Abiturprüfung Mathematik 2006 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Aufgaben Analysis I 2

Aufgabe I 2.1

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) \quad \text{für } 0 \le x \le 12$$

Ihr Schaubild sei K.

a) Skizzieren Sie K.
Geben Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte von K mit der Geraden y = mx in Abhängigkeit von m an.

(4 VP)

b) Bestimmen Sie die Seitenlängen des flächengrößten Rechtecks, bei dem zwei Ecken auf der x-Achse und die beiden anderen Ecken auf K liegen.

(5 VP)

Aufgabe I 2.2

Für jedes a > 0 ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{1}{a}\sin(ax) \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

a) Wie wirkt sich eine Veränderung des Parameters a auf das Schaubild von f_a aus ?
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von f_a mit der x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen einschließt.

(4 VP)

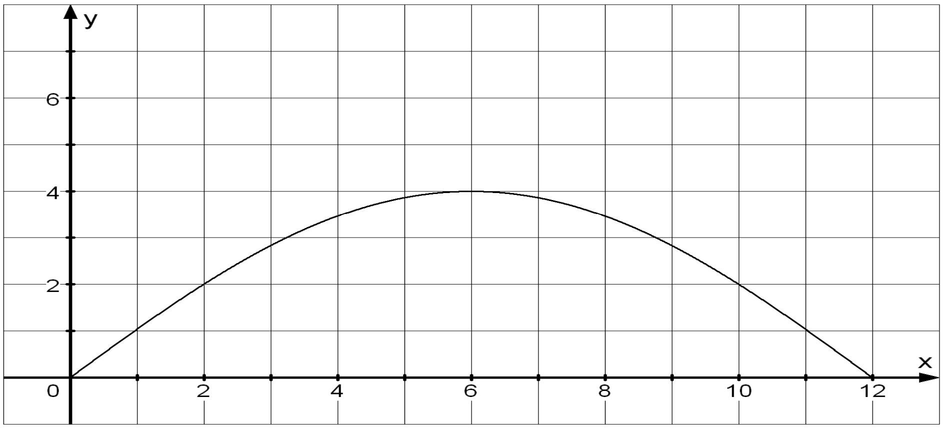
b) Das Schaubild von $f_{0,5}$ schließt im Bereich $0 \le x \le 2\pi$ mit der x-Achse eine Fläche ein.
Eine Parallele zur x-Achse durch den Kurvenpunkt $P(z / f_{0,5}(z))$ halbiert diese Fläche.
Bestimmen Sie z.

(5 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2006 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösung Wahlteil – Aufgaben Analysis I 2

Aufgabe I 2.1

a) Skizze von K:



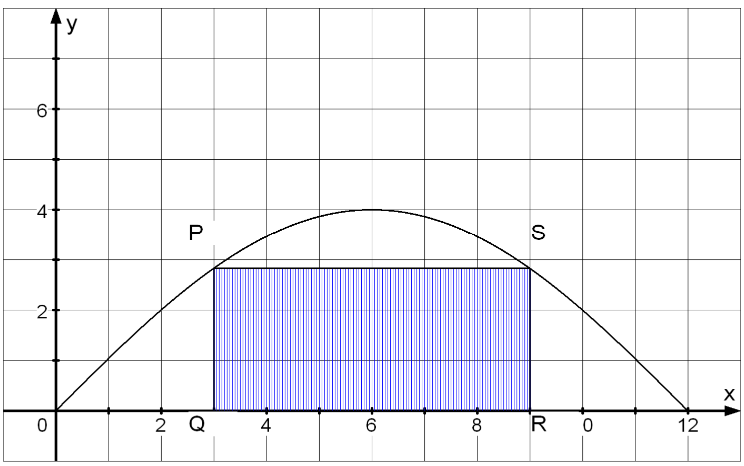
Die Gerade y = mx enthält immer den Ursprung O(0/0), also gibt es immer mindestens einen gemeinsamen Punkt mit K.

Es gibt einen weiteren gemeinsamen Punkt, wenn die Steigung der Geraden $m_{ger.} \geq 0$ ist, aber kleiner als die Steigung der Tangente im Ursprung.

