Hauptprüfung Abiturprüfung 2014 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Pflichtteil

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

März 2014

Aufgabe 1: (2 VP)

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{2x}$.

Aufgabe 2: (2 VP)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3} dx$

Aufgabe 3: (3 VP)
Lösen Sie die Gleichung $x^4 = 4 + 3x^2$

Aufgabe 4: (4 VP)

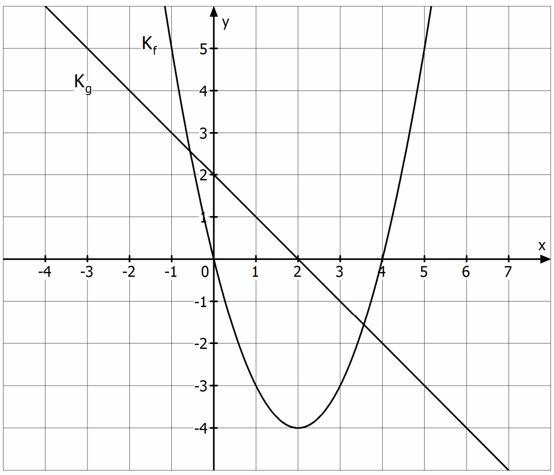
Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2$.

a) Beschreiben Sie, wie man den Graphen von g aus dem Graphen von f erhält.
b) Bestimmen Sie die Nullstellen von g für $0 \le x \le 4$

Aufgabe 5: (4 VP)

Die Abbildung zeigt die Graphen K_f und K_g zweier Funktionen f und g.

a) Bestimmen Sie $f(g(3))$.
Bestimmen Sie einen Wert für x so, dass $f(g(x)) = 0$ ist.
b) Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Bestimmen Sie $h'(2)$.



Aufgabe 6: (5 VP)
Gegeben sind die Ebenen E: $x_1 + x_2 = 4$ und F: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$.

a) Stellen Sie die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.
Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E und F an.
b) Die Ebene G ist parallel zur x_1-Achse und schneidet die x_2x_3 – Ebene in derselben Spurgeraden wie die Ebene F.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene G an.

Aufgabe 7: (4 VP)
Gegeben sind die Punkte A(1/10/1), B(-3/13/1) und C(2/3/1).
Die Gerade g verläuft durch A und B.
Bestimmen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden g.

Aufgabe 8: (3 VP)
An einem Spielautomaten verliert man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele.

a) Formulieren Sie ein Ereignis A, für das gilt:

$$P(A) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

b) Jemand spielt vier Spiele an dem Automaten.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er dabei genau zwei Mal ?

Aufgabe 9: (3 VP)

Gegeben sind der Mittelpunkt einer Kugel sowie eine Ebene.
Die Kugel berührt diese Ebene.
Beschreiben Sie, wie man den Kugelradius und den Berührpunkt bestimmen kann.

Lösungen

Aufgabe 1:

Zunächst wird die Funktionsgleichung von f umgeschrieben in $f(x) = x^{0,5} \cdot e^{2x}$

Für die Ableitungsfunktion werden die Produkt- und Kettenregel benötigt:

$$f'(x) = 0,5x^{-0,5} \cdot e^{2x} + x^{0,5} \cdot e^{2x} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{2x} + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{2x}$$

Aufgabe 2:

$$\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3}\,dx = \int_0^1 4 \cdot (2x+1)^{-3}\,dx = \left[\frac{4}{-2} \cdot (2x+1)^{-2} \cdot \frac{1}{2}\right]_0^1 = \left[-\frac{1}{(2x+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{9} - (-1) = \frac{8}{9}$$

Aufgabe 3:

Zunächst wird die Gleichung gleich Null gesetzt: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

Mit der Substitution $x^2 = u$ folgt: $u^2 - 3u - 4 = 0$

Anwendung der Lösungsformel: $u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow u_1 = 4$ und $u_2 = -1$

Rücksubstitution: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$x^2 = -1$ ergibt keine Lösung.

Lösungsmenge L = {-2; 2}

Aufgabe 4:

a) Der Graph von f wird mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt.

