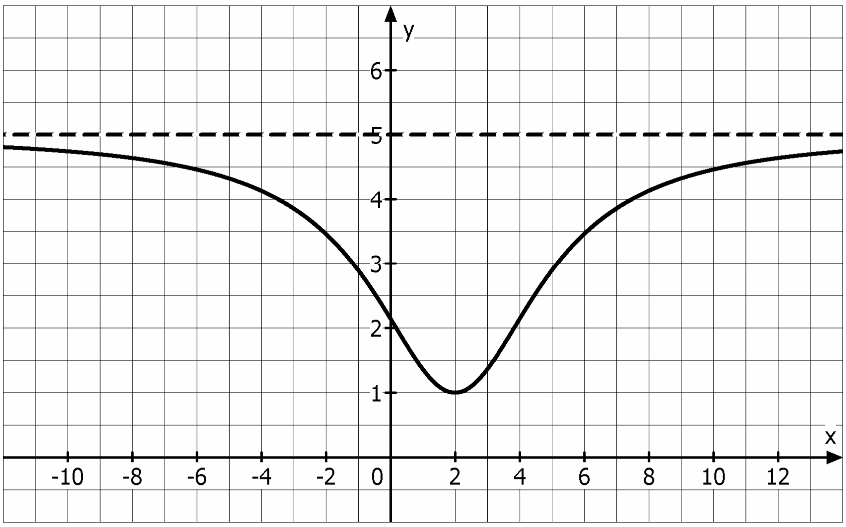
(1) $f(2) = 1$: Der Punkt P(2/1) liegt auf dem Schaubild von f(x).

(2) $f'(2) = 0$: Das Schaubild von f besitzt an der Stelle x = 2 (also im Punkt P) eine waagrechte Tangente.
Das heißt, dass der Punkt P ein Hochpunkt oder Tiefpunkt oder Sattelpunkt Ist.

(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$: Bei x = 4 besitzt das Schaubild von f(x) eine Wendestelle.

(4) Für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 5$:
Das Schaubild von f(x) besitzt die waagrechte Asymptote y = 5.

Ein möglicher Verlauf des Graphen wäre dieser:



Natürlich gibt es noch viele weitere Graphen, die genauso richtig sind.

Aufgabe 6:

Gleichung der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

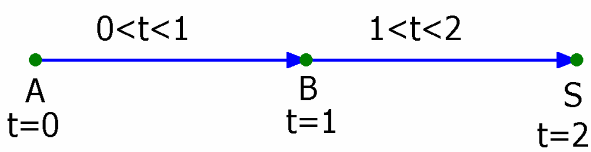
Gleichung der Ebene E.
Da die Gerade g orthogonal zu E verläuft, ist der Normalenvektor von E der Richtungsvektor von g: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = d$
Einsetzen des Ebenenpunktes C(4/3/-8): $4 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-8) = 22$ und damit ist d = 22
Koordinatengleichung von E: $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 22$

Schnittpunkt S von g und E:
$(1+t) - 2(-1-2t) - 3(3-3t) = 22 \quad \Rightarrow 1 + t + 2 + 4t - 9 + 9t = 22 \quad \Rightarrow 14t - 6 = 22$
$\Rightarrow t = 2$

Einsetzen von t = 2 in die Geradengleichung liefert den Schnittpunkt S(3/-5/-3).

Kontrolle, ob der Punkt S zwischen A und B liegt:
Die Parameterform von g ist so aufgebaut: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$
Da der Schnittpunkt S für t = 2 erreicht wird, gilt $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB}$



Damit der Punkt S zwischen A und B liegt, müsste der Parameter t zwischen 0 und 1 liegen.
Da t = 2 ist, liegt der Punkt S nicht zwischen A und B.

Aufgabe 7:

Der Normalenvektor von E_1 lautet $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Ebene E_2 ist parallel zur Ebene E_1, wenn $\overrightarrow{n_1}$ auch ein Normalenvektor von E_2 ist.
Dies ist dann der Fall, wenn der Vektor $\overrightarrow{n_1}$ orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren der Ebene E_2 ist.

Kontrolle: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2-2=0$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2-6+4=0$

Damit ist die Orthogonalität gezeigt. Somit sind die beiden Ebenen parallel.

Da die Ebene E_3 parallel zu den beiden anderen Ebenen sein soll, kann für diese Ebene auch der Normalenvektor $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gewählt werden.

Um die Gleichung von E_3 aufzustellen, wird noch ein Punkt dieser Ebene bestimmt werden.

Ein (beliebiger) Punkt von E_1 lautet A(0/0/-1).
Ein (beliebiger) Punkt von E_2 lautet B(7/7/5).

Der Mittelpunkt M der Strecke AB liegt auf der Ebene E_3.

Berechnung von M: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 3,5 \\ 2 \end{pmatrix}$, also M(3,5/3,5/2)

Eine Gleichung von E_3 lautet $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3,5 \\ 3,5 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

Aufgabe 8:

a) Es handelt sich um eine Ziehung ohne Zurücklegen:
$P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$
Erklärung: Die Spielkarten müssen nur unterschieden werden in Asse und „Nicht-Asse“)
Bei der ersten Ziehung sind 5 von 9 Karten „Nicht-Asse“, bei der zweiten Ziehung sind 4 von 8 Karten „Nicht-Asse“)
Zur Veranschaulichung könnte man auch ein Baumdiagramm heranziehen.

$P(B) =$ P(erst Dame dann Ass) + P(erst Ass dann Dame) $= \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{9}$

b) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an.
X kann die Werte von 1, 2, 3, 4, 5, 6 annehmen.
Begründung: Wenn gleich beim ersten Mal ein Ass aufgedeckt wird, ist X = 1.
Da spätestens die sechste Karte ein Ass sein muss (davor können die drei Könige und die zwei Damen aufgedeckt werden) kann X maximal den Wert 6 annehmen.

$P(X \le 2) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{13}{18}$
Begründung für P(X=2): zunächst muss ein Nicht-Ass gezogen werden und dann ein Ass.

Aufgabe 9:
Eine solche Funktion gibt es nicht.
Begründung: Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt lautet $f''(x) = 0$.
Die zweite Ableitungsfunktion einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist eine Funktion zweiten Grades.
Die Gleichung $f''(x) = 0$ ist daher eine quadratische Gleichung, die maximal zwei Lösungen besitzt.
Somit kann eine ganzrationale Funktion vierten Grades höchstens zwei Wendepunkte besitzen.