Abiturprüfung Mathematik 2010 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis I 2

Aufgabe I 2:

Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$f(x) = 1 - \cos(\pi \cdot x) \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{10} \cdot (4 - x) \cdot f(x) \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

Ihre Schaubilder sind K_f und K_g.

a) Geben Sie alle Nullstellen der Funktion f an.
Beschreiben Sie, wie man K_f aus dem Schaubild des Kosinusfunktion erhalten kann.
Skizzieren Sie K_g für $0 \le x \le 4$. (5 VP)

Das Schaubild K_g beschreibt im Bereich $0 \le x \le 4$ die Seitenansicht einer Minigolfbahn, die eine Doppelwelle als Hindernis enthält (Längenangaben in Meter).
Gespielt wird von links nach rechts.

b) Wie hoch liegt der höchste Punkt der Bahn ?
An welcher Stelle der Bahn muss der Ball die größte Steigung überwinden ?
Die Minigolfbahn ist 1,25 m breit. Nach einem schweren Regenguss steht das Wasser zwischen den beiden Wellen 5 cm hoch.
Wie viele Liter Wasser haben sich dort gesammelt ? (5 VP)

c) Ein Ball wird so fest geschlagen, dass er bei x = 0,5 tangential von der Bahn abhebt und im Punkt P(7/0) wieder auf dem Boden auftrifft.
Bestimmen Sie die maximale Höhe des Balls auf seiner parabelförmigen Flugbahn.
(4 VP)

d) Das Hindernis der Minigolfbahn soll im gleichen Bereich neu gestaltet werden. Das neue Hindernis soll drei jeweils 40 cm hohe Wellen erhalten. Am Anfang und Ende soll das Hindernis waagrecht und auf der gleichen Höhe wie bisher enden.
Bestimmen Sie einen Term einer Funktion, die den neuen Bahnverlauf beschreibt.
Vergleichen Sie die durchschnittlichen Höhen der beiden Bahnen. (4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2010 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analysis I 2

Aufgabe I 2:

a) Nullstellen von f:

$f(x) = 0 \Rightarrow 1 - \cos(\pi \cdot x) = 0 \Rightarrow \cos(\pi \cdot x) = 1$

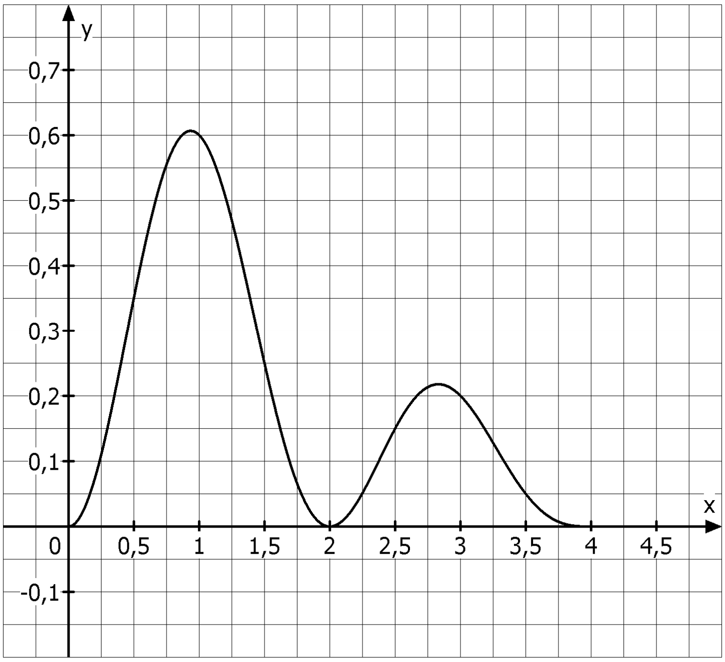
$\Rightarrow \pi \cdot x = 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 2k$ mit $k \in \mathbb{Z}$

