Hauptprüfung Abiturprüfung 2016 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Pflichtteil

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

April 2016

Aufgabe 1: (2 VP)

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (5x+1) \cdot \sin(x^2)$.

Aufgabe 2: (2 VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{48}{(2x-4)^3}$.

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(3) = 1$.

Aufgabe 3: (3 VP)

Lösen Sie die Gleichung $3 - e^x = \frac{2}{e^x}$

Aufgabe 4: (3 VP)

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$ besitzt einen Wendepunkt.

Zeigen Sie, dass $y = x - \frac{4}{3}$ eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt ist.

Aufgabe 5: (5 VP)

