Abiturprüfung Mathematik 2011 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Pflichtteil – Aufgaben

Aufgabe 1: (2 VP)

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x)=\frac{\sin(2x)}{x}$.

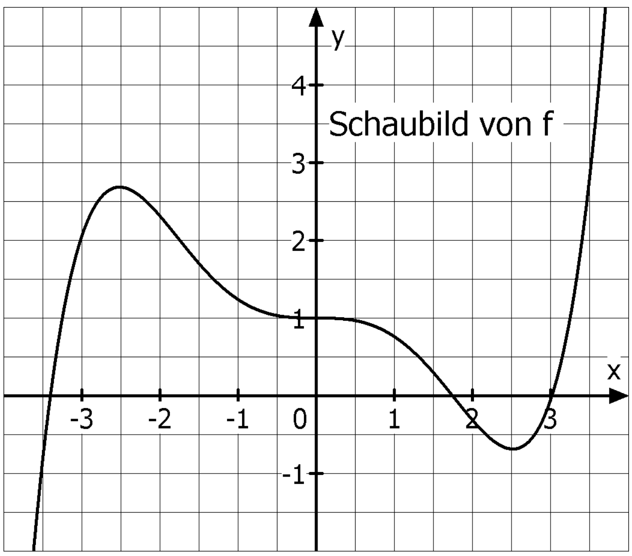
Aufgabe 2: (2 VP)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 (2x-1)^4\,dx$

Aufgabe 3: (3 VP)
Lösen Sie die Gleichung $4e^{2x}+6e^{x}=4$.

Aufgabe 4: (4 VP)
Gegeben sind die Funktion f und g mit $f(x)=e^{x}$ und $g(x)=-e^{-x}+2$.
a) Beschreiben Sie, wie das Schaubild von g aus dem Schaubild von f entsteht.
b) Zeigen Sie, dass sich die Schaubilder von f und g im Punkt P(0/1) berühren.

Aufgabe 5: (5 VP)
Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.
F ist eine Stammfunktion von f.
Begründen Sie, dass folgende Aussagen wahr sind:
(1) F ist im Bereich $-3\le x\le 1$ monoton wachsend
(2) f' hat im Bereich $-3{,}5\le x\le 3{,}5$ drei Nullstellen.
(3) $\int_0^3 f'(x)dx=-1$
(4) O(0/0) ist Hochpunkt des Schaubilds von f'



Zuletzt aktualisiert: 22.12.2011

Aufgabe 6: (4 VP)
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrcr} -5x_1 & +x_2 & -3x_3 & = & 7 \\ 5x_1 & -3x_2 & -x_3 & = & -11 \\ x_1 & & +x_3 & = & -1 \end{array}$$

Interpretieren Sie das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge geometrisch.

Aufgabe 7: (3 VP)

Gegeben sind die Ebenen E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass E und g parallel zueinander sind.
b) Bestimmen Sie den Abstand von E und g.

Aufgabe 8: (3 VP)

Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf g liegt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man denjenigen Punkt B auf g bestimmt, der den kleinsten Abstand von A hat.

Abiturprüfung Mathematik 2011 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Pflichtteil – Lösungen

Aufgabe 1:

Umschreiben der Funktion: $f(x) = \sin(2x) \cdot x^{-1}$

Ableitung mit Produktregel und Kettenregel:

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Mit $u(x) = \sin(2x)$ und $v(x) = x^{-1}$ folgt $u'(x) = \cos(2x) \cdot 2$ und $v'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$$f'(x) = 2\cos(2x) \cdot x^{-1} + \sin(2x) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \frac{2\cos(2x)}{x} - \frac{\sin(2x)}{x^2}$$

Hinweis: Alternativ kann die Ableitung auch mit der Quotientenregel durchgeführt werden, die aber ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant ist:

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$

Mit $u(x) = \sin(2x)$ und $v(x) = x$ folgt $u'(x) = \cos(2x) \cdot 2$ (Kettenregel) und $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{2\cos(2x) \cdot x - \sin(2x) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x \cdot \cos(2x) - \sin(2x)}{x^2}$$

Aufgabe 2:

$$\int_0^1 (2x-1)^4 \, dx = \left[\frac{1}{5} \cdot (2x-1)^5 \cdot \frac{1}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{10} \cdot (2-1)^5 - \frac{1}{10} \cdot (0-1)^5 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

Aufgabe 3:

$$4e^{2x} + 6e^x = 4 \Leftrightarrow 4e^{2x} + 6e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} + 3e^x - 2 = 0$$

Substitution: $u = e^x$
Daraus folgt $2u^2 + 3u - 2 = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung: $u_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$

$u_1 = 0{,}5$ und $u_2 = -2$

Rücksubstitution: $0{,}5 = e^x \Rightarrow x = \ln(0{,}5)$
$-2 = e^x$ daraus ergibt sich keine Lösung.

