Hauptprüfung Abiturprüfung 2015 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Wahlteil Analysis 2

Hilfsmittel: GTR und Formelsammlung

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

März 2015

Aufgabe A 2.1:

Die Entwicklung einer Population in den Jahren 1960 bis 2020 lässt sich durch zwei Funktionen modellhaft beschreiben.
Die Funktion g mit $g(t) = 400 + 20 \cdot (t+1)^2 \cdot e^{-0,1t}$ beschreibt die Geburtenrate und die Funktion s mit $s(t) = 600 + 10 \cdot (t-6)^2 \cdot e^{-0,09t}$ beschreibt die Sterberate der Population
(t in Jahren seit Beginn des Jahres 1960, g(t) und s(t) in Individuen pro Jahr).

a) Bestimmen Sie die geringste Sterberate.
In welchem Jahr war die Differenz aus Geburten- und Sterberate am größten ?
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Population zugenommen hat.
(4 VP)

b) Zu Beginn des Jahres 1960 bestand die Population aus 20.000 Individuen.
Berechnen Sie den Bestand der Population zu Beginn des Jahres 2017.
In welchem Jahr erreichte die Population erstmals wieder den Bestand von 1960 ?
(3 VP)

Betrachtet wird nun das Größenwachstum eines einzelnen Individuums der Population. Dies kann im Beobachtungszeitraum durch das Gesetz des beschränkten Wachstums modelliert werden. Man geht davon aus, dass dieses Individuum in ausgewachsenem Zustand 0,8 m groß ist. Zu Beobachtungsbeginn betragen seine Größe 0,5 m und seine momentane Wachstumsgeschwindigkeit 0,15 m pro Jahr.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Funktion, die die Körpergröße des Individuums in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Wie viele Jahre nach Beobachtungsbeginn hat die Körpergröße des Individuums um 50% zugenommen ?
(4 VP)

Aufgabe A 2.2:

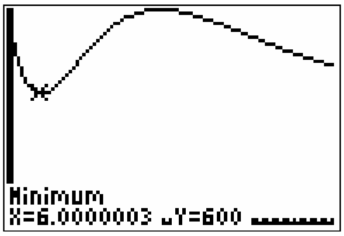
Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt O(0/0) und die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$.
Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte des Kreises mit dem Graphen von f in Abhängigkeit von Kreisradius.
(4 VP)

Lösungen

Aufgabe A 2.1

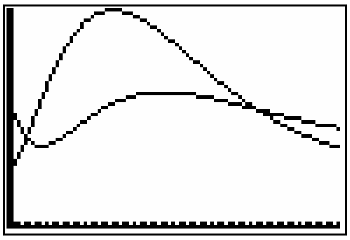
a) Geringste Sterberate:

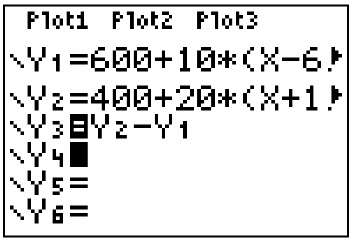
GTR-Schaubild der Sterberate im Bereich $0 \le t \le 60$:

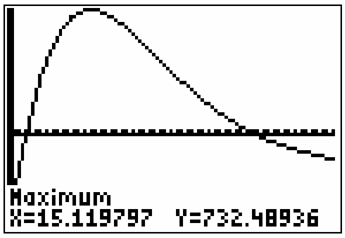


Bedingung: $s'(t) = 0$ und $s''(t) > 0$
Die geringste Sterberate wird erreicht für t = 6 und beträgt s(6) = 600 Individuen pro Jahr.

Größte Differenz aus Geburten- und Sterberate:



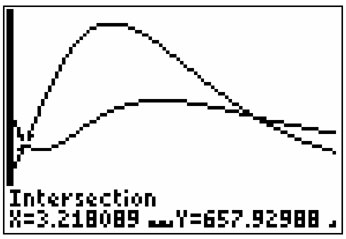


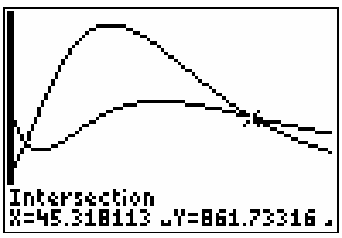


Anhand der Schaubilder der Geburten- und Sterberate erkennt man, dass bei der größten Differenz die Geburterate oberhalb der Sterberate liegt.

Gesucht ist das Maximum von $d(t) = g(t) - s(t)$.
Mit dem GTR ergibt sich das Maximum für $t \approx 15{,}12$.
Die Differenz war daher im Jahr 1975 am größten.

Die Population nimmt zu, wenn die Geburtenrate oberhalb der Sterberate liegt.





Die Geburtenrate liegt oberhalb im Zeitintervall [3,22 ; 45,31].

Die Population hat im Zeitraum 1963 bis 2005 zugenommen.

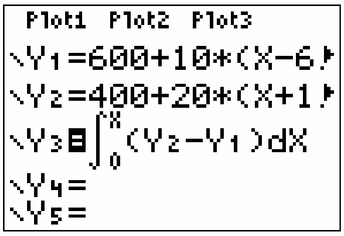
b) Bestand im Jahr 2017 (t = 57) wird mit Hilfe von Integralen berechnet.

