Abiturprüfung Mathematik 2007 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Pflichtteil - Aufgaben

Aufgabe 1: (2 VP)
Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (1 + \sin x)^2$.

Aufgabe 2: (2 VP)
Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\ln 2} e^{2x} dx$.

Aufgabe 3: (3 VP)
Lösen Sie die Gleichung $e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0$.

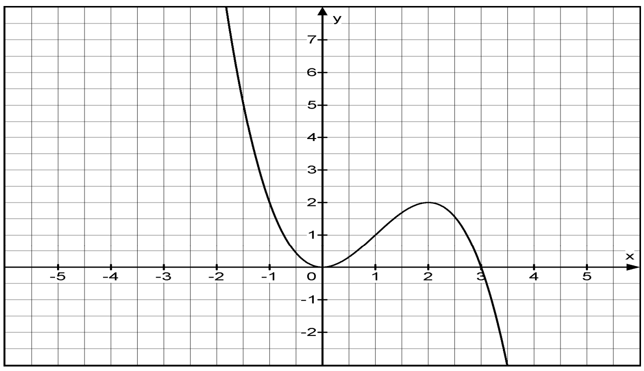
Aufgabe 4: (4 VP)
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

a) Bestimmen Sie die Punkte des Schaubildes von f mit waagrechter Tangente.

b) Das Schaubild von f hat im Punkt $P(1/\frac{1}{2})$ die Normale n. Ermitteln Sie eine Gleichung von n.

Aufgabe 5: (5 VP)

Gegeben ist das Schaubild der Ableitung f' der Funktion f.



a) Welche Aussagen über die Funktion f ergeben sich daraus im Hinblick auf
- Monotonie
- Extremstellen
- Wendestellen ?

Begründen Sie Ihre Aussagen.

b) Es gilt f(0) = 2. Skizzieren Sie das Schaubild von f.

Aufgabe 6: (3 VP)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 &= -21 \end{aligned}$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

Aufgabe 7: (4 VP)

Gegeben sind die Ebenen E und F mit

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$

F: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

Zeigen Sie, dass die Ebenen E und F parallel sind.
Bestimmen Sie den Abstand der Ebenen.

Aufgabe 8: (3 VP)

Von einem senkrechten Kreiskegel kennt man die Koordinaten der Spitze S, die Koordinaten eines Punktes P des Grundkreises sowie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der der Grundkreis liegt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Mittelpunkt M und den Radius r des Grundkreises zu bestimmen.

Abiturprüfung Mathematik 2007 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Pflichtteil

Aufgabe 1:
Die Ableitungsfunktion wird mit der Kettenregel ermittelt:

$$f(x) = (1+\sin x)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\cdot(1+\sin x)\cdot\cos x$$

Aufgabe 2:

$$\int_0^{\ln 2} e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}e^{2\cdot\ln 2} - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}e^{\ln 4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Aufgabe 3:

$$e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0$$

Zunächst wird mit e^x durchmultipliziert, um den Bruch aufzulösen:

$$\Rightarrow e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$$

Substitution: $u = e^x \Rightarrow u^2 - 2u - 15 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2} = \frac{2\pm 8}{2}$

$u_1 = 5$ und $u_2 = -3$

Rücksubstitution: $e^x = 5 \Rightarrow x = \ln 5$

$e^x = -3 \Rightarrow$ nicht lösbar und somit Lösungsmenge: L = { $\ln 5$ }

Aufgabe 4:

Umschreiben der Funktion: $f(x) = \frac{x^2}{x+1} = x^2\cdot(x+1)^{-1}$

Ableitung mit Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = 2x\cdot(x+1)^{-1} + x^2\cdot(-1)(x+1)^{-2} = \frac{2x}{x+1} - \frac{x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

a) Punkte mit waagrechter Tangente:

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow$ x = 0 oder x = -2.

A(0/0) und B(-2/-4) besitzen eine waagrechte Tangente.

b) Gleichung der Normalen n im Punkt $P(1/\frac{1}{2})$:

Steigung der Tangente in P: $f'(1) = \frac{3}{4}$

Steigung der Normalen in P: $m_n = -\frac{1}{m_{\tan g}} = -\frac{4}{3}$

Punkt-Steigungs-Form: $y - \frac{1}{2} = -\frac{4}{3}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{6}$ und dies ist die Normalengleichung

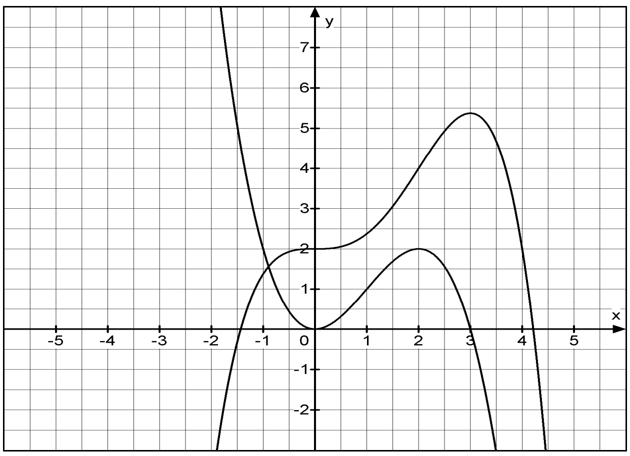
Aufgabe 5:

a) Monotonie: Das Schaubild von f ist in den Intervallen streng monoton wachsend, in denen das Schaubild von f' oberhalb der x-Achse verläuft. Dort, wo das Schaubild von f' unterhalb der x-Achse verläuft, ist das Schaubild von f streng monoton fallend. Damit gilt: Für x < 3 ist das Schaubild von f streng monoton wachsend, für x > 3 streng monoton fallend.

