Abiturprüfung Mathematik 2007 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Analytische Geometrie – Aufgabe II, 1

Aufgabe II 1.1

Die Ebene E: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$ stellt für $x_3 \geq 0$ einen Hang dar, der aus der $x_1 - x_2$-Ebene aufsteigt.
Im Punkt H(6/4/0) steht ein 80 m hoher Sendemast senkrecht zur $x_1 - x_2$- Ebene.
(1 LE entspricht 10m).

a) Stellen Sie den Hang und den Sendemast in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie den Neigungswinkel des Hangs.
Der Sendemast wird auf halber Höhe mit einem möglichst kurzen Stahlseil am Hang verankert.
Berechnen Sie die Koordinaten des Verankerungspunktes am Hang.
Bestimmen Sie die Länge des Stahlseils.
(6 VP)

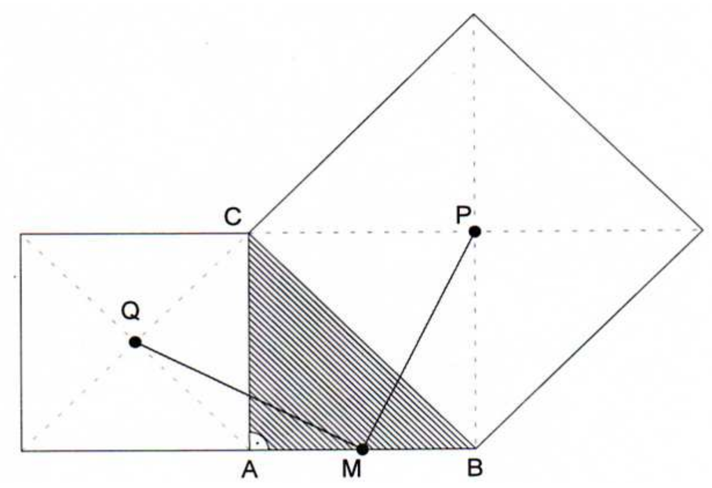
b) Der Sendemast wird von der Sonne beschienen und wirft einen Schatten auf die $x_1 - x_2$-Ebene und den Hang. Der Schatten des Sendemastes endet in einem Punkt T des Hangs.
Beschreiben Sie einen Weg, wie man die Gesamtlänge des Schattens bestimmen kann.
(3 VP)

c) Bei einem Sturm knickt der Sendemast im Punkt K(6/4/k) um. Die Spitze des Sendemastes trifft dabei den Hang im Punkt R(4/0/2).
Bestimmen Sie die Höhe, in welcher der Sendemast abgeknickt ist.
(3 VP)

Aufgabe II 1.2

Hinweis: Diese Aufgabe ist ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und rechtwinklig.
P und Q sind die Schnittpunkte der Quadratdiagonalen, M ist die Mitte von AB.
Beweisen Sie, dass die Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ orthogonal und gleich lang sind.
(4 VP)

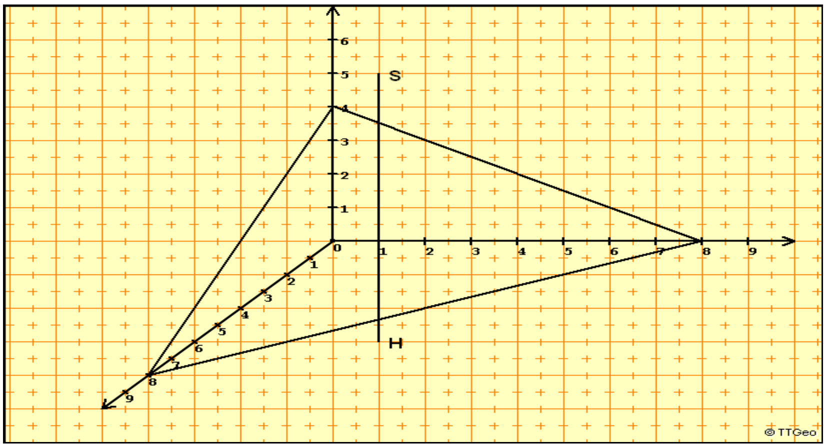


Abiturprüfung Mathematik 2007 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analytische Geometrie II, 1

Aufgabe II 1.1

a)

Für die Zeichnung der Ebene sind die Durchstoßpunkte mit den Koordinatenachsen zu ermitteln:
$S_1(8/0/0)$ und $S_2(0/8/0)$ und $S_3(0/0/4)$



Neigungswinkel zwischen der Ebene E und der $x_1 - x_2$ – Ebene mit der

Koordinatengleichung $x_3 = 0$: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{1}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha = 35{,}3°$

Halbe Höhe des Mastes liegt bei L(6/4/4).
Die Länge des Stahlseils entspricht dem kürzesten Weg vom Punkt L zum Hang.
Dies ist gleichzeitig der Abstand von L zur Hangebene E.

