Abiturprüfung Mathematik 2012 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis I 2

Aufgabe I 2

Gegeben sind die Funktionen f und für jedes t > 0 die Funktionen g_t durch
$f(x) = (\sin(x))^2$ bzw. $g_t(x) = t \cdot \sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$

a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g_1 für $0 \le x \le \pi$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem. Geben Sie die Periode und die Amplitude der Funktion f an.
An welchen Stellen unterscheiden sich die Funktionswerte von f und g_1 im skizzierten Bereich am stärksten?
Wie groß ist dieser Unterschied? (6 VP)

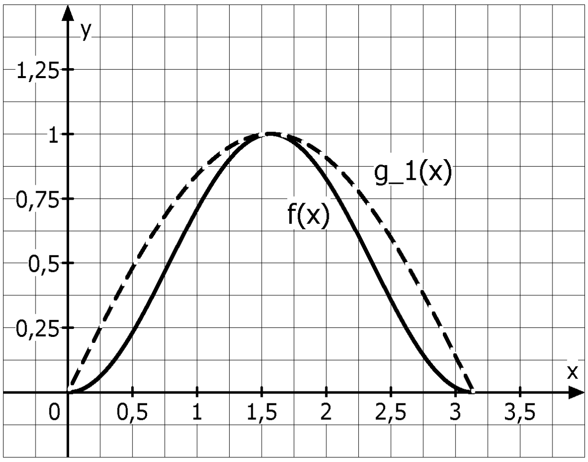
b) Für welchen Wert von t schneiden sich die Graphen von f und g_t im Ursprung unter einem Winkel von 45°?
Der Graph der Funktion f schließt im Bereich $0 \le x \le \pi$ mit der x-Achse eine Fläche ein.
Für welche Werte von t hat die Fläche, die der Graph von g_t im gleichen Bereich mit der x-Achse einschließt, den gleichen Inhalt?
(6 VP)

c) K ist der Graph der Funktion g_1.
Durch Spiegelung von K an der Geraden h: y = 2 entsteht der Graph $\overline{K}$.
Geben Sie eine zu $\overline{K}$ gehörende Gleichung an.
K rotiert um die Gerade h.
Dadurch entsteht im Bereich $0{,}5 \le x \le 5{,}2$ das Modell eines Pokals, dessen Standfläche den Mittelpunkt M(0,5/2) hat.
Der massive Boden des Pokals reicht von der Standfläche bis zur engsten Stelle.
Untersuchen Sie, ob ein Liter Flüssigkeit in den Pokal passt.
(1 LE entspricht 2,5 cm). (6 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2012 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil - Analysis I 2

Aufgabe I 2

Skizze von f(x) und $g_1(x)$



Die Periode von f(x) ist $p = \pi$.

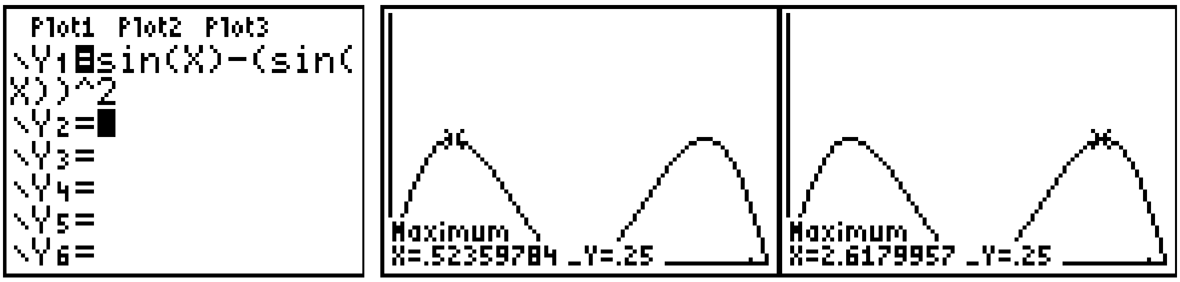
Die Amplitude von f beträgt a = 0,5. Dieser ergibt sich durch $a = \frac{y_{Hochpunkt} - y_{Tiefpunkt}}{2} = \frac{1-0}{2}$.