Anschließend wird er mit dem Faktor $\frac{2}{\pi}$ in x-Richtung gestaucht.

Danach wird er um 2 Längeneinheiten nach unten verschoben.

b) Nullstellen von g: $g(x) = 0$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$$

Die Funktion $y = \cos(x)$ nimmt an den Stellen x = 0, 2π, 4π,... den Wert 1 an.

$\frac{\pi}{2}x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

$\frac{\pi}{2}x = 2\pi \Rightarrow x_2 = 4$

Im gegebenen Intervall gibt es daher zwei Nullstellen x = 0 und x = 4.

Aufgabe 5:

a) Aus dem Schaubild kann man ablesen, dass g(3) = -1 ist.
Somit ist f(g(3)) = f(-1) = 5.

Gesucht ist x, so dass f(g(x)) = 0 ist.
1.Lösungsmöglichkeit:
Es ist f(4) = 0.
Gesucht ist daher ein x-Wert, so dass g(x) = 4 ist. Dies wäre für x = -2 der Fall.

2.Lösungsmöglichkeit:
Es ist f(0) = 0.
Gesucht ist daher ein x-Wert, so dass g(x) = 0 ist. Dies wäre für x = 2 der Fall.

b) Mit der Produktregel folgt: $h'(2) = f'(2) \cdot g(2) + f(2) \cdot g'(2)$
Es ist $f'(2) = 0$, da an der Stelle x = 2 die Parabel einen Tiefpunkt besitzt.
Es ist $g'(2) = -1$, da die Gerade die Steigung m = -1 besitzt.
Außerdem gilt f(2) = -4 und g(2) = 0.

$h'(2) = 0 \cdot 0 + (-4) \cdot (-1) = 4$

Hinweis: Man könnte auch die Aufgabe dadurch lösen, dass man für die beiden Schaubilder die zugehörigen Funktionsgleichungen aufstellt und das ganze dann rechnerisch löst.
Dies wäre jedoch deutlich aufwändiger und würde vom zeitlichen Aufwand her nicht zu der Punktzahl passen, die man bei der Aufgabe erzielen kann.

Aufgabe 6:

a) Schnittpunkte der Ebene E: $x_1 + x_2 = 4$ mit den Koordinatenachsen:

$S_{x_1}(x_1 / 0 / 0) = S_{x_1}(4 / 0 / 0)$

$S_{x_2}(0 / x_2 / 0) = S_{x_2}(0 / 4 / 0)$

$S_{x_3}(0 / 0 / x_3)$ existiert nicht, da dies auf einen Widerspruch 0 = 4 führt.

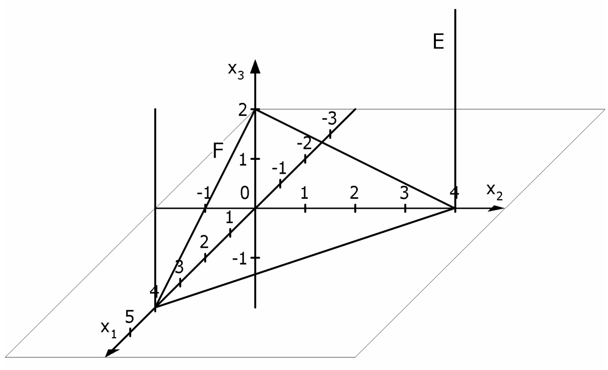
Die Ebene ist folglich parallel zur x_3-Achse.

Schnittpunkte der Ebene F: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ mit den Koordinatenachsen:

$S_{x_1}(x_1 / 0 / 0) = S_{x_1}(4 / 0 / 0)$

$S_{x_2}(0 / x_2 / 0) = S_{x_2}(0 / 4 / 0)$

$S_{x_3}(0 / 0 / x_3) = S_{x_3}(0 / 0 / 2)$



Die Schnittgerade der Ebenen E und F ist die Gerade durch die Punkte $S_{x_1}(4/0/0)$ und $S_{x_2}(0/4/0)$.

