Abiturprüfung Mathematik 2013 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis A 1

Aufgabe A 1.1

Der Querschnitt eines 50 Meter langen Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit

$f(x) = 0{,}02x^4 - 0{,}82x^2 + 8$; $-4 \le x \le 4$ (x und f(x) in Meter).

a) An welchen Stellen verlaufen die Wände des Stollens am steilsten ?
Welchen Winkel schließen die Wände an diesen Stellen mit der Horizontalen ein ?
Nach einem Wassereinbruch steht das Wasser im Stollen 1,7 m hoch.
Wie viel Wasser befindet sich in dem Stollen ?

(6 VP)

b) Im Stollen soll in 6 m Höhe eine Lampe aufgehängt werden.
Aus Sicherheitsgründen muss die Lampe mindestens 1,4 m von den Wänden entfernt sein.
Überprüfen Sie, ob dieser Abstand eingehalten werden kann.

(3 VP)

c) Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht.
Wie breit darf der Behälter höchstens sein ?

(3 VP)

Aufgabe A 1.2

Für jedes $t \neq 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = (x-1)\cdot(1-\frac{1}{t}\cdot e^x)$.

Für welche Werte von t besitzt f_t mehr als eine Nullstelle ?

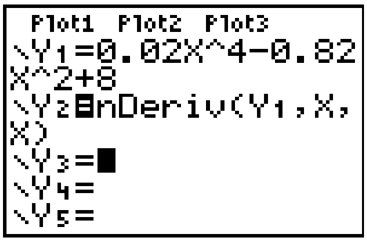
(3 VP)

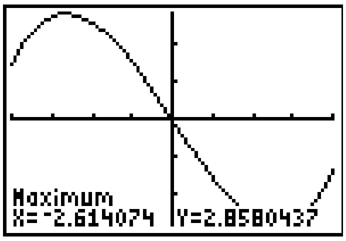
Abiturprüfung Mathematik 2013 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil - Analysis A 1

Aufgabe A 1.1

a) Die Wände sind am steilsten in den Wendepunkten des Schaubildes von f(x) (bzw. an den Extrempunkten der Ableitungsfunktion $f'(x)$)

Lösung mit dem GTR:





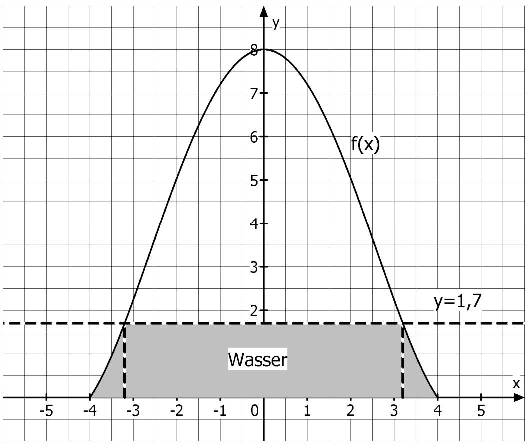
Die Ableitungsfunktion (rechtes GTR-Bild) besitzt ein Maximum bei $x \approx -2{,}614$ und ein Minimum bei $x \approx 2{,}614$.
Die Wände des Stollens sind etwa 2,6 m rechts und links von der Stollenmitte am steilsten.

Der Winkel, den die Wände an dieser Stelle mit der Horizontalen einschließen entspricht dem Winkel der Tangenten an diesen Stellen mit der Horizonalen (x-Achse).
Dieser Winkel wird auch Steigungswinkel genannt.

Die Steigung der Tangente bei $x \approx -2{,}614$ beträgt $f'(-2{,}614) \approx 2{,}858$ (siehe Y-Wert beim GTR-Schaubild oben rechts)
Der Steigungswinkel α einer Geraden wird mit der Formel $m = \tan\alpha$ berechnet.
Aus $2{,}858 = \tan\alpha$ folgt $\alpha = 70{,}7°$.

