# Pflichtteilaufgaben zu Gleichungen

# Baden-Württemberg

**Hilfsmittel: keine**

**allgemeinbildende Gymnasien**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

September 2016

## Übungsaufgaben:

**Ü1:**
Lösen Sie die Gleichung $x^3 = 4x$

**Ü2:**
Lösen Sie die Gleichung $x^4 - x^2 - 12 = 0$

**Ü3:**
Lösen Sie die Gleichung $2 = \frac{13x}{x^2 + 10}$

**Ü4:**
Lösen Sie die Gleichung $\left(e^x - 1\right)\left(e^{3x} - 2\right) = 0$

**Ü5:**
Lösen Sie die Gleichung $e^x + 25e^{-x} = 10$

**Ü6:**
Lösen Sie die Gleichung $e^{5x} - e^{3x} = 6e^x$

**Ü7:**
Lösen Sie die Gleichung $\sin(x) \cdot (\cos(x) - 2) = 0$ für $0 \leq x \leq 2\pi$

**Ü8:**
Lösen Sie die Gleichung $\left(\cos(x)\right)^2 - 3\cos(x) + 2 = 0$ für $0 \leq x \leq 2\pi$

## Abituraufgaben (Haupttermin)

**Aufgabe 1: (Abiturprüfung 2016)**

Lösen Sie die Gleichung $3-e^{x}=\frac{2}{e^{x}}$

**Aufgabe 2: (Abiturprüfung 2015)**

Lösen Sie die Gleichung $\left(x^{3}-3x\right)\cdot\left(e^{2x}-5\right)=0$

**Aufgabe 3: (Abiturprüfung 2014)**

Lösen Sie die Gleichung $x^{4}=4+3x^{2}$

**Aufgabe 4: (Abiturprüfung 2013)**

Lösen Sie die Gleichung $2e^{x}-\frac{4}{e^{x}}=0$

**Aufgabe 5: (Abiturprüfung 2012)**

Lösen Sie für $0\leq x\leq 2\pi$ die Gleichung $\sin(x)\cdot\cos(x)-2\cos(x)=0$ .

**Aufgabe 6: (Abiturprüfung 2011)**

Lösen Sie die Gleichung $4e^{2x}+6e^{x}=4$ .

**Aufgabe 7: (Abiturprüfung 2009)**

Lösen Sie die Gleichung $\left(2x^{2}-8\right)\cdot\left(e^{2x}-6\right)=0$ .

**Aufgabe 8: (Abiturprüfung 2008)**

Lösen Sie die Gleichung $\frac{6}{x^{4}}+\frac{1}{x^{2}}=1$ ( $x\neq 0$ ).

**Aufgabe 9: (Abiturprüfung 2007)**

Lösen Sie die Gleichung $e^{x}-2-\frac{15}{e^{x}}=0$ .

**Aufgabe 10: (Abiturprüfung 2005)**

Lösen Sie die Gleichung $x^{5}-3x^{3}-4x=0$ .

**Aufgabe 11: (Abiturprüfung 2004)**

Lösen Sie die Gleichung $e^{4x}-11e^{2x}+18=0$ .

## Lösungen

**Ü1:**

$x^3 = 4x \quad \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \quad \Rightarrow x \cdot \left(x^2 - 4\right) = 0$

Satz vom Nullprodukt:
Gleichung I) $x = 0$

Gleichung II) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

Lösungsmenge L = {0 ; -2 ; 2}

**Ü2:**

$x^4 - x^2 - 12 = 0$

Substitution: $u = x^2$

Daraus ergibt sich die Gleichung $u^2 - u - 12 = 0 \quad \Rightarrow u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-12)}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$

$\Rightarrow u_1 = 4 \,, \quad u_2 = -3$

Rücksubstitution: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$x^2 = -3 \Rightarrow$ Gleichung ist nicht lösbar

Lösungsmenge L = {-2 ; 2}

**Ü3:**

$2 = \frac{13x}{x^2 + 10} \quad | \cdot (x^2 + 10)$

$2(x^2 + 10) = 13x \quad \Rightarrow 2x^2 - 13x + 20 = 0 \quad \Rightarrow x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 2 \cdot 20}}{4} = \frac{13 \pm 3}{4}$

$\Rightarrow x_1 = 4 \,, \quad x_2 = 2{,}5$

Lösungsmenge L = {4 ; 2,5}

**Ü4:**

$\left(e^x - 1\right)\left(e^{3x} - 2\right) = 0$

Satz vom Nullprodukt:
Gleichung I): $e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = \ln(1) = 0$

