Abiturprüfung Mathematik 2009 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis I 1

Aufgabe I 1.1:

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = 6 - \frac{100}{\left(x^2 - 16\right)^2}$.

a) Geben Sie sämtliche Asymptoten des Schaubilds von f an.
Geben Sie die Nullstellen von f an.
Skizzieren Sie das Schaubild von f samt Asymptoten für $-7 \leq x \leq 7$.
Weisen Sie nach, dass f genau eine Extremstelle besitzt. (6 VP)

Das Schaubild von f, die x-Achse und die Gerade y = 7 begrenzen im Bereich $-7 \leq x \leq 7$ eine Fläche. Diese Fläche stellt die Seitenansicht einer 14 m langen, 7 m hohen und 10 m breiten Steinbrücke dar.

b) Wie viele Kubikmeter Stein wurden für die Brücke verbaut ? (4 VP)

c) Unter dem Brückenbogen fährt mittig ein Zug hindurch. Sein Querschnitt kann als Rechteck der Breite 3 m und der Höhe 4 m angesehen werden. Wie nah kommt der Zug der gewölbten Wandfläche ? (4 VP)

Aufgabe I 1.2:

Hinweis: ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die Gültigkeit der folgenden Gleichung für alle $n \geq 1$:

$$5^0 + 5^1 + 5^2 + ... + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$

(4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2009 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil - Analysis I 1

Aufgabe I 1.1:

a) Senkrechte Asymptoten:

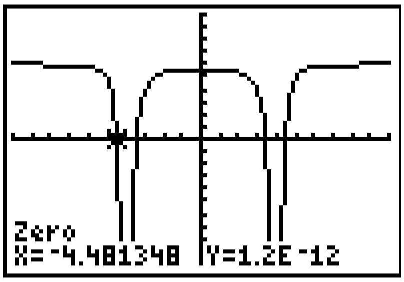
Die Funktion besitzt an den Stellen x = 4 und x = -4 Definitionslücken.
An diesen Stellen besitzt das Schaubild von f senkrechte Asymptoten.
Die Gleichung der senkrechten Asymptoten lauten x = 4 und x = -4.

Waagrechte/Schiefe Asymptoten:

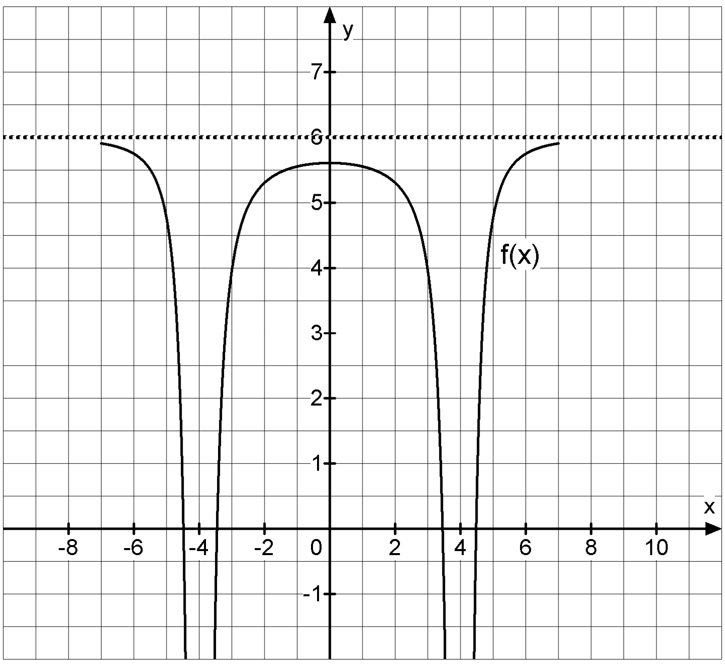
Für $x \to \pm\infty$ gilt $\frac{100}{(x^2-16)^2} \to 0$ (da Nennergrad > Zählergrad)

Folglich gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 6$
Damit ist y = 6 die waagrechte Asymptote.