Tangentensteigung im Ursprung: $f'(x) = 4 \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)$ mit $f'(0) = \frac{\pi}{3}$

Also ergeben sich zwei gemeinsame Punkte für $0 \leq m < \frac{\pi}{3}$ und ein gemeinsamer Punkt für $m < 0$ oder $m \geq \frac{\pi}{3}$.

b)



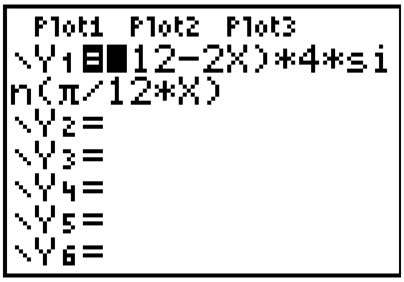
Zur Ermittlung des flächengrößten Rechtecks müssen zunächst die Koordinaten der Eckpunkte des Rechtecks festgelegt werden.

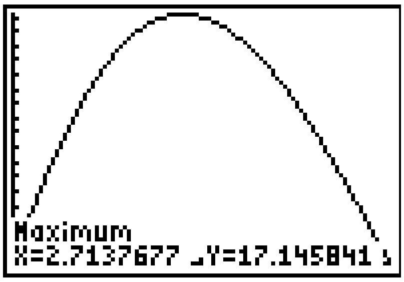
P(u/f(u)), Q(u/0), R(12-u/0), S(12-u/f(u))

Die Zielfunktion wird nun mit Hilfe der Flächeninhaltsfunktion des Rechtecks aufgestellt:

$A(u) = \overline{QR} \cdot \overline{RS} = (12-u-u) \cdot (f(u)-0) = (12-2u) \cdot 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}u\right)$ für $0 \le u \le 6$

Das Maximum des Rechtecks wird nun mithilfe des GTR ermittelt:



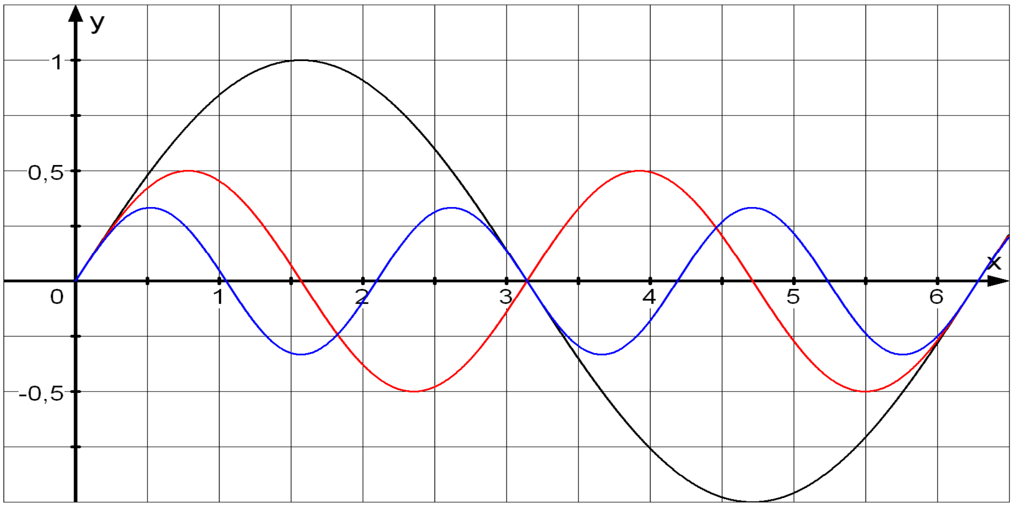


Die Zielfunktion wird maximal für u = 2,71 und der maximale Flächeninhalt des Rechtecks beträgt 17,15 Flächeneinheiten.

Seitenlängen: $\overline{QR} = 12 - 2 \cdot 2{,}71 = 6{,}58$ LE und $\overline{RS} = f(2{,}71) = 2{,}61$ LE.

Aufgabe I 2.2

a) Schaubilder für a = 1 (schwarz), a = 2 (rot) und a = 3 (blau).



