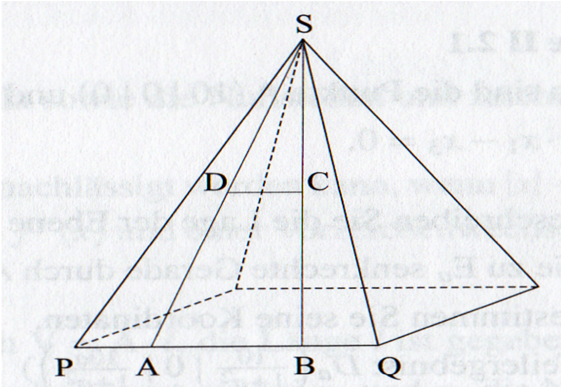
Abiturprüfung Mathematik 2004 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Analytische Geometrie – Aufgabe II, 1

Ein Zelt hat die Form einer senkrechten quadratischen Pyramide.
Die Längen der Quadratseiten und die Pyramidenhöhe betragen jeweils 2,0 m.



a) Benachbarte Seitenflächen bilden einen stumpfen Winkel. Wie groß ist dieser ?
(6 VP)

b) In der Vorderfläche PQS befindet sich eine Einstiegsöffnung ABCD in der Form eines symmetrischen Trapezes.
C und D sind die Mitten der Strecke BS bzw. der Strecke AS.
Die Strecke AB hat die Länge 1,0 m.
Wie viel Prozent der Vorderfläche beansprucht die Einstiegsöffnung ?
(5 VP)

c) Zur Beleuchtung wird im Zelt eine Lampe aufgehängt, die im Folgenden als punktförmige Lichtquelle betrachtet werden soll. Ihr Licht dringt durch die Einstiegsöffnung nach außen und erzeugt auf dem Boden vor dem Zelt das Bild ABC'D' der Einstiegsöffnung als „Lichtteppich“.
Berechnen Sie die Länge der Strecke C'D', wenn sich die Lampe 25cm unter der Zeltspitze befindet.
(5 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2004 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Analytische Geometrie – Lösung Aufgabe II, 1

a) Um den Winkel zwischen zwei Seitenflächen zu ermitteln, werden zunächst die Koordinaten der vorhandenen Punkte benötigt.
Der Punkt auf der Grundfläche links hinten sei der Ursprung O(0/0/0). Dann ergibt sich P(2/0/0), Q(2/2/0) und S(1/1/2).

Ebenengleichung durch PQS: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. gekürzt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung durch OPS: H: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von H: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. gekürzt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen den Ebenen: $\cos\alpha = \dfrac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \alpha = 78{,}5°$

Da der stumpfe Winkel (>90°) gesucht ist, gilt $\beta = 180° - 78{,}5° = 101{,}5°$ und dies ist der gesuchte Winkel.

b) Die Vorderfläche PQS ist ein gleichschenkliges Dreieck. Der Mittelpunkt M der Grundseite PQ besitzt die Koordinaten M(2/1/0).

Fläche des Dreiecks PQS = $\dfrac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{MS} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left|\overrightarrow{MS}\right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5}$ Flächeneinheiten

Für die Fläche des Trapezes ABCD ermittelt man zunächst die Koordinaten der Eckpunkte: A(2/0,5/0) ; B(2/1,5/0) ; C(1,5/1,25/1) ; D(1,5/0,75/1)

Trapezfläche = $\dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot h_{Trapez} = \dfrac{1 + 0{,}5}{2} \cdot h_{Trapez}$

Die Trapezhöhe entspricht der Strecke vom Mittelpunkt M(2/1/0) der Strecke $\overline{AB}$ zum Mittelpunkt M*(1,5/1/1) der Strecke $\overline{CD}$.

Trapezfläche = $\frac{1{,}5}{2}\cdot\left|\overrightarrow{MM^*}\right| = 0{,}75\cdot\left|\begin{pmatrix}-0{,}5\\0\\1\end{pmatrix}\right| = 0{,}75\cdot\sqrt{1{,}25}\approx 0{,}839\ \text{m}^2$

Prozentualer Anteil = $\frac{A_{Trapez}}{A_{DreieckPQS}} = \frac{0{,}75\cdot\sqrt{1{,}25}}{\sqrt{5}} = 0{,}375 = 37{,}5\%$

c) Die Lampe hängt im Punkt L(1/1/1,75) – also 0,25 m unterhalb der Spitze S.
Den Punkt C' erhält man dadurch, dass man die Gerade durch L und C mit der Bodenebene der Pyramide – also der $x_1 - x_2$ – Ebene (Koordinatengleichung $x_3 = 0$) schneidet. Dieser Schnittpunkt entspricht C'.

Gerade durch LC: $g_{LC}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1{,}75\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}25\\-0{,}75\end{pmatrix}$

Schnitt mit $x_3 = 0$: $1{,}75 - 0{,}75\cdot r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{7}{3} \Rightarrow C'\left(\frac{13}{6}/\frac{19}{12}/0\right)$

Den Punkt D' erhält man dadurch, dass man die Gerade durch L und D mit der Bodenebene der Pyramide – also der $x_1 - x_2$ – Ebene (Koordinatengleichung $x_3 = 0$) schneidet. Dieser Schnittpunkt entspricht D'.

Gerade durch LD: $g_{LD}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1{,}75\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0{,}5\\-0{,}25\\-0{,}75\end{pmatrix}$

Schnitt mit $x_3 = 0$: $1{,}75 - 0{,}75\cdot r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{7}{3} \Rightarrow D'\left(\frac{13}{6}/\frac{5}{12}/0\right)$

Für die gesuchte Strecke ergibt sich $\overline{C'D'} = \left|\begin{pmatrix}0\\-\frac{14}{12}\\0\end{pmatrix}\right| = \frac{7}{6}$ m