Hauptprüfung Abiturprüfung 2016 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Wahlteil Analytische Geometrie / Stochastik 1

Hilfsmittel: GTR und Formelsammlung

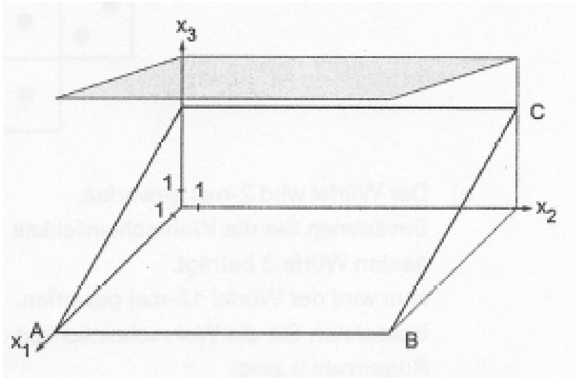
allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

April 2016

Aufgabe B 1.1:
In einem Koordinatensystem beschreiben die Punkte A(15/0/0), B(15/20/0) und C(0/20/6) Eckpunkte der rechteckigen Nutzfläche einer Tribüne (alle Koordinatenangaben in Meter).
Die x_1x_2 - Ebene stellt den Erdboden dar.
Die Eckpunkte der Dachflächen liegen vertikal über den Eckpunkten der Nutzfläche. Die Dachfläche liegt in der durch E: $x_1 - 3x_3 = -27$ beschriebenen Ebene (siehe Abbildung).



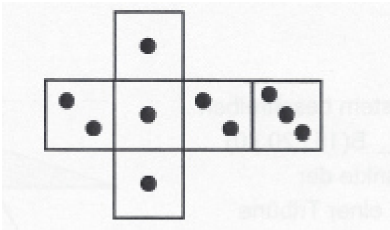
a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Nutzfläche liegt.
Berechnen Sie den Neigungswinkel der Nutzfläche gegen den Erdboden.
Ermitteln Sie den Inhalt der Nutzfläche.

(4 VP)

b) Aus Sicherheitsgründen muss die senkrecht zum Erdboden verlaufende Rückwand zwischen der Nutzfläche und der Dachfläche mindestens 2,5 m hoch sein.
Überprüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.
Zur Installation von Lautsprechern wird eine 5,2 m lange, senkrecht zum Erdboden verlaufende Stütze montiert. Ihre Enden werden an der Kante BC und am Dach der Tribüne fixiert. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes auf der Kante BC, in dem das untere Ende der Stütze fixiert wird.

(4 VP)

Aufgabe B 1.2
Bei einem Spiel wird ein idealer Würfel verwendet, dessen Netz in der Abbildung dargestellt ist:



a) Der Würfel wird zweimal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme der beiden Würfe 3 beträgt.
Nun wird der Würfel 12-mal geworfen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er mindestens 4-mal die Augenzahl 2 zeigt.
Die Beschriftung des Würfels soll so geändert werden, dass man bei 12-maligem Werfen des Würfels mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit mindestens 4-mal die Augenzahl 3 erhält.
Auf wie vielen Seiten des Würfels muss dann die Augenzahl 3 mindestens stehen ?
(4 VP)

b) Ein Spieler hat die Vermutung, dass der ursprüngliche Würfel zu oft die Augenzahl 3 zeigt. Die Nullhypothese
H_0: "Die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 3 beträgt höchstens $\frac{1}{6}$."
soll durch eine Stichprobe mit 100 Würfen auf einem Signifikanzniveau von 1% getestet werden.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel in Worten.
(3 VP)

Lösungen

Aufgabe B 1.1:

a) Koordinatengleichung der Nutzflächenebene N:

Parametergleichung der Ebene durch die Punkte A, B, C:

N: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von N: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix}$

Vereinfachung des Normalenvektors zu $\overrightarrow{n^*} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Koordinatengleichung von N: $2x_1 + 5x_3 = d$
Einsetzen von A(15/0/0) ergibt sich d = 30.

Koordinatengleichung von N: $2x_1 + 5x_3 = 30$

Winkel zwischen Nutzfläche und Erdboden.

Die $x_1 - x_2$-Ebene besitzt den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für den Winkel gilt: $\cos\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$. Damit ist $\alpha \approx 21{,}8^\circ$

Inhalt der Nutzfläche:
Da es sich laut Aufgabenstellung um ein Rechteck handelt, gilt

$$A_{\text{Nutzfläche}} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 20 \cdot \left| \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 20 \cdot \sqrt{225 + 36} = 20 \cdot \sqrt{261} \approx 323{,}1 \text{ m}^2$$

b) Die Dachflächenebene E ist parallel zur x_2-Achse (da in der Koordinatengleichung die Variable x_2 fehlt) und sie schneidet die x_3-Achse im Punkt D(0/0/9).
Die Dachflächenkante verläuft daher genau 9 m oberhalb der x_2-Achse.