Mit größer werdendem Parameter a sinkt die Amplitude (d.h. Stauchung in Richtung der y-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{a}$), mit kleiner werdendem a wird die Amplitude größer.

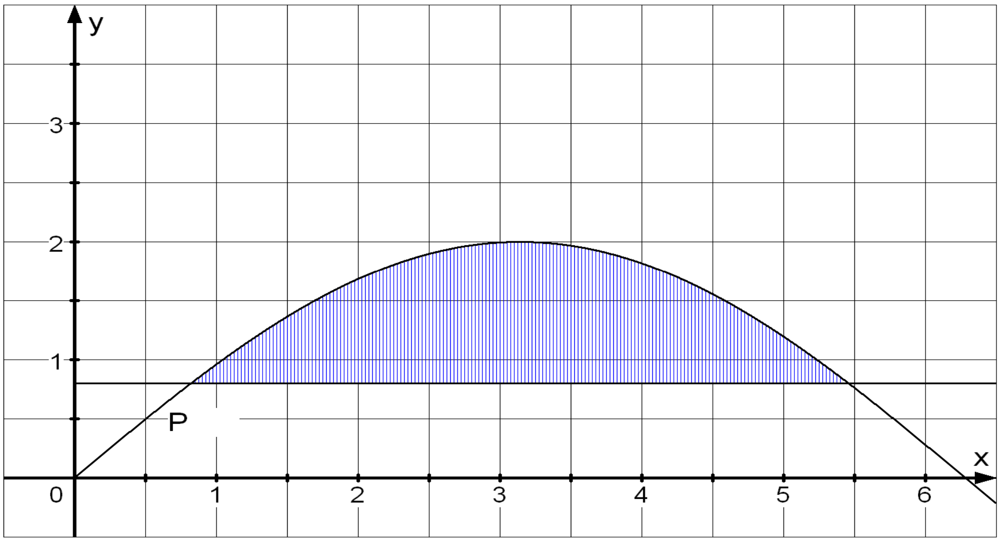
Die Periode des Schaubildes ist $p = \frac{2\pi}{a}$, d.h. mit größer werdendem a wird die Periode immer kleiner und mit kleiner werdendem a wird die Periode größer.

Nullstellen von f_a: $\frac{1}{a}\sin(ax) = 0 \Leftrightarrow ax = k \cdot \pi \Leftrightarrow x = \frac{k \cdot \pi}{a}$ mit ganzzahligem k.

Da die Flächen zwischen den einzelnen Nullstellen aufgrund der Symmetrie immer gleich groß sind, können als zwei konkrete benachbarte Nullstelle z.B. x = 0 (für k = 0) und $x = \frac{\pi}{a}$ (für k = 1) gewählt werden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} f_a(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{a}\sin(ax)\right)dx = \left[-\frac{1}{a^2}\cos(ax)\right]_0^{\frac{\pi}{a}} = -\frac{1}{a^2}\cos(\pi) - (-\frac{1}{a^2}\cos(0)) = \frac{2}{a^2}$$

b)



Für die gesamte Fläche zwischen dem Schaubild von $f_{0,5}$ und der x-Achse gilt:

$$\int_0^{2\pi} 2\sin(0{,}5x)dx = [-4\cos(0{,}5x)]_0^{2\pi} = 8 \text{ Flächeneinheiten.}$$

Die Gerade parallel zur x-Achse geht durch den Punkt $P(z/f_{0,5}(z))$, die Gerade besitzt somit die Gleichung $y = f_{0,5}(z)$.

Es muss also gelten: $\int_z^{2\pi - z} (2\sin(0{,}5x) - f_{0,5}(z))dx = [-4\cos(0{,}5x) - f_{0,5}(z) \cdot x]_z^{2\pi - z}$

$= -4\cos(\pi - 0{,}5z) - 2\sin(0{,}5z)\cdot(2\pi - z) + 4\cos(0{,}5z) + 2\sin(0{,}5z)\cdot z = 4$

Mit Hilfe des GTR kann die Gleichung gelöst werden.
Es ergibt sich z = 0,7366.