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Da die Ebene G parallel zur x_1-Achse verläuft, taucht die Variable x_1 nicht in der Koordinatengleichung auf.
Ansatz für die Koordinatengleichung von G: $bx_2 + cx_3 = d$

Damit G dieselbe Spurgerade mit der x_2x_3-Ebene wie F besitzt, muss G die Punkte $S_{x_2}(0/4/0)$ und $S_{x_3}(0/0/2)$ besitzen.

Einsetzen von S_{x_2} in die Koordinatengleichung: $4b = d$
Einsetzen von S_{x_3} in die Koordinatengleichung: $2c = d$

Wenn man z.B. d = 4 wählt, ergibt sich b = 1 und c = 2.
Eine mögliche Koordinatengleichung von G lautet damit: $x_2 + 2x_3 = 4$

Aufgabe 7:

Zunächst benötigt man die Gleichung der Geraden g.

Es ist $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zur Berechnung des Abstandes von g zu Punkt C(2/3/1) benötigt man eine Hilfsebene H.
Diese Hilfsebene steht orthogonal zur Geraden g und enthält den Punkt C.
Der Normalenvektor von H ist der Richtungsvektor von g.

Normalenform von H: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Koordinatengleichung von H: $-4x_1 + 3x_2 = 1$

Der Schnittpunkt von g mit H ergibt den Lotfußpunkt F:

$$-4(1-4s) + 3(10+3s) = 1 \quad \Leftrightarrow -4 + 16s + 30 + 9s = 1 \quad \Leftrightarrow s = -1$$

Einsetzen von s = -1 in die Gerade ergibt den Lotfußpunkt F(5/7/1).

Abstand von g zu C = $\overline{CF} = \left|\overline{CF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16+0} = 5$ LE

Aufgabe 8:

a) Die dargestellte Formel ergibt sich aus der Formel der Binomialverteilung:
$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

Die Formel P(A) setzt sich aus drei Summanden zusammen:

1.Summand = $\binom{10}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$ entspricht der obigen Formel mit n = 10, k = 8, $p=\frac{2}{3}$
Dieser stellt die Wahrscheinlichkeit dar, mit der man bei 10 Spielen am Automaten bei einer Verlustwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ genau 8 Spiele verliert.

2.Summand = $10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^9\cdot\frac{1}{3}$ entspricht der obigen Formel mit n = 10, k = 9, $p=\frac{2}{3}$
Hinweis: Der 2.Summand lautet ausführlich $\binom{10}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^9\cdot\frac{1}{3}$, da $\binom{10}{9}=10$ ist
Dieser stellt die Wahrscheinlichkeit dar, mit der man bei 10 Spielen am Automaten bei einer Verlustwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ genau 9 Spiele verliert.

3.Summand = $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ entspricht der obigen Formel mit n = 10, k = 10, $p=\frac{2}{3}$
Hinweis: Der 3.Summand lautet ausführlich $\binom{10}{10}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0$, da $\binom{10}{10}=1$ und $\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$
Dieser stellt die Wahrscheinlichkeit dar, mit der man bei 10 Spielen am Automaten bei einer Verlustwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ genau 10 Spiele verliert.

Fazit: Ereignis A heißt, dass man bei 10 Spielen am Automaten bei einer Verlustwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ mindestens 8 verliert.

b) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der verlorenen Spiele am Automaten an.
X ist binomialverteilt mit n = 4 und $p=\frac{2}{3}$.
Es ist $P(X=2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}=6\cdot\frac{4}{81}=\frac{8}{27}$
Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{27}$ verliert der Spieler genau zwei von vier Spielen.

Aufgabe 9:

1.Schritt:
Man stellt die Gleichung einer Hilfsgeraden g auf. Diese Gerade g steht senkrecht auf der gegebenen Ebene (Richtungsvektor von g ist der Normalenvektor von E) und geht durch den Mittelpunkt M der Kugel (Ortsvektor der Gerade ist $\overrightarrow{OM}$)

2.Schritt:
Der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E ist der gesuchte Berührpunkt B.

3.Schritt:
Den Abstand der Punkte M und B erhält man durch Berechnung von $\left|\overrightarrow{MB}\right|$ und entspricht dem Radius der Kugel.