Abiturprüfung Mathematik 2011 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis I 2

Aufgabe I 2.1

Ein Staubecken wird zur Zeit der Schneeschmelze gefüllt. Da die Schneeschmelze temperaturabhängig ist, kann die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion w mit

$$w(t) = 50 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 60 \quad ; \quad 0 \le t \le 24$$

beschrieben werden (t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, w(t) in $\frac{m^3}{h}$)

a) In welchem Zeitraum ist die momentane Zuflussrate größer als 100 $\frac{m^3}{h}$?
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab ? (4 VP)

b) Zu Beobachtungsbeginn enthält das Staubecken 5000 m^3 Wasser.
Wie viel Wasser enthält es nach 24 Stunden ?
Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm für die zum Zeitpunkt t im Staubecken enthaltene Wassermenge.
Nach welcher Zeit sind 6000 m^3 Wasser im Becken ? (5 VP)

Aufgabe I 2.2

Für jedes a > 0 ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = a \cdot \sin(ax) + a \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

f_a hat das Schaubild K_a und die Periode p_a.

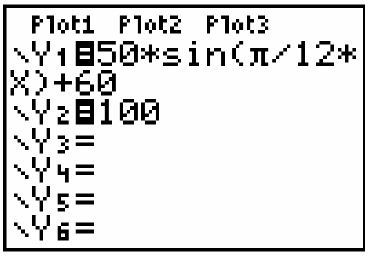
a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Hochpunktes H_a von K_a für $0 \le x \le p_a$.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Kurve, auf der alle diese Hochpunkte H_a liegen.
(4 VP)

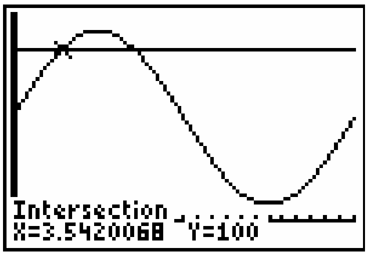
b) Geben Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des Wendepunkts W_a von K_a an, der den kleinsten positiven x-Wert hat.
Die Tangente in W_a an K_a schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.
Zeigen Sie, dass der Inhalt dieser Fläche unabhängig von a ist. (5 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2011 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil - Analysis I 2

Aufgabe I 2.1

a) Es soll gelten, dass $w(t) \geq 100$ ist.

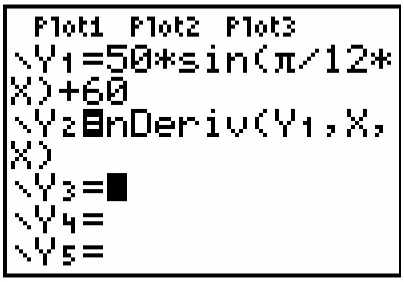


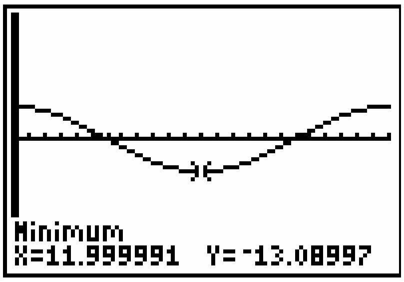


Die waagrechte Gerade y = 100 wird geschnitten bei t = 3,54 und t = 8,46.

Die Zuflussrate ist daher im Intervall]3,54 ; 8,46[über 100 $\frac{m^3}{h}$.

Die stärkste Abnahme der Zuflussrate befindet sich an der Wendestelle der Funktion w(t).





Die Ableitung $w'(t)$ wird minimal bei $t = 12$, also nimmt die Zuflussratenfunktion 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn am stärksten ab.

b) Wasservolumen nach 24 Stunden: $V = 5000 + \int_0^{24} w(t)dt = 5000 + 1440 = 6440\,m^3$

Integralfreier Funktionsterm:

$$V(t) = 5000 + \int_0^t \left(50\sin\left(\frac{\pi}{12}z\right) + 60\right)dz = 5000 + \left[-50\cos\left(\frac{\pi}{12}z\right)\cdot\frac{12}{\pi} + 60z\right]_o^t$$

$$V(t) = 5000 - \frac{600}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 60t + \frac{600}{\pi}$$

Zeitpunkt, zu dem 6000 m³ Wasser enthalten sind:
$V(t) = 6000 \Rightarrow t = 10{,}53$ Stunden (GTR)

Etwa 10,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn ist ein Wasservolumen von 6000 m³ erreicht.