Da der Punkt C der Nutzfläche die x_3-Koordinate 6 besitzt und auch die Nutzfläche parallel zur x_2-Achse liegt, verläuft die Nutzfläche daher genau 6 m oberhalb der x_2-Achse.
Die Höhe der Rückwand beträgt daher 9 m - 6 m = 3 m und die Sicherheitsbedingung ist erfüllt.

Um den gesuchten Punkt P zu berechnen, wird eine zur Ebene E parallele Ebene F aufgestellt werden, wobei F gegenüber E 5,2 m **senkrecht zum Erdboden** nach unten verschoben ist.

Ansatz für die Koordinatengleichung von F: $x_1 - 3x_3 = d$
Nun benötigt man noch einen Punkt von F.
Diesen erhält man, wenn man den rechten hinteren Eckpunkt D(0/20/9) der Dachfläche um 5,2 m nach unten verschiebt. Man erhält den Punkt P(0/20/3,8).

Einsetzen von P in die Koordinatengleichung: $0 - 3 \cdot 3{,}8 = d \Rightarrow d = -11{,}4$
Koordinatengleichung von F: $x_1 - 3x_3 = -11{,}4$

Die Gerade durch die Punkte B und C besitzt die Gleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt von F mit g: $15 - 15t - 3 \cdot (6t) = -11{,}4 \Rightarrow -33t = -26{,}4 \Rightarrow t = 0{,}8$

Einsetzen von t = 0,8 in g ergibt den Schnittpunkt $Q(3 / 20 / 4{,}8)$.
In diesem Punkt wird das untere Ende der Stütze fixiert.

Aufgabe B 1.2:

P(Augensumme 3) = P(1 und 2) + P(2 und 1) $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$

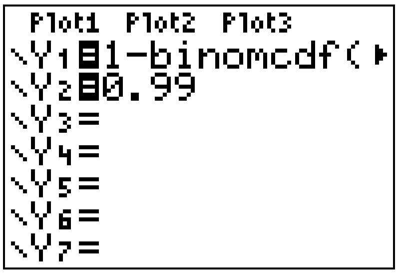
Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Würfe, bei denen die Augenzahl 2 fällt.
X ist binomialverteilt mit n = 12 und $p = \frac{1}{3}$.

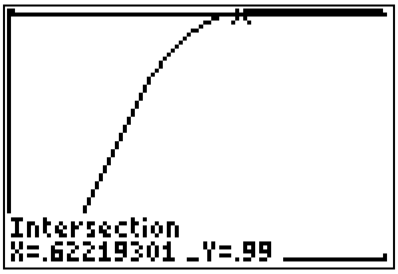
Es gilt $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 0{,}607$ (GTR).

Die Zufallsvariable Y sei die Anzahl der Würfe, bei denen die Augenzahl 3 fällt.
Y ist binomialverteilt mit n = 12 und unbekanntem p.

Es soll gelten: $P(Y \geq 4) \geq 0{,}99$ bzw. $1 - P(Y \leq 3) \geq 0{,}99$

Lösung mit dem GTR:





Es muss $p \geq 0{,}62$ gelten.

Damit müssen mindestens 4 Seiten des Würfels die Augenzahl "3" besitzen, denn dann wäre $p = \frac{4}{6} = 0{,}\overline{6} \geq 0{,}62$

b) Die Zufallsvariable X sei die Anzahl, wie oft bei 100 Würfen bei Augenzahl 3 fällt.
Es gilt $H_0 : p \leq \frac{1}{6}$ und $H_1 : p > \frac{1}{6}$

X ist im Extremfall binomialverteilt mit n = 100 und $p = \frac{1}{6}$.
Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test.
Der Ablehnungsbereich ist $\overline{A} = \{k+1,...,100\}$.

Bedingung: $1 - P(X \leq k) \leq 0{,}01$

Mit GTR folgt: $1 - P(X \leq 26) = 0{,}006$

Somit ist k = 26 und der Ablehnungsbereich ist $\overline{A} = \{27,...,100\}$

Wenn die Augenzahl mindestens 27 mal fällt, wird die Nullhypothese verworfen, andernfalls wird sie nicht verworfen.