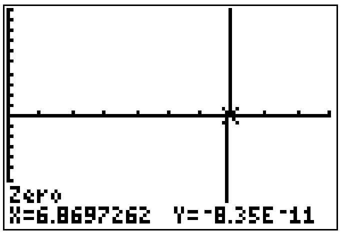
$$\int_0^{57} (g(t) - s(t))dt \approx 15636 \quad \text{(GTR)}$$

Die Bevölkerung hat von 1960 bis 2017 um 15636 Individuen zugenommen.
Der Bestand der Population besteht im Jahr 2017 aus 15636 + 20000 = 35636 Individuen

Damit die Population wieder den Bestand von 1960 erreicht, muss gelten:

$$\int_0^{u} (g(t) - s(t))dt = 0$$





Mit dem GTR ergibt sich $u \approx 6{,}87$.

Im Jahr 1966 erreicht die Population erstmals wieder den Bestand von 1960.

c) Die gesuchte Funktion erfüllt die Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums $f'(t) = k \cdot (S - f(t))$.

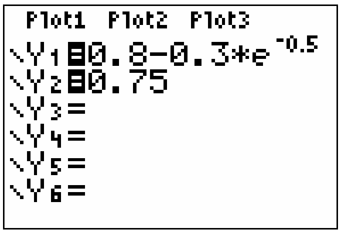
Die zugehörige Funktionsgleichung lautet $f(t) = S - a \cdot e^{-k \cdot t}$

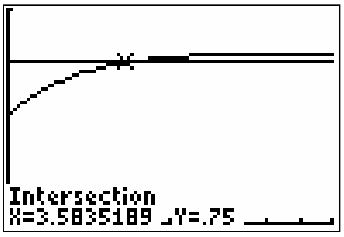
Der ausgewachsene Zustand entspricht der Schranke S = 0,8 m .
Mit $f(0) = 0{,}5$ folgt $a = S - f(0) = 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}3$
Außerdem gilt $f'(0) = 0{,}15$.
Mit dieser Bedingung kann man den Parameter k mit Hilfe der Differenzialgleichung berechnen: $f'(0) = k \cdot (S - f(0)) \quad \Rightarrow 0{,}15 = k \cdot (0{,}8 - 0{,}5) \Rightarrow k = 0{,}5$

Die Funktionsgleichung lautet $f(t) = 0{,}8 - 0{,}3 \cdot e^{-0{,}5t}$ (t in Jahren, f(t) in Meter)

Wenn die Anfangskörpergröße um 50% zunimmt, beträgt sie $0{,}5 \cdot 1{,}5 = 0{,}75\,m$

Bedingung: $f(t) = 0{,}75$

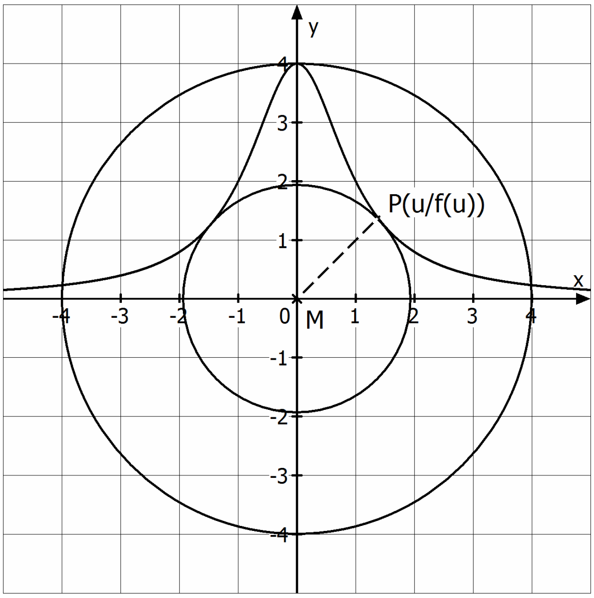




Mit dem GTR ergibt sich t = 3,6.
Ca. 3,6 Jahren nach Beobachtungsbeginn hat die Körpergröße um 50% zugenommen.

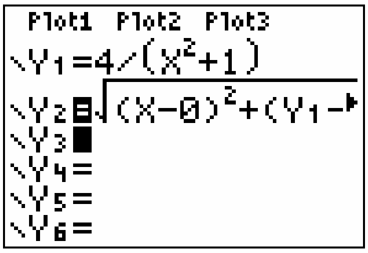
Aufgabe A 2.2

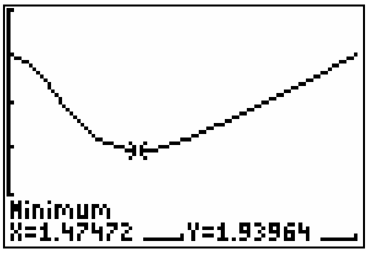
a) Im ersten Schritt muss der Radius des Kreises berechnet werden, der das Schaubild von f an zwei Stellen berührt (innerer Kreis in der Abbildung).



Der Radius entspricht dem kleinsten Abstand des Schaubildes von f zum Mittelpunkt M(0/0).

$$d(u) = \overline{MP} = \sqrt{(u-0)^2 + (f(u)-0)^2}$$





Der minimale Abstand beträgt $d \approx 1{,}94$.

Der Kreis, der durch den Hochpunkt H(0/4) verläuft, hat mit dem Graphen 3 gemeinsame Punkte (äußerer Kreis in der Abbildung).

Fazit:
Ist der Radius r < 1,94 hat der Kreis mit dem Graphen von f keine gemeinsamen Punkte.
Ist der Radius r = 1,94 gibt es zwei gemeinsame Punkte.
Ist der Radius 1,94 < r < 4 gibt es vier gemeinsame Punkte.
Ist der Radius r = 4 gibt es drei gemeinsame Punkte.
Ist der Radius r > 4 gibt es zwei gemeinsame Punkte.