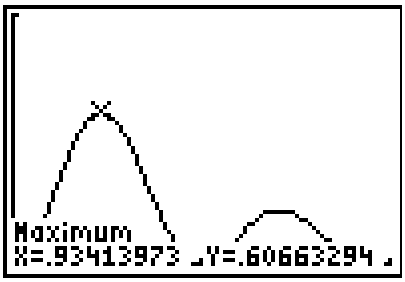
Es gibt unendlich viele Nullstellen mit den Koordinaten N(2k/0) mit $k \in \mathbb{Z}$

Die Funktion f(x) kann man folgendermaßen aus der Kosinusfunktion y = cos(x) erhalten:
1.) Spiegelung an der x-Achse (führt zu y = -cos(x))
2.) Verschiebung um 1 nach oben (führt zu y = -cos(x) + 1 oder y = 1 – cos(x))
3.) Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ in x-Richtung (führt zu $y = 1 - \cos(\pi \cdot x)$)

Skizze von g(x):

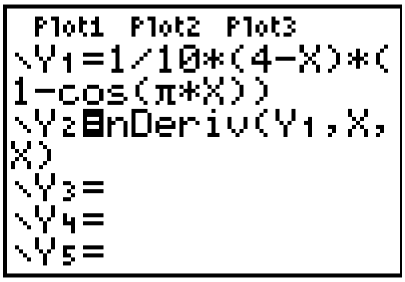


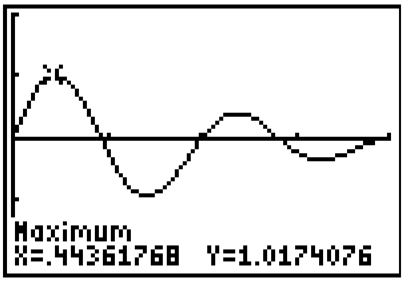
b)



Der höchste Punkt der Bahn liegt an der Stelle x = 0,934 auf einer Höhe von g(0,934) = 0,6066 Meter.

Zur Berechnung der maximalen Steigung wird der Hochpunkt des Schaubildes von $g'(x)$ ermittelt.

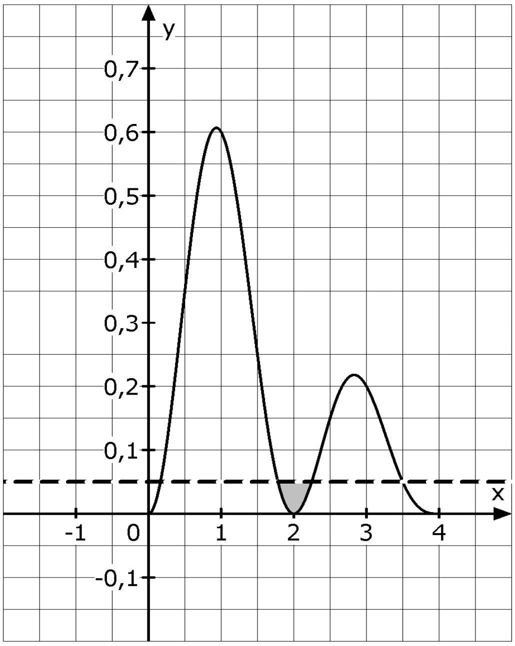




Das Schaubild von $g'(x)$ besitzt an der Stelle x = 0,444 ein Maximum.
Das heißt nach 0,444 Meter muss der Ball die größte Steigung (m = 1,017) überwinden.

Die Ermittlung der angesammelten Wassermenge wird mit folgender Volumenformel ermittelt: $V_{Wasser} = A_{Querschnitt} \cdot 1{,}25m$

Skizze der Querschnittsfläche:



Die Gerade y = 0,05 schneidet das Schaubild von g(x) bei x = 1,78 und x = 2,25 (GTR).

$$A_{Querschnitt} = \int_{1{,}78}^{2{,}25} (0{,}05 - g(x))dx = 0{,}0153 \quad \text{(GTR).}$$

Für das Volumen gilt $V = 0{,}0153m^2 \cdot 1{,}25m = 0{,}019m^3$
Es haben sich $0{,}019m^3$ bzw. 19 Liter Wasser dort angesammelt.

c) Zunächst muss die Gleichung der Parabelfunktion aufgestellt werden.
Ansatz: $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $p'(x) = 2ax + b$
Von der Parabel (Flugbahn) sind folgende Informationen bekannt:
$p(7) = 0 \Rightarrow 49a + 7b + c = 0$ (P(7/0) liegt auf der Parabel)