Gleichung II): $e^{3x} - 2 = 0 \Rightarrow e^{3x} = 2 \Rightarrow 3x = \ln(2) \Rightarrow x = \frac{\ln(2)}{3}$

Lösungsmenge L = $\{0, \frac{\ln(2)}{3}\}$

**Ü5:**

$e^x + 25e^{-x} = 10$

$\Rightarrow e^x + \frac{25}{e^x} = 10 \quad | \cdot e^x$

$\Rightarrow e^{2x} + 25 = 10e^x \Rightarrow e^{2x} - 10e^x + 25 = 0$

Substitution: $u = e^x$

Daraus ergibt sich die Gleichung $u^2 - 10u + 25 = 0$

$$\Rightarrow u_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{10 \pm 0}{2} \Rightarrow u_{1,2} = 5$$

Rücksubstitution: $e^x = 5 \Rightarrow x = \ln(5)$

Lösungsmenge L = { ln(5) }

**Ü6:**

$e^{5x} - e^{3x} = 6e^x \quad \Rightarrow e^{5x} - e^{3x} - 6e^x = 0 \quad \Rightarrow e^x \cdot (e^{4x} - e^{2x} - 6) = 0$

Satz vom Nullprodukt:

Gleichung I): $e^x = 0$ Gleichung ist nicht lösbar

Gleichung II): $e^{4x} - e^{2x} - 6 = 0$ Substitution: $u = e^{2x}$

Daraus ergibt sich die Gleichung $u^2 - u - 6 = 0$

$$u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow u_1 = 3, \; u_2 = -2$$

Rücksubstitution: $e^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = \ln(3) \Rightarrow x = \frac{\ln(3)}{2}$

$e^{2x} = -2$ Gleichung ist nicht lösbar

Lösungsmenge L = $\{\frac{\ln(3)}{2}\}$

**Ü7:**

$\sin(x) \cdot (\cos(x) - 2) = 0$ für $0 \le x \le 2\pi$

Satz vom Nullprodukt:

Gleichung I): $\sin(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \pi$ oder $x = 2\pi$

Gleichung II): $\cos(x) - 2 = 0 \Rightarrow \cos(x) = 2$ Gleichung ist nicht lösbar

Lösungsmenge L = $\{0; \pi; 2\pi\}$

**Ü8:**

$\left(\cos(x)\right)^2 - 3\cos(x) + 2 = 0$ für $0 \le x \le 2\pi$

Substitution: $u = \cos(x)$

Daraus ergibt sich die Gleichung $u^2 - 3u + 2 = 0 \quad \Rightarrow u_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$

$\Rightarrow u_1 = 2$, $u_2 = 1$

Rücksubstitution: $\cos(x) = 2$ Gleichung ist nicht lösbar

$\cos(x) = 1 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 2\pi$

Lösungsmenge L = $\{0; 2\pi\}$

**Aufgabe 1:**

$3 - e^x = \dfrac{2}{e^x} \quad | \cdot e^x$

$\Rightarrow 3e^x - e^{2x} = 2 \Rightarrow -e^{2x} + 3e^x - 2 = 0$ Substitution: $u = e^x$

Daraus folgt $-u^2 + 3u - 2 = 0$

Lösung mit der a-b-c-Formel: $u_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2}$

Daraus folgt $u_1 = 1$ und $u_2 = 2$

Rücksubstitution: $e^x = 1 \Rightarrow x = \ln(1) = 0$

$e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$

Lösungsmenge L = $\{0 ; \ln(2)\}$

**Aufgabe 2:**

$\left(x^3 - 3x\right) \cdot \left(e^{2x} - 5\right) = 0$

Anwendung des Satzes vom Nullprodukt:

Gleichung I) $x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(x^2 - 3\right) = 0$

Daraus folgt $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{3}$ ; $x_3 = -\sqrt{3}$

Gleichung II) $e^{2x} - 5 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 5 \Rightarrow 2x = \ln(5) \Rightarrow x = \dfrac{\ln(5)}{2}$

Lösungsmenge $L = \{0 ;\ -\sqrt{3} ;\ \sqrt{3} ;\ \dfrac{\ln(5)}{2}\}$

**Aufgabe3:**
Zunächst wird die Gleichung gleich Null gesetzt: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Mit der Substitution $x^2 = u$ folgt: $u^2 - 3u - 4 = 0$

Anwendung der Lösungsformel: $u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow u_1 = 4$ und $u_2 = -1$

Rücksubstitution: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
$x^2 = -1$ ergibt keine Lösung.