Nullstellen:



Mit dem GTR ergibt sich: $x_1 = -4{,}48$; $x_2 = -3{,}45$; $x_3 = 3{,}45$; $x_4 = 4{,}48$



Extremstelle:

Mit $f(x) = 6 - 100 \cdot \left(x^2 - 16\right)^{-2}$ folgt

Es gilt $f'(x) = 200 \cdot \left(x^2 - 16\right)^{-3} \cdot 2x = \dfrac{400x}{\left(x^2 - 16\right)^3}$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{400x}{\left(x^2 - 16\right)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

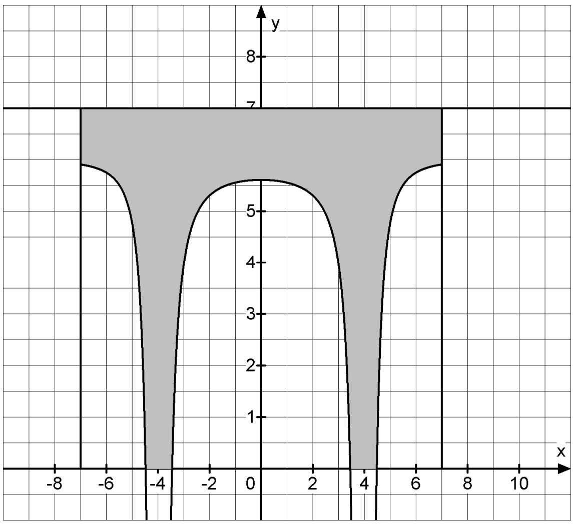
Die hinreichende Bedingung wird mit Hilfe des Vorzeichenwechsels geprüft:

$f'(0^-) > 0$ (links von x = 0 ist die Steigung positiv)

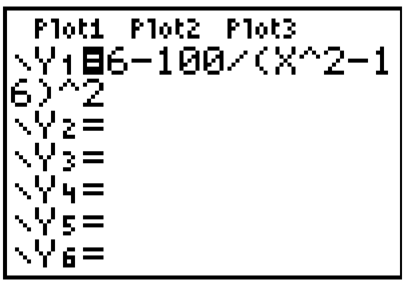
$f'(0^+) < 0$ (rechts von x = 0 ist die Steigung negativ)

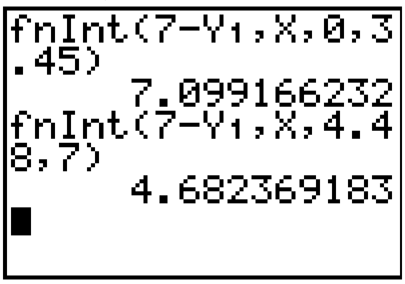
An der Stelle x = 0 findet ein Vorzeichenwechsel von + nach - statt. Somit existiert bei x = 0 ein Extrempunkt, genauer gesagt ein Hochpunkt.

b) Das Volumen der Brücke wird berechnet durch $V = \text{Seitenfläche} \cdot \text{Breite}$



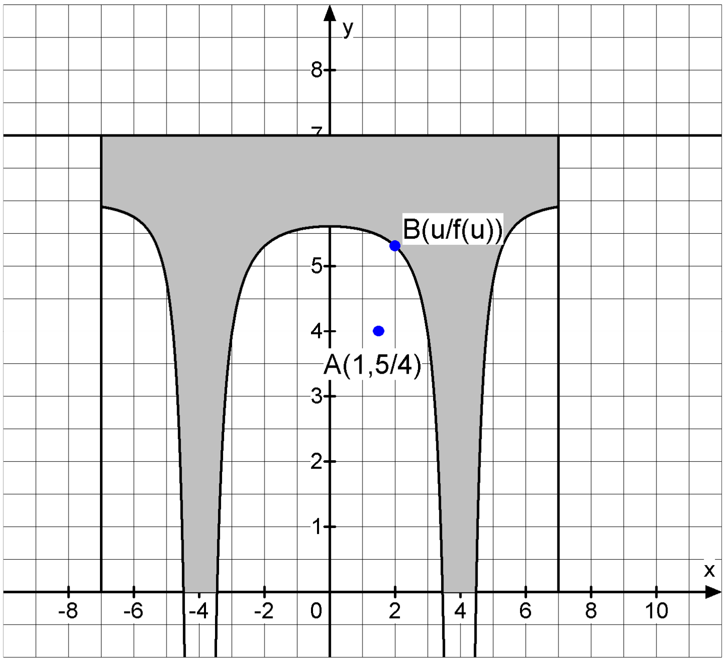
Berechnung der grauen Fläche: $A = 2 \cdot \left(\int_0^{3,45} (7 - f(x))dx + A_{\text{Rechteck}} + \int_{4,48}^{7} (7 - f(x))dx \right)$