$p(0,5) = g(0,5) = 0,35 \Rightarrow 0,25a + 0,5b + c = 0,35$
$p'(0,5) = g'(0,5) = 1 \Rightarrow a + b = 1$

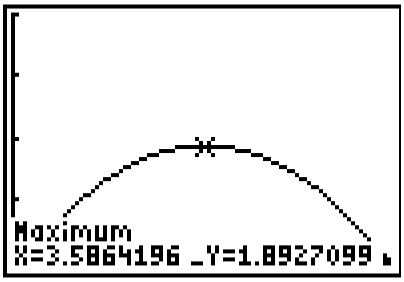
Es liegt nun folgendes lineares Gleichungssystem vor:

$$\begin{array}{rrrcl} 49a & +7b & +c & = & 0 \\ 0,25a & +0,5b & +c & = & 0,35 \\ a & +b & & = & 1 \end{array}$$

Mit Hilfe des GTR ergibt sich näherungsweise folgende Lösung:
$a \approx -0,162$; $b \approx 1,162$; $c \approx -0,191$

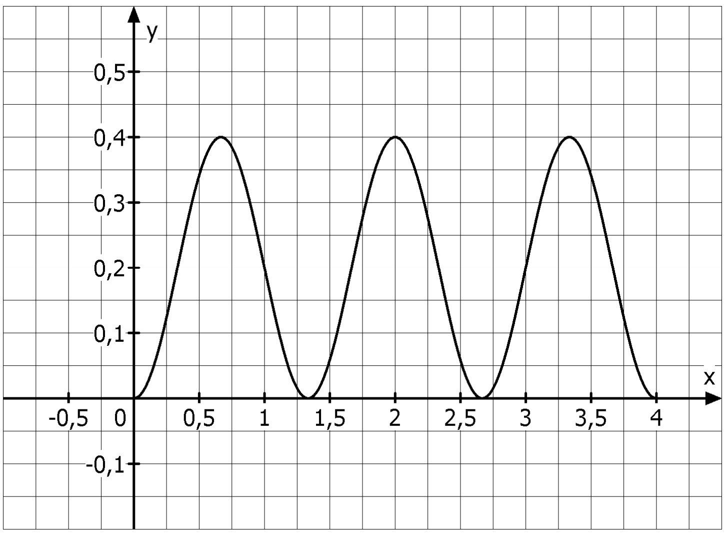
Die Parabelgleichung lautet $p(x) = -0,162x^2 + 1,162x - 0,191$

Mit dem GTR kann nun der Hochpunkt der Parabel ermittelt werden:



Der Hochpunkt (Scheitelpunkt) der Parabel lautet H(3,59/1,89).
Somit nimmt der Ball eine maximale Höhe von 1,89 Metern an.

d) Skizze des neuen Bahnverlaufs:



Allgemeiner Ansatz für den Funktionsterm: $h(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x + c)) + d$

Um die Parameter a bis d zu bestimmen, müssen folgende Eigenschaften aus der Skizze entnommen werden:

1.) Verschiebung des Schaubildes um 0,2 nach oben und das heißt d = 0,2

2.) Amplitude = 0,2 und da das Schaubild auf der y-Achse nicht im Hochpunkt sondern im Tiefpunkt beginnt, folgt a = -0,2.

3.) Periode = $\frac{4}{3}$ und das heißt $b = \frac{2\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}\pi$

4.) Keine Verschiebung nach links oder rechts und daher c = 0.

$$\Rightarrow h(x) = -0{,}2 \cdot \cos\left(\frac{3}{2}\pi \cdot x\right) + 0{,}2$$

Durchschnittliche Höhe alte Bahn: $\frac{1}{4-0} \cdot \int_0^4 g(x)dx = 0{,}2$ (GTR)

Durchschnittliche Höhe neue Bahn: $\frac{1}{4-0} \cdot \int_0^4 h(x)dx = 0{,}2$ (GTR)

Die durchschnittlichen Höhen der beiden Bahnen sind gleich.