Für die Koordinaten des Verankerungspunktes wird eine Hilfsgerade h orthogonal zur Hangebene durch L(6/4/4) aufgestellt:

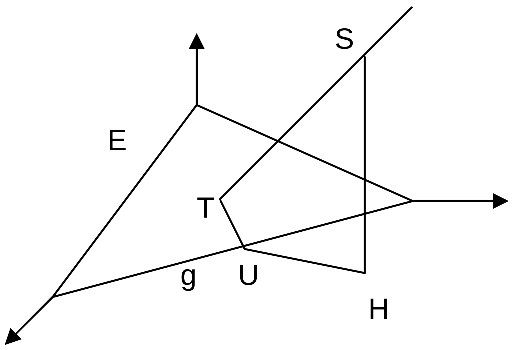
$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt von h mit E entspricht dem Verankerungspunkt V:

$(6+r)+(4+r)+2\cdot(4+2r) = 8 \Rightarrow 6r = -10 \Rightarrow r = -\frac{5}{3}$, also $V(\frac{13}{3}/\frac{7}{3}/\frac{2}{3})$.

Länge des Stahlseils = $\left|\overrightarrow{LH}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{150}{9}} = \frac{\sqrt{150}}{3} \approx 4{,}08$

b) Der Schatten beginnt im Punkt H und endet im Punkt T. Zunächst muss die Gleichung der Geraden g aufgestellt werden (Gerade enthält die Punkte S_1 und S_2).
Anschließend stellt man die Gerade h auf, die S enthält und den Richtungsvektor der Sonnenstrahlen besitzt. Der Schnittpunkt von h und E ergibt T.
Zur Berechnung des Punktes U wird eine Hilfsebene L aufgestellt.
Diese Hilfsebene enthält die Punkte H,S und T. Diese Hilfsebene wird mit der Gerade g geschnitten. Der Schnittpunkt ergibt U.
Die Länge des Schattens wird berechnet durch $\overline{TU} + \overline{UH}$



c) Der Punkt K(6/4/k) hat die Eigenschaft, dass die Spitze des Mastes S(6/4/8) die gleiche Entfernung hat wie der Punkt R(4/0/2).

Also gilt: $\overline{SK} = \overline{RK} \Rightarrow 8 - k = \sqrt{2^2 + 4^2 + (k-2)^2} \Rightarrow (8-k)^2 = 20 + (k-2)^2$

$\Rightarrow 64 - 16k + k^2 = 20 + k^2 - 4k + 4 \Rightarrow -12k = -40 \Rightarrow k = \frac{10}{3}$

Der Sendemast wird in einer Höhe von $10 \cdot \frac{10}{3}\,m = \frac{100}{3}\,m$ abgeknickt.

Aufgabe II 1.2

Es gilt laut Voraussetzung: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$ und $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Es gilt: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2$.

Zu zeigen: $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0$ (d.h. orthogonal)

$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AQ}\right) = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$$=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)=0$$

Damit ist die Orthogonalität der Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ gezeigt.

Zu zeigen: $\left|\overrightarrow{MP}\right|=\left|\overrightarrow{MQ}\right|$ (d.h. gleiche Länge)

Es wird gezeigt: $\overrightarrow{MP}^2=\overrightarrow{MQ}^2$, denn dies heißt $\left|\overrightarrow{MP}\right|^2=\left|\overrightarrow{MQ}\right|^2$ und daraus ergibt sich wiederum die gleiche Länge.

$$\overrightarrow{MP}^2=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\frac{5}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$$

$$\overrightarrow{MQ}^2=\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\frac{5}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$$

Daraus ergibt sich nun die gleiche Länge.