Hauptprüfung Abiturprüfung 2015 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Wahlteil Analytische Geometrie / Stochastik 2

Hilfsmittel: GTR und Formelsammlung

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

März 2015

Aufgabe B 2.1:

Gegeben sind die Ebene E: $3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 16$ und eine Geradenschar durch

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ; } a \in \mathbb{R}$$

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g_4 mit der Ebene E.
Welche Gerade der Schar ist orthogonal zu g_4 ?

(3 VP)

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel von g_4 und E.
Für welche Werte von a mit $-10 \le a \le 10$ hat der Schnittwinkel von g_a und E die Weite 10° ?

(3 VP)

c) Begründen Sie, dass alle Geraden g_a in der Ebene F: $x_3 = 1$ liegen.
Es gibt eine Gerade h, die durch den Punkt P(5/1/1) geht und in F liegt, aber nicht zur Schar gehört.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.

(3 VP)

Aufgabe B 2.2

Bei einem Biathlonwettbewerb läuft ein Athlet eine 2,5 km lange Runde, dann schießt er liegend fünf Mal; anschließend läuft er eine zweite Runde und schießt stehend fünf Mal; nach einer dritten Runde erreicht er das Ziel. Für jeden Fehlschuss muss er direkt nach dem Schießen eine 200 m lange Strafrunde laufen. Aufgrund der bisherigen Schießleistungen geht der Trainer davon aus, dass der Athlet stehend mit 88% und liegend mit 93% Wahrscheinlichkeit trifft. Es wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Ergebnisse der einzelnen Schüsse voneinander unabhängig sind.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Athlet stehend bei fünf Schüssen genau vier Mal trifft.

(1 VP)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet im gesamten Wettbewerb höchstens einmal eine Strafrunde laufen muss.

(3 VP)

c) Der Athlet möchte seine Leistungen im Stehendschießen verbessern und künftig mit über 95% Wahrscheinlichkeit bei fünf Schüssen mindestens vier Mal treffen.
Welche Trefferwahrscheinlichkeit muss er dafür mindestens erreichen ?

(2 VP)

Lösungen

Aufgabe B 2.1:

a) Gleichung der Geraden $g_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt der Gerade mit der Ebene:
$3 \cdot (5+4t) + 6 \cdot (1+t) + 4 \cdot (1) = 16 \quad \Rightarrow 15 + 12t + 6 + 6t + 4 = 16 \Rightarrow 18t = -9 \Rightarrow t = -0,5$

Einsetzen von t = -0,5 in die Geradengleichung ergibt Schnittpunkt S(3/0,5/1).

Die Geraden sind orthogonal, wenn gilt: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4a + 1 = 0 \Rightarrow a = -0,25$.

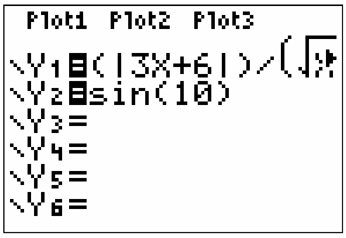
Die Gerade $g_{-0,25}$ ist orthogonal zur Gerade g_4.

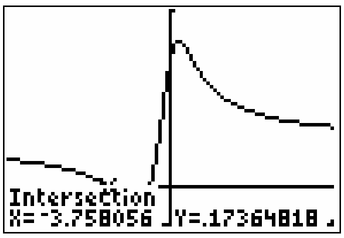
b) Schnittwinkel von g_4 und E:

$$\sin\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{16+1} \cdot \sqrt{9+36+16}} = \frac{18}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{61}} \text{ ; daraus folgt } \alpha \approx 34°$$

Schnittwinkel der Weite 10°: $\sin\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{9+36+16}} = \frac{|3a+6|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}}$

Mit dem GTR ist folgende Gleichung zu lösen: $\sin(10°) = \frac{|3a+6|}{\sqrt{a^2+1} \cdot \sqrt{61}}$





Mit dem GTR ergibt sich $a_1 \approx -3,76$ und $a_2 \approx -1,27$

c) Ein allgemeiner Punkt auf der Schargeraden lautet $P_a(5+t\cdot a\,/\,1+t\,/\,1)$.
Da jeder Punkt die x_3-Koordinate 1 besitzt, liegen alle Schargeraden in der Ebene F.

Alle Geraden, die in der Ebene F liegen und durch P(5/1/1) gehen, haben die Bauart

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Gerade h gehört nicht zur Schar, wenn der Richtungsvektor von h kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Dies ist der Fall für $v_2 = 0$.

Eine mögliche Geradengleichung lautet $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe B 2.2:

a) Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Treffer des stehenden Athleten.
X ist binomialverteilt mit n = 5 und p = 0,88.
P(genau vier Treffer) = $P(X=4) \approx 0{,}3598$

b) Der Athlet muss in folgenden Fällen höchstens eine Strafrunde laufen:

A: Der Athlet trifft immer.
B: Der Athlet trifft liegend genau viermal und stehend immer.
C: Der Athlet trifft stehend genau viermal und liegend immer.

$P(A) = 0{,}88^5 \cdot 0{,}93^5 \approx 0{,}367$

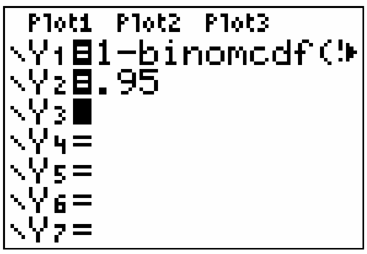
$P(B) = 5\cdot 0{,}93^4 \cdot 0{,}07 \cdot 0{,}88^5 \approx 0{,}138$

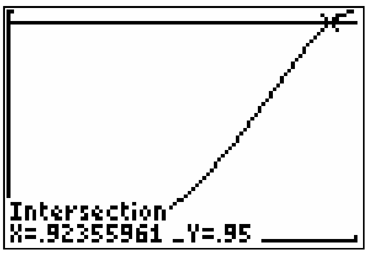
$P(C) = 5\cdot 0{,}88^4 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}93^5 \approx 0{,}25$

P(höchstens eine Strafrunde) = 0,367 + 0,138 + 0,25 = 0,755

c) Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Treffer des stehenden Athleten mit n = 5 und unbekanntem p.
Bedingung: $P(X \geq 4) > 0{,}95 \quad \Rightarrow 1 - P(X \leq 3) > 0{,}95$

Lösung mit dem GTR:





Der Athlet muss eine Trefferwahrscheinlichkeit von mindestens 92,4% erreichen.