Da das Schaubild von f(x) symmetrisch zur y-Achse ist, beträgt der Winkel an den steilsten Stellen des Stollens auf beiden Seiten jeweils 70,7°.

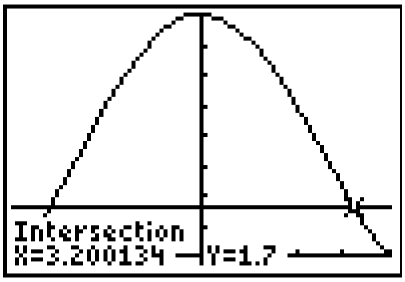
Für die Ermittlung des Wasservolumens wird zunächst eine Skizze erstellt:



Das Volumen des „Wassers in dem 50 m langen Stollen wird ermittlet mit der Formel $V = G \cdot 50m$ (G ist die Grundfläche des grau gefärbten Querschnitts)

Zur Berechnung der Grundfläche müssen zunächst die Schnittstellen des Schaubildes von f(x) mit der Geraden y = 1,7 bestimmt werden.

Lösung mit dem GTR:



Die Schnittstellen betragen $x \approx \pm 3,2$.

Grundfläche G = $2 \cdot \int_{-4}^{-3,2} f(x)dx + A_{Rechteck} = 2 \cdot 0,617 + 6,4 \cdot 1,7 = 12,114$ m²

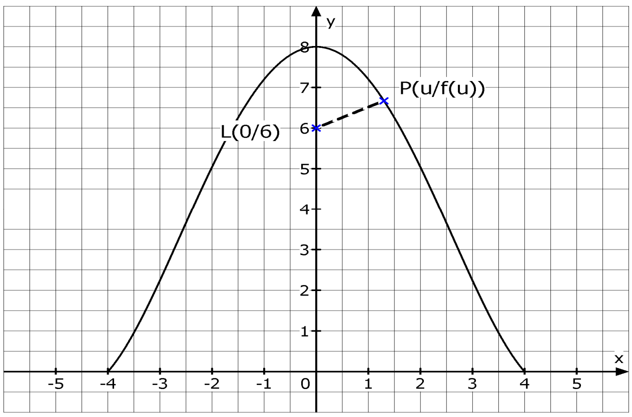
(Das Integral wurde mit dem GTR berechnet)

$V_{Wasser} = 12,114 \cdot 50 = 605,7 m^3$

Im Stollen befinden sich ca. 606 m³ Wasser.

b) Damit die Lampe von den Wänden einen mögilchst großen Abstand besitzt, muss die Lampe symmetrisch zu den Wänden aufgehängt werden.
Das heißt der Lampenpunkt besitzt die Koordinaten L(0/6).

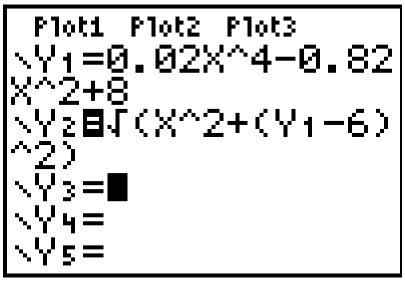
Gesucht ist nun der minimale Abstand zwischen Schaubild von f(x) und dem Punkt L.

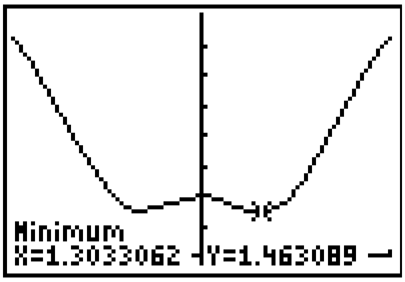


Ein allgemeiner Punkt des Schaubildes von f(x) besitzt die Koordinaten P(u/f(u)).

Der allgemeine Abstand zwischen L und P beträgt
$d(u) = \sqrt{(x_P - x_L)^2 + (y_P - y_L)^2} = \sqrt{(u-0)^2 + (f(u)-6)^2}$

Das Minimum von d(u) entspricht dem minimalen Abstand von L zum Stollen.

