Abiturprüfung Mathematik 2009 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Aufgaben Analytische Geometrie II, 1

Aufgabe II 1

Die x_1x_2-Ebene beschreibt eine flache Landschaft, in der ein Flugplatz liegt.
Eine Radarstation befindet sich im Punkt $R_1(6/3/0)$.
Das Radar erfasst eine Testflugzeug F_1 um 7.00 Uhr im Punkt P(7/29/7) und ermittelt als Flugbahn des Flugzeugs

$$f_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$ (t in Minuten nach 7.00 Uhr, Koordinatenangaben in km).

a) In welchem Punkt befindet sich das Flugzeug um 7.01 Uhr ?
Woran erkennen Sie, dass sich das Flugzeug im Sinkflug befindet ?
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs in km/h.
Unter welchem Winkel fliegt das Flugzeug auf den Boden zu ?
Zu welcher Uhrzeit und in welchem Punkt würde es bei Beibehaltung dieser Flugbahn auf dem Boden aufsetzen ? (6 VP)

b) Eine weitere Radarstation befindet sich im Punkt $R_2(17/9/0)$.
Der Anflug des Testflugzeugs F_1 auf den Flugplatz ist optimal, wenn die Flugbahn f_1 und die beiden Radarstationen in einer Ebene liegen. Prüfen Sie, ob das zutrifft.
Die Radarstation R_2 übernimmt die Flugüberwachung zu dem Zeitpunkt, ab dem sich das Flugzeug von R_1 entfernt. Um wie viel Uhr ist dies der Fall ? (6 VP)

c) Die Flugbahn des zweiten Testflugzeugs F_2 wird beschrieben durch

$$f_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (t in Minuten nach 7.00 Uhr, Koordinatenangaben in km).

Wie weit sind die Flugzeuge F_1 und F_2 um 7.04 Uhr voneinander entfernt ?
Berechnen Sie, wie nahe sich die beiden Flugzeuge kommen. (4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2009 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analytische Geometrie II, 1

Aufgabe II 1

a) Der Punkt, in dem sich das Flugzeug um 7.01 Uhr befindet, ergibt sich aus der Geradengleichung für t = 1:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 27 \\ 6 \end{pmatrix}$ und somit in Q(10/27/6).

Das Flugzeug befindet sich im Sinkflug, da die x_3-Koordinate des Richtungsvektors negativ ist. Diese Koordinate gibt an, um wie viel km das Flugzeug pro Minute an Höhe gewinnt bzw. verliert.

Zurückgelegte Strecke des Flugzeugs in der 1.Minute: $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

Geschwindigkeit des Flugzeuges = $\sqrt{14}\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = 224{,}5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

Der Neigungswinkel des Flugzeugs entspricht dem Schnittwinkel der Gerade f_1 mit der $x_1 - x_2$ – Ebene:

Der Normalenvektor der $x_1 - x_2$ – Ebene lautet $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für den Schnittwinkel α gilt: $\sin\alpha = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{9+4+1}\cdot\sqrt{1}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \alpha = 15{,}5°$

Zeitpunkt, wann das Flugzeug landet:
Beim Aufsetzen auf dem Boden ist die x_3-Koordinate der Gerade = 0.

Es muss also gelten: $7 - t = 0 \Rightarrow t = 7$.

Für t = 7 gilt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$

Somit landet das Flugzeug um 7.07 Uhr im Punkt L(28/15/0).

b) Zunächst wird die Gleichung der Ebene E aufgestellt, in der die Gerade f_1 und der Punkt $R_1(6/3/0)$ enthalten sind:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 26 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Der zweite Richtungsvektor von E ergibt sich aus der Differenzbildung der Punktkoordinaten von R_1 und des Ortsvektors von E.

