Abiturprüfung Mathematik 2012 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analytische Geometrie II 2

Aufgabe II 2

In einem Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene die Meeresoberfläche (1 LE entspricht 1m).
Zwei U-Boote U_1 und U_2 bewegen sich geradlinig mit jeweils konstanter Geschwindigkeit.
Die Position von U_1 zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 140 \\ 105 \\ -170 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix}$$ (t in Minuten seit Beginn der Beobachtung).

U_2 befindet sich zu Beobachtungsbeginn im Punkt A(68/135/-68) und erreicht nach drei Minuten den Punkt B(-202/-405/-248).

a) Wie weit bewegt sich U_1 in einer Minute ?
Woran erkennen Sie, dass sich U_1 von der Meeresoberfläche weg bewegt ?
Welchen Winkel bildet die Route von U_1 mit der Meeresoberfläche ?
(4 VP)

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit von U_2 in $\frac{m}{min}$.
Begründen Sie, dass sich die Position von U_2 zum Zeitpunkt t beschreiben lässt durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ -68 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \\ -60 \end{pmatrix}.$$

Zu welchem Zeitpunkt befinden sich beide U-Boote in gleicher Tiefe ? (4 VP)

c) Welchen Abstand haben die beiden U-Boote zu Beobachtungsbeginn ?
Aus Sicherheitsgründen dürfen sich die beiden U-Boote zu keinem Zeitpunkt näher als 100 m kommen. Wird dieser Sicherheitsabstand eingehalten ?
(4 VP)

d) Die Routen der beiden U-Boote werden von einem Satelliten ohne Berücksichtigung der Tiefe als Strecken aufgezeichnet. Diese beiden Strecken schneiden sich.
Wie groß ist der Höhenunterschied der zwei Routen an dieser Stelle ?
(4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2012 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analytische Geometrie II 2

Aufgabe II 2

a) Das Boot U_1 ändert sich pro Minute um den Vektor $\begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix}$.

Es gilt $\left|\begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3600+8100+900} = \sqrt{12600} \approx 112{,}25$ Meter.

Pro Minute bewegt sich das Boot U_1 um 112,25 Meter.

Da die x_3-Koordinate des Richtungsvektor negativ ist (-30), bewegt sich das Boot U_1 von der Meeresoberfläche weg.

Die Meeresoberfläche entspricht der x_1x_2-Ebene mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Winkel zwischen Route von U_1 und der Meeresoberfläche:

$$\sin\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix}\right|}{1 \cdot \sqrt{12600}} = \frac{30}{\sqrt{12600}} \Rightarrow \alpha = 15{,}5°$$

b) Der Abstand von A zu B beträgt $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -270 \\ -540 \\ -180 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{270^2+540^2+180^2} = 630$ Meter

Das Boot U_2 bewegt sich in 3 Minuten 630 Meter, also 210 Meter pro Minute.

Die Position von U_2 zum Zeitpunkt t lässt sich darstellen durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 68 \\ 135 \\ -68 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -90 \\ -180 \\ -60 \end{pmatrix}$

Begründung: Der Startpunkt A(68/135/-68) entspricht dem Ortsvektor der Gerade.
Der Richtungsvektor entspricht dem Vektor $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ und stellt die Richtung dar, in die sich das Boot in einer Minute bewegt.

Damit sich beide U-Boote in gleicher Tiefe befinden, müssen die x_3-Koordinate gleich groß sein: $-170-30t = -68-60t \Rightarrow t = 3{,}4$ Minuten

c) Die Boote befinden sich zu Beginn in den Punkten C(140/105/-170) und A(68/135/-68).

Es gilt $\overline{AC} = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 72 \\ -30 \\ -102 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{72^2 + 30^2 + 102^2} \approx 128{,}4$ Meter.

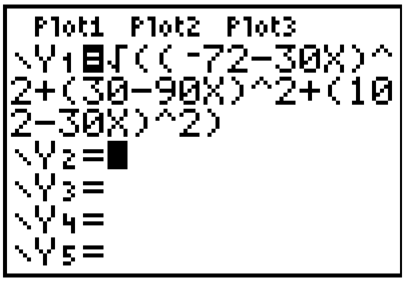
Um die Einhaltung des Sicherheitsabstandes zu prüfen, muss der kürzeste Abstand der beiden Boote berechnet werden.

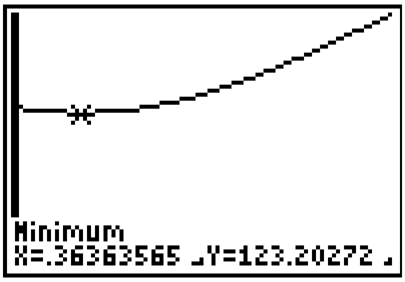
Das Boot U_1 befindet sich im Zeitpunkt t im Punkt $M_t(140 - 60t\,/\,105 - 90t\,/\,-170 - 30t)$
Das Boot U_2 befindet sich im Zeitpunkt t im Punkt $N_t(68 - 90t\,/\,135 - 180t\,/\,-68 - 60t)$.

Der Abstand zum Zeitpunkt t beträgt

$$\left|\overrightarrow{M_tN_t}\right| = \left|\begin{pmatrix} -72 - 30t \\ 30 - 90t \\ 102 - 30t \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-72 - 30t)^2 + (30 - 90t)^2 + (102 - 30t)^2}$$

Gesucht ist das Minimum des Abstandes, das mit Hilfe des GTR ermittelt wird:





Das Minimum ergibt sich für t = 0,364 Minuten.
Der minimale Abstand beträgt 123,2 Meter, damit wird der Sicherheitsabstand eingehalten.

d) Da die Tiefen der Strecken keine Rolle spielen, kann man die x_3-Koordinaten zunächst außer acht lassen.

Der Schnittpunkt ergibt sich durch gleichsetzen der ersten beiden Zeilen der Geradengleichungen (mit unterschiedlichen Parametern t und s):

$$\begin{array}{rrcrr} 140 & -60t & = & 68 & -90s \\ 105 & -90t & = & 135 & -180s \end{array}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet $t = \frac{29}{5}$ und $s = \frac{46}{15}$.

Die x_3-Koordinaten von U_1 lautet $x_3 = -170 - 30 \cdot \frac{29}{5} = -344$ Meter

Die x_3-Koordinaten von U_2 lautet $x_3 = -68 - 60 \cdot \frac{46}{15} = -252$ Meter

Der Höhenunterschied beträgt 92 Meter.