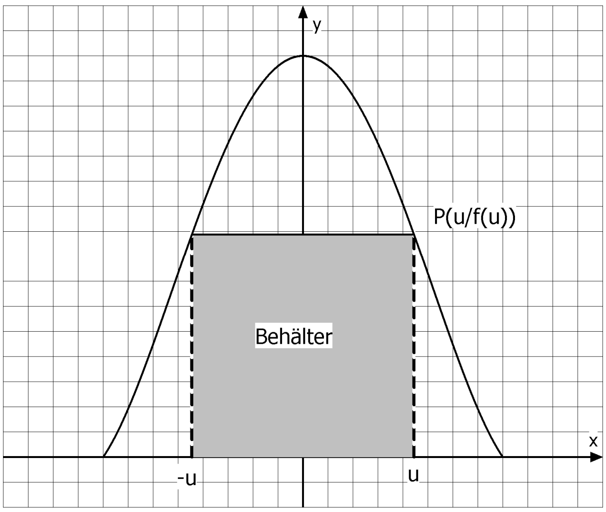




Das Schaubild von d(u) wird minimal für $u \approx 1{,}3$ mit $d(1{,}3) \approx 1{,}46$ m.

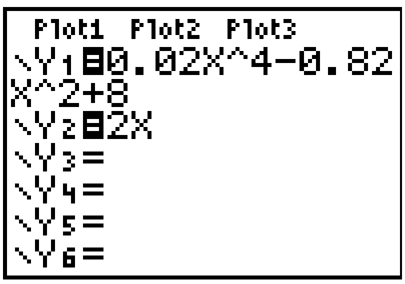
Der minimale Abstand beträgt 1,46 m und damit wird der Mindestabstand von 1,4 m eingehalten.

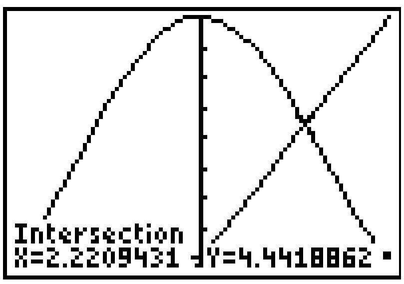
c) Da der Behälter würfelförmig ist, muss in dem betrachteten Querschnitt zwischen dem Schaubild von f(x) und der x-Achse ein Quadrat einbeschrieben werden.
Die Seitenlängen dieses Quadrats entsprechen den maximalen Kantenlängen des würfelförmigen Behälters.



Die Seitenlängen des Quadrats betragen $u-(-u)=2u$ und $f(u)-0=f(u)$.
Damit dies tatsächich ein Quadrat ergibt, muss $2u = f(u)$ gelten.

Lösung mit dem GTR:





Die Lösung lautet $u \approx 2{,}22$.
Damit ist die Seitenlänge des Quadrats $2 \cdot 2{,}22 = 4{,}44$ m lang.
Der Behälter darf höchstens 4,44 m breit sein.

Aufgabe A 1.2

Berechnung der Nullstellen von $f_t(x)$:

$f_t(x) = 0$: $(x-1)\cdot\left(1-\frac{1}{t}\cdot e^x\right) = 0$

Mit dem Satz vom Nullprodukt ergibt sich als eine Lösung $x_1 = 1$ (unabhängig von t).

Mögliche weitere Nullstellen ergeben sich für $1-\frac{1}{t}\cdot e^x = 0 \quad \Rightarrow e^x = t \quad \Rightarrow x_2 = \ln(t)$
Die Lösung x_2 existiert allerdings nur für t > 0.

Nun kann es noch den Sonderfall geben, dass x_2 denselben Wert wie x_1 annehmen kann (und somit gäbe es insgesamt nur eine Nullstelle): $x_2 = x_1 \quad \Rightarrow \quad \ln(t) = 1 \quad \Rightarrow t = e$

Ergebnis: Für alle t > 0 und $t \neq e$ besitzt $f_t(x)$ mehr als eine Nullstelle.