Abiturprüfung Mathematik 2009 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Aufgaben Analytische Geometrie II, 2

Aufgabe II 2.1

Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide hat die Eckpunkte P(0/-6/0), Q(12/0/0) und R(0/6/0). Die Pyramide wird von einer Ebene geschnitten und der obere Teilkörper wird entfernt. Die Deckfläche des so entstandenen Pyramidenstumpfs hat die Eckpunkte P*(0/-2/2), Q*(2/0/2,5) und R*(0/1/2,5).

a) Stellen Sie den Pyramidenstumpf in einem Koordinatensystem dar.
Begründen Sie, dass die Deck- und die Grundfläche des Pyramidenstumpfs nicht parallel sind.
Bestimmen Sie den Winkel, den die Kante QQ* mit der x_1-Achse bildet.
Zeigen Sie, dass S(0/0/3) die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.

(6 VP)

b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes Q* von der Geraden durch Q und R.
Zeigen Sie, dass die Seitenfläche QRR*Q* des Pyramidenstumpfs ein Trapez ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Trapezes.

(6 VP)

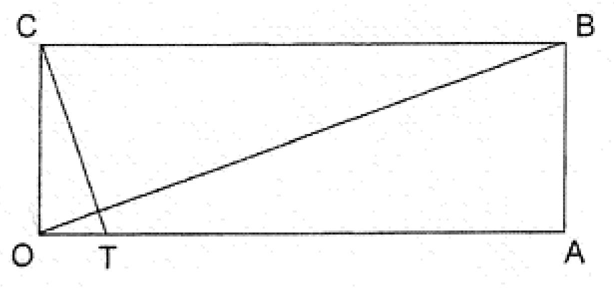
Aufgabe II 2.2

Hinweis: ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

Das Rechteck OABC ist dreimal so lang wie breit.

Für den Punkt T gilt $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA}$.

Zeigen Sie, dass die Strecken OB und TC orthogonal sind.

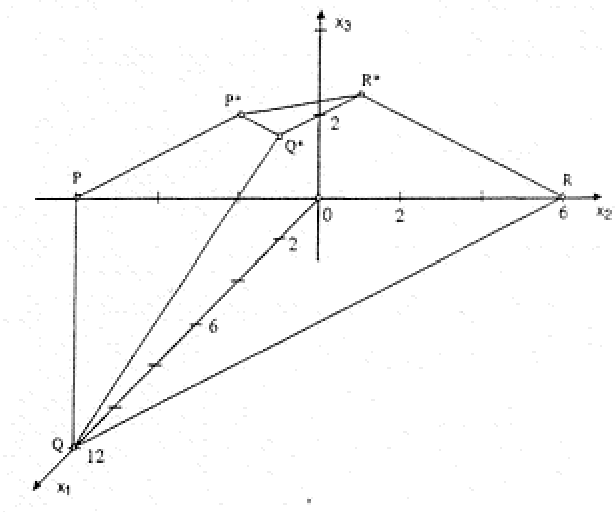


(4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2009 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analytische Geometrie II, 1

Aufgabe II 2.1

a)



Die Punkte in der Grundfläche haben alle die x_3-Koordinate 0.
Die Punkte der Deckfläche haben jedoch als x_3-Koordinaten 2 und 2,5.
Somit können die Deckfläche und Grundfläche nicht zueinander parallel sein.

Berechnung des Winkels zwischen den Vektoren $\overrightarrow{QQ^*} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ und

$$\overrightarrow{QO} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ (x_1\text{-Achse}): \quad \cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{106,25} \cdot \sqrt{144}} = \frac{120}{\sqrt{106,25} \cdot \sqrt{144}} = 0,97$$

Daraus folgt $\alpha = 14,04°$.

Um zu zeigen, dass der Punkt S(0/0/3) die ursprüngliche Spitze der Pyramide war, genügt der Nachweis, dass sich die Gerade g_1 durch Q und Q* und die Gerade g_2 durch R und R* in S schneiden.
Da in der Aufgabe steht, dass es sich bei dem ursprünglichen Körper um eine Pyramide handelt, muss nicht gezeigt werden, dass auch die Gerade durch P und P* den Punkt S enthält.

Gleichung von g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$

Gleichung von g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt der Geraden: $\begin{array}{rcl} 12 + 10r &=& 0 \\ 0 &=& 6 + 5s \\ -2{,}5r &=& -2{,}5s \end{array}$

Aus dem Gleichungssystem folgt r = s = -1,2

Als Schnittpunkt ergibt sich aus $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ der Punkt S(0/0/3).

b) Gleichung der Geraden h durch Q und R: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hilfsebene H senkrecht zu h durch Q* ergibt H: $-12x_1 + 6x_2 = -24$
$\Leftrightarrow -2x_1 + x_2 = -4$

(Normalenvektor von H ist der Richtungsvektor von h)

Schnitt der Ebene H mit der Geraden h: $-2(12-12r) + 6r = -4 \Leftrightarrow 30r = 20 \Leftrightarrow r = \frac{2}{3}$
Daraus ergibt sich als Lotfußpunkt L(4/4/0).

Abstand von Q* zur Geraden h = $\left|\overrightarrow{Q^*L}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+16+6{,}25} = \sqrt{26{,}25} \approx 5{,}12$

Ein Viereck ist ein Trapez, wenn ein Seitenpaar parallel zueinander ist.
Es gilt: $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{Q^*R^*} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da diese gegenüberliegenden Vektoren Vielfache zueinander sind (das heißt sie sind linear abhängig), sind die Seiten QR und Q*R* zueinander parallel. Damit ist das Viereck QRR*Q* ein Trapez.

Fläche des Trapezes = $\frac{1}{2} \cdot \left(\left|\overrightarrow{QR}\right| + \left|\overrightarrow{Q^*R^*}\right|\right) \cdot h_{Trapez}$
Es gilt $\left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{144+36+0} = \sqrt{180}$ und $\left|\overrightarrow{Q^*R^*}\right| = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$

Außerdem gilt $h_{Trapez} = \sqrt{26{,}25}$ (= Abstand von Q* zur Gerade durch Q und R)

$$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{180} + \sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{26{,}25} = 40{,}1 \text{ Flächeneinheiten}$$

c) Zu zeigen ist die Orthogonalität der Strecken $\overline{OB}$ und $\overline{TC}$:
Vektoriell geschrieben ist zu zeigen: $\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{TC} = 0$

Folgendes ist bekannt bzw. kann vorausgesetzt werden:

$\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC} = 0$

$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OA}$

$\left|\overrightarrow{OA}\right| = 3 \cdot \left|\overrightarrow{OC}\right| \Leftrightarrow \sqrt{\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OA}} = 3 \cdot \sqrt{\overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OC}} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OA} = 9 \cdot \overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OC}$ (*)

Nun gilt folgende Umformung:

$$\overrightarrow{OB} \bullet \overrightarrow{TC} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) \bullet (-\frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = -\frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OC} - \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC}$$

$$= \overrightarrow{OC} \bullet \overrightarrow{OC} - \frac{1}{9} \cdot \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OA} = 0$$

Aufgrund von (*) ergibt sich, dass sich die Terme am Schluss gegenseitig aufheben.

Damit ist gezeigt, dass die Strecken OB und TC orthogonal sind.