Extremstellen: Das Schaubild von f besitzt dort Extremstellen, wo das Schaubild von f' Nullstellen mit Vorzeichenwechsel aufweist. Das heißt, nur an der Stelle x = 3 existiert eine Extremstelle bei f, genauer gesagt ein Hochpunkt (VZW von + nach -).

Wendestellen: Das Schaubild von f besitzt dort Wendestellen, wo das Schaubild von f' Extremstellen besitzt. Das heißt, an den Stellen x = 0 und x = 2 befinden sich beim Schaubild von f Wendestellen. An der Stelle x = 0 befindet sich sogar ein Sattelpunkt bei f, da der Extrempunkt von f' noch zusätzlich eine Nullstelle ist.

b) Das Schaubild von f muss nur grob einskizziert werden. In der Skizze sollte der Sattelpunkt bei x = 0 und der Hochpunkt bei x = 3 erkennbar sein. Die Höhe des Hochpunktes kann noch näherungsweise so ermittelt werden, dass die Fläche zwischen der x-Achse und der vorgegebenen skizzierten Ableitungsfunktion im Intervall [0;3] ungefähr 3 Flächeneinheiten beträgt (3 Quadrate). Diese 3 Einheiten kommen zum Ausgangspunkt P(0/2) noch dazu, so dass der Hochpunkt näherungsweise den y-Wert 5 besitzt.



Aufgabe 6:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \quad \Big| \cdot (-3) \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 &= -21 \quad \Big| \cdot (-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ -7x_2 - 7x_3 &= -35 \quad \Big| \cdot 2 \\ 14x_2 + 14x_3 &= 70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ -7x_2 - 7x_3 &= -35 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Die dritte Zeile kann gestrichen werden, da sie zwar eine wahre Aussage 0 = 0 liefert, aber keine Information über eine Variable enthalten ist.
Somit liegen nur noch 2 Gleichungen mit 3 Variablen vor. Es ergeben sich unendlich viele Lösungen.

Setze $x_3 = t$ mit $t \in R$

Daraus folgt aus der 2.Zeile: $-7x_2 - 7t = -35 \Rightarrow x_2 = 5 - t$

Aus der 1.Zeile: $3x_1 - (5 - t) + 2t = 7 \Rightarrow 3x_1 = 12 - 3t \Rightarrow x_1 = 4 - t$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4-t \\ 5-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Geometrische Interpretation: Die drei Gleichungen können als Koordinatengleichungen dreier Ebenen im Raum interpretiert werden. Die Lösung des LGS bedeutet anschaulich, dass sich diese drei Ebenen in einer Schnittgerade schneiden. Die Schnittgerade besitzt die Parameterform g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7:

Die Ebene E liegt in Parameterform vor, die Ebene F in Normalenform.
Zur Kontrolle, ob die Ebenen E und F parallel sind muss geprüft werden, ob die beiden Richtungsvektoren der Ebene E orthogonal auf dem Normalenvektor der Ebene F liegen.

Es gilt: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 + 0 - 2 = 0$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 + 2 + 0 = 0$

Da sich jeweils als Skalarprodukt der Wert 0 ergibt, ist die Orthogonalität zwischen dem Normalenvektor von F und den Richtungsvektoren von E gezeigt. Also sind E und F parallel.

Der Abstand der beiden Ebenen entspricht dem Abstand des Punktes P(1/1/0), der auf der Ebene E liegt, von der Ebene F.
Dieser Abstand wird mithilfe der Hesse-Normalform ermittelt.

Umformung von F als Koordinatengleichung: F: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$

HNF von F: $\frac{2x_1 + 2x_2 - x_3 - 8}{3} = 0$

Abstand P von F: $d(P,F) = \left| \frac{2+2-8}{3} \right| = \frac{4}{3}$

Aufgabe 8:

1.) Aufstellen einer Hilfsgerade h, die durch den Punkt S geht und die orthogonal zur Ebene E verläuft, d.h. der Richtungsvektor von h ist der Normalenvektor von E.

2.) Bestimmung des Schnittpunktes der Gerade h und der Ebene E ergibt den Mittelpunkt M des Grundkreises.

3.) Der Abstand von M zu P, der mit $\left|\overrightarrow{MP}\right|$ berechnet wird, ergibt den Radius des Grundkreises.