Aufgabe I 2.2

a) Die Periode des Schaubildes von $f_a(x) = a \cdot \sin(ax) + a$ beträgt $p_a = \frac{2\pi}{a}$.

Es gilt $f_a'(x) = a^2 \cdot \cos(ax)$ und $f_a''(x) = -a^3 \cdot \sin(ax)$ und $f_a'''(x) = -a^4 \cdot \cos(ax)$

Berechnung des Hochpunktes im Intervall $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{a}$:

Hinreichende Bedingung: $f_a'(x) = 0$ und $f_a''(x) < 0$

$f_a'(x) = 0 \Rightarrow a^2 \cos(ax) = 0 \Rightarrow ax = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2a}$

$f_a''(\frac{\pi}{2a}) = -a^3 \cdot \sin(a \cdot \frac{\pi}{2a}) = -a^3 < 0$ (da a > 0 ist).

Somit lautet der gesuchte Hochpunkt $H_a(\frac{\pi}{2a} / 2a)$.

(Man hätte den Hochpunkt auch dadurch ermitteln können, indem man sich überlegt, wie sich das Schaubild von f_a aus $\sin(x)$ ergibt (Streckung in y-Richtung um Faktor a, Streckung in x-Richtung um Faktor $\frac{1}{a}$ und Verschiebung um a nach oben.)

Ortskurve von H_a:

Es gilt $x = \frac{\pi}{2a}$ (1) und $y = 2a$ (2)

Aus (1) folgt $a = \frac{\pi}{2x}$ und dies eingesetzt in (2) ergibt $y = \frac{\pi}{x}$ und dies ist die Ortskurve,

b) Berechnung des Wendepunktes mit kleinstem positiven x-Wert:

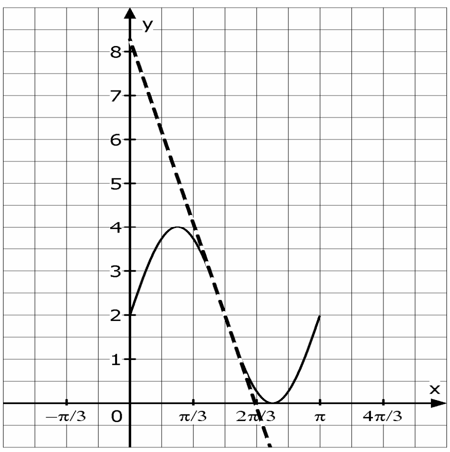
Hinreichende Bedingung: $f_a''(x) = 0$ und $f_a'''(x) \neq 0$

$f_a''(x) = 0 \Rightarrow -a^3 \sin(ax) = 0 \Rightarrow ax = k \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{k \cdot \pi}{a}$ wobei k irgendein ganzzahliger Wert ist

Für k = 1 ergibt sich der kleinste positive x-Wert mit $x = \frac{\pi}{a}$.

Es gilt $f_a'''(\frac{\pi}{a}) = -a^4 \cdot \cos(\pi) = a^4 \neq 0$ und damit $W_a(\frac{\pi}{a} / a)$

Skizze (a = 2) für Berechnung des Flächeninhalts:



Berechnung der Tangentengleichung im Wendepunkt:

Allgemeine Tangentengleichung: $y = f_a'(u)\cdot(x-u)+f_a(u)$ mit $u=\frac{\pi}{a}$

Es gilt $f_a'(\frac{\pi}{a}) = a^2\cdot\cos(\pi) = -a^2$

$\Rightarrow y = -a^2\cdot(x-\frac{\pi}{a})+a \Rightarrow y = -a^2x+\pi a + a$ ist die Tangente in W_a.

Zur Berechnung der Fläche werden die Schnittpunkte der Tangente mit den Koordinatenachsen benötigt.

Schnittpunkt mit der y-Achse: $y=-a^2\cdot 0+\pi a + a = \pi a + a \Rightarrow S_y(0\,/\,\pi a + a)$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $0=-a^2x+\pi a + a \Rightarrow x = \frac{-\pi a - a}{-a^2} = \frac{\pi+1}{a} \Rightarrow N(\frac{\pi+1}{a}\,/\,0)$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi+1}{a}\cdot(\pi a + a) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi+1}{a}\cdot a\cdot(\pi+1) = \frac{1}{2}(\pi+1)^2$$

Die Dreiecksfläche ist unabhängig vom Parameter a, was zu zeigen war.