$A = 2 \cdot \left(7{,}099 + 7 \cdot (4{,}48 - 3{,}45) + 4{,}682\right) = 37{,}982$

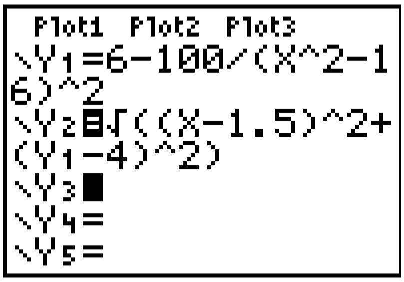
Volumen der Brücke: $V = A \cdot 10 \approx 380$ m³ c)

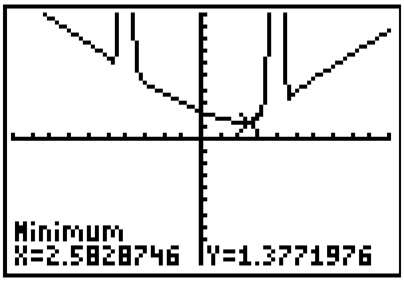


Man kann davon ausgehen, dass der Zug symmetrisch zur y-Achse und damit symmetrisch unter der Brücke durchfährt.
Der kürzesten Entfernung zwischen dem Zug und der Wandfläche entspricht dem kürzesten Abstand zwischen dem Eckpunkt A(1,5/4) des Zuges und dem Punkt B(u/f(u)) auf dem Schaubild von f.

Der Abstand d von A nach B berechnet sich durch $d = \sqrt{(u-1{,}5)^2 + (f(u)-4)^2}$

Mit Hilfe des GTR wird nun ermittelt, welchen Minimalwert d annehmen kann:





Der Wert von d wird minimal für u = 2,58 und es gilt $d_{min} = 1{,}38\text{ m}$

Der minimale Abstand beträgt 1,38 m.

Aufgabe I 1.2:

1.) **Induktionsanfang:**
Zeige, dass die Aussage für das kleinste n (hier n = 1) gültig ist:

$5^0 + 5^1 = \frac{5^2 - 1}{4}$ ist wahr, der Induktionsanfang ist also bewiesen.

2.) **Induktionsschritt:**

a) **Formulierung der Induktionsvoraussetzung:**

Es gibt eine natürliche Zahl n, für die die Aussage $\boxed{5^0 + 5^1 + 5^2 + ... + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}}$ gültig ist.

b) **Formulierung der Induktionsbehauptung:**

Die Aussage ist gültig für n+1, das heißt es gilt $5^0 + 5^1 + 5^2 + ... + 5^{n+1} = \frac{5^{n+2} - 1}{4}$

c) **Beweis des Induktionsschrittes:**

$$\underbrace{5^0 + 5^1 + 5^2 + ... + 5^n}_{= \frac{5^{n+1} - 1}{4}} + 5^{n+1} = \frac{5^{n+2} - 1}{4}$$

(gemäß Induktionsvoraussetzung)

Es ist noch zu zeigen: $\frac{5^{n+1} - 1}{4} + 5^{n+1} = \frac{5^{n+2} - 1}{4}$

$$\frac{5^{n+1} - 1}{4} + 5^{n+1} = \frac{5^{n+1} - 1 + 4 \cdot 5^{n+1}}{4} = \frac{5 \cdot 5^{n+1} - 1}{4} = \frac{5^{n+2} - 1}{4}$$

Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen bewiesen.