Der senkrechte Abstand zwischen f(x) und $g_1(x)$ beträgt

$d(x) = g_1(x) - f(x) = \sin(x) - (\sin(x))^2$

Gesucht ist das Maximum von d(x).
Notwendige und hinreichende Bedingung für das Maximum: $d'(x) = 0$ und $d''(x) < 0$.

Berechnung des Maximums mit dem GTR:



Die Abweichung ist am stärksten bei x = 0,524 und x = 2,618.
Die größte Unterscheidung beträgt 0,25.

b) Es gilt $f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$ und damit $f'(0) = 0$

Außerdem gilt $g_t'(x) = t \cdot \cos(x)$ und damit $g_t'(0) = t \cdot \cos(0) = t$

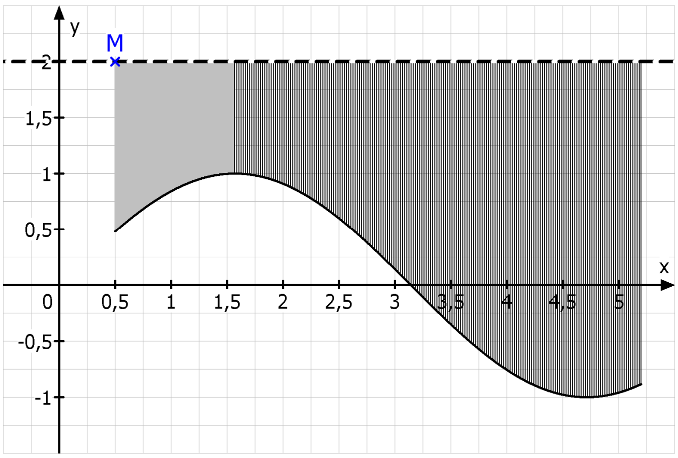
Gesucht ist der Wert von t, so dass die Tangenten der beiden Schaubilder im Ursprung einen Schnittwinkel von 45° besitzen.
Da das Schaubild von f(x) eine waagrechte Tangente im Ursprung besitzt, muss die Steigung der Tangente an $g_t(x)$ gleich 1 sein ($m = \tan 45° = 1$).

Somit muss gelten $g_t'(0) = 1 \Rightarrow t = 1$

Fläche zwischen f(x) und der x-Achse: $A = \int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{\pi}{2}$ (GTR)

Nun soll gelten: $\int_0^{\pi} t \cdot \sin(x)dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left[-t \cdot \cos(x)\right]_0^{\pi} = -t \cdot (-1) + t = 2t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

c) Zunächst wird das Schaubild K um 2 Einheiten nach unten verschoben.
Dies ergibt $y = \sin(x) - 2$
Anschließend wird dieses Schaubild an der x-Achse gespiegelt.
Dies ergibt $y = -\sin(x) + 2$
Zuletzt wird dieses Schaubild wieder um 2 Einheiten nach oben verschoben.
Dies ergibt $y = -\sin(x) + 4$ und dies ist die Gleichung zum Schaubild $\overline{K}$



Die engste Stelle des Pokals ist dort, wo das Schaubild K seinen Hochpunkt besitzt.
Dies ist bei $x = \frac{\pi}{2}$ der Fall.

Gesucht ist das Volumen des Rotationskörpers im Intervall $x = \frac{\pi}{2}$ bis x = 5,2.

Von x = 0,5 bis zur engsten Stelle bei $x = \frac{\pi}{2}$ befindet sich der massive Boden des Pokals.
Um das Rotationsvolumen zu berechnen, muss das Schaubild K um 2 Einheiten nach unten verschoben werden und anschließend das neue Schaubild um die x-Achse rotiert werden.

Die neue Funktion lautet $y = \sin(x) - 2$.

Rotationsvolumen = $\pi \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{5,2} (\sin(x) - 2)^2 dx = 57,844$

Da 1 LE 2,5 cm entspricht, ist die Umrechnungszahl für das Volumen $2,5^3$.
Somit gilt $V = 57,844 \cdot 2,5^3 \text{cm}^3 = 903,8 \text{ cm}^3$ = 0,9038 Liter < 1 Liter.
Daher passt nicht 1 Liter Flüssigkeit in den Pokal.