Lösungsmenge: L = { ln(0,5) }

Aufgabe 4:

a) $e^x \to e^{-x} \to -e^{-x} \to -e^{-x}+2$

Zunächst erfolgt eine Spiegelung an der y-Achse. Als nächstes erfolgt eine Spiegelung an der x-Achse. Zum Schluss wird das Schaubild noch um 2 Einheiten nach oben verschoben.
Fazit: g entsteht aus f durch Spiegelung an beiden Koordinatenachsen und Verschiebung um 2 Einheiten nach oben.

b) Eine Berührung an der Stellle x liegt vor, wenn $f(x)=g(x)$ und $f'(x)=g'(x)$ gilt.
$f(0)=e^0=1$ und $g(0)=-e^0+2=1$, also $f(0)=g(0)=1$.
$f'(x)=e^x \Rightarrow f'(0)=1$ und $g'(x)=e^{-x} \Rightarrow g'(0)=1$ also $f'(0)=g'(0)=1$
Damit ist gezeigt, dass sich die Schaubilder von f und g im Punkt P(0/1) berühren.

Aufgabe 5:

(1) F ist im Bereich $-3 \le x \le 1$ monoton wachsend, da das Schaubild von f in diesem Intervall oberhalb der x-Achse verläuft.

(2) f' besitzt dort Nullstellen, an denen das Schaubild von f waagrechte Tangenten besitzt. Dies ist bei x = -2,5 und x = 0 und x = 2,5 der Fall, also besitzt f' drei Nullstellen.

(3) $\int_0^3 f'(x)dx = [f(x)]_0^3 = f(3)-f(0) = 0-1 = -1$

(4) Das Schaubild von f besitzt bei x = 0 einen Sattelpunkt (also einen Wendepunkt).
Somit besitzt f' bei x = 0 einen Extrempunkt.
Es gilt $f'(0)=0$ und $f'(x)<0$ links und rechts von x = 0. Somit besitzt das Schaubild von f' an der Stelle x = 0 ein Maximum.

Aufgabe 6:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -3 & 7 \\ 5 & -3 & -1 & -11 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad |\cdot 5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad |\cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die letzten Zeile ist eine Nullzeile, das heißt, es verbleiben nur noch 2 Gleichungen mit 3 Variablen.

Das bedeutet, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.

Setze $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.
Aus der 2.Zeile folgt: $-2x_2 - 4t = -4 \Rightarrow x_2 = -2t + 2$
Aus der 1.Zeile folgt: $-5x_1 + (-2t + 2) - 3t = 7 \Rightarrow -5x_1 = 5t + 5 \Rightarrow x_1 = -t - 1$

Die drei Gleichungen beschreiben drei Ebenen im dreidimensionalen Raum.
Die unendlich vielen Lösungen beschreiben eine Schnittgerade, in der sich alle drei Ebenen schneiden.

Aufgabe 7:

a) E und g sind parallel, wenn der Normalenvektor von E und der Richtungsvektor von g orthogonal zueinander sind.

Es gilt $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 - 4 - 4 = 0$ und damit sind die Vektoren orthogonal zueinander.

b) Der Abstand von E und g wird dadurch bestimmt, dass der Abstand des Geradenpunktes P(7/5/-7) zur Ebene E ermittelt wird.

Ebenengleichung als Koordinatengleichung: $8x_1 + x_2 - 4x_3 = d$
Punktprobe mit Ebenenpunkt B(-1/4/-3) ergibt $8 \cdot (-1) + 4 - 4 \cdot (-3) = 8 = d$
E: $8x_1 + x_2 - 4x_3 = 8$

HNF von E: $\frac{8x_1 + x_2 - 4x_3 - 8}{\sqrt{64 + 1 + 16}} = 0$

Einsetzen von P in die HNF von E: $d = \left| \frac{8 \cdot 7 + 5 - 4 \cdot (-7) - 8}{9} \right| = 9$

Die Gerade von der Ebene den Abstand 9.

Aufgabe 8:

1.Schritt: Stelle eine Hilfsebene auf, die orthogonal zur Gerade verläuft und den Punkt A Enthält (Richtungsvektor von g ist Normalenvektor der Ebene)

2. Schritt: Schneide die Hilfsebene mit der Gerade. Der Schnittpunkt ist der Punkt B.