Der Anflug ist optimal, wenn in der Ebene E nun auch der Punkt $R_2(17/9/0)$ enthalten ist. Dies kann mithilfe einer Punktprobe ermittelt werden:

$$\begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 26 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems ergibt sich t = 3,5 und u = -0,5.
Daraus folgt, dass der Punkt R_2 in der Ebene E.

Somit ist der Anflug des Testflugzeugs optimal.

Berechnung des Zeitpunktes, ab wann die Radarstation R_2 die Überwachung übernimmt:
Zunächst wird ermittelt, zu welchem Zeitpunkt der Abstand zwischen dem Flugzeug F_1 und der Radarstation R_1 minimal ist.
Dies entspricht der Berechnung des Abstandes des Punktes $R_1(6/3/0)$ von der Geraden f_1.
Die Abstandsberechnung erfolgt mit einer Hilfsebene H.
Die Hilfsebene H ist orthogonal zu f_1 und enthält R_1.
Koordinatengleichung von H: $3x_1 - 2x_2 - x_3 = 12$
(Richtungsvektor von f_1 entspricht dem Normalenvektor der Ebene H.

Nun wird der Schnittpunkt der Ebene H und der Gerade f_1 berechnet:
$3 \cdot (7+3t) - 2 \cdot (29-2t) - (7-t) = 12 \Leftrightarrow -44 + 14t = 12 \Leftrightarrow t = 4$

Der Schnittpunkt ergibt sich durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 29 \\ 7 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}$ und lautet S(19/21/3).

Um 7.04 Uhr ist der Abstand zwischen dem Flugzeug und der Station R_1 minimal.
Danach übernimmt die Station R_2 die Überwachung.

(Hinweis: Es ist in der Aufgabe nicht verlangt, dass der minimale Abstand zwischen dem Flugzeug und der Station R_1 konkret ausgerechnet wird).

c) Um 7.04 Uhr befindet sich das Flugzeug F_1 im Punkt S(19/21/3) (siehe b)).

Für das Flugzeug F_2 gilt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix}$ und somit befindet es sich um

7.04 Uhr im Punkt T(26/19/7).

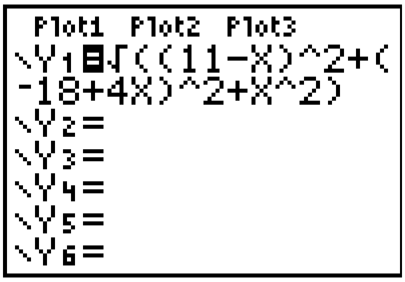
Abstand der Flugzeuge: $\left|\overrightarrow{ST}\right| = \left|\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{49+4+16} = \sqrt{69} \approx 8{,}3\,\text{km}.$

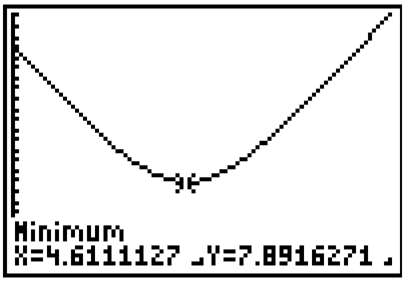
Die Flugzeuge sind um 7.04 Uhr 8,3 km voneinander entfernt.

Berechnung des minimalen Abstandes der beiden Flugzeuge:
Das Flugzeug F_1 befindet sich zum Zeitpunkt t im Punkt $P_t(7+3t\,/\,29-2t\,/\,7-t)$.
Das Flugzeug F_2 befindet sich zum Zeitpunkt t im Punkt $Q_t(18+2t\,/\,11+2t\,/\,7)$.

Der Abstand der Punkte zum Zeitpunkt t beträgt $\left|\overrightarrow{P_tQ_t}\right| = \sqrt{(11-t)^2 + (-18+4t)^2 + t^2}$

Nun ist t so zu wählen, dass der Abstand minimal wird.
Dies wird vom GTR erledigt.





Der Abstand ist für t = 4,611 minimal und der minimale Abstand beträgt 7,89 km.