Lösungsmenge L = {-2; 2}

**Aufgabe 4:**
$2e^x - \frac{4}{e^x} = 0 \quad | \cdot e^x \qquad \Rightarrow 2e^{2x} - 4 = 0 \quad \Rightarrow 2e^{2x} = 4 \quad \Rightarrow e^{2x} = 2 \quad \Rightarrow 2x = \ln(2)$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \ln(2)$

**Aufgabe 5:**

Ausklammern von cos(x) ergibt: $\cos(x) \cdot (\sin(x) - 2) = 0$
Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt: $\cos(x) = 0$ oder $\sin(x) - 2 = 0$
$\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ oder $x = \frac{3}{2}\pi$
$\sin(x) - 2 = 0 \Rightarrow \sin(x) = 2$ ist nicht lösbar (da sin(x) maximal 1 werden kann)

Lösungsmenge: L = $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\}$

**Aufgabe 6:**

$4e^{2x} + 6e^x = 4 \Leftrightarrow 4e^{2x} + 6e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} + 3e^x - 2 = 0$

Substitution: $u = e^x$
Daraus folgt $2u^2 + 3u - 2 = 0$
Lösung der quadratischen Gleichung: $u_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$
$u_1 = 0{,}5$ und $u_2 = -2$

Rücksubstitution: $0{,}5 = e^x \Rightarrow x = \ln(0{,}5)$
$-2 = e^x$ daraus ergibt sich keine Lösung.

Lösungsmenge: L = { ln(0,5) }

**Aufgabe 7:**

$(2x^2-8)\cdot(e^{2x}-6)=0$

Das Produkt ist genau dann 0, wenn einer der beiden Faktoren 0 ergibt:

1.Faktor: $2x^2-8=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

2.Faktor: $e^{2x}-6=0 \Leftrightarrow e^{2x}=6 \Leftrightarrow 2x=\ln 6 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln 6$

Lösungsmenge: $L$ = { 2 ; -2 ; $\frac{1}{2}\ln 6$ }

**Aufgabe 8:**

$\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^2}=1 \quad |\cdot x^4$

$6+x^2=x^4 \Rightarrow x^4-x^2-6=0$

Substitution: $u=x^2 \Rightarrow u^2-u-6=0 \Rightarrow u_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}$

Daraus folgt $u_1=3$ und $u_2=-2$

Rücksubstitution: $x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

$x^2=-2 \Rightarrow$ nicht rücksubstituierbar

Daraus folgt $L$ = { $\sqrt{3},-\sqrt{3}$}

**Aufgabe 9:**

$e^x-2-\frac{15}{e^x}=0$

Zunächst wird mit $e^x$ durchmultipliziert, um den Bruch aufzulösen:

$\Rightarrow e^{2x}-2e^x-15=0$

Substitution: $u=e^x \Rightarrow u^2-2u-15=0 \Rightarrow u_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{2\pm 8}{2}$

$u_1=5$ und $u_2=-3$

Rücksubstitution: $e^x=5 \Rightarrow x=\ln 5$

$e^x=-3 \Rightarrow$ nicht lösbar und somit Lösungsmenge: $L$ = { $\ln 5$}

**Aufgabe 10:**

$x^5-3x^3-4x=0 \Rightarrow x\cdot(x^4-3x^2-4)=0$

Da x ausgeklammert werden kann, gilt $x_1=0$.

Nun muss noch die Gleichung $x^4-3x^2-4=0$ gelöst werden. Es handelt sich dabei um eine biquadratische Gleichung, die mit Hilfe der Substitution gelöst wird:

$x^2 = u \Rightarrow u^2 - 3u - 4 = 0$

$u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$ und damit $u_1 = 4$ und $u_2 = -1$

Rücksubstitution: $u_1 = 4 \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$

$u_2 = -1 \Rightarrow -1 = x^2$ kann nicht gelöst werden.

Also Lösungsmenge L = { 0; -2; 2}

**Aufgabe 11:**

$e^{4x} - 11e^{2x} + 18 = 0$

Substitution: $e^{2x} = u$

Daraus folgt: $u^2 - 11 \cdot u + 18 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-72}}{2} = \frac{11 \pm 7}{2}$ damit $u_1 = 9$ , $u_2 = 2$

Rücksubstitution: $9 = e^{2x} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}\ln 9 = \ln 9^{0,5} = \ln 3$

$2 = e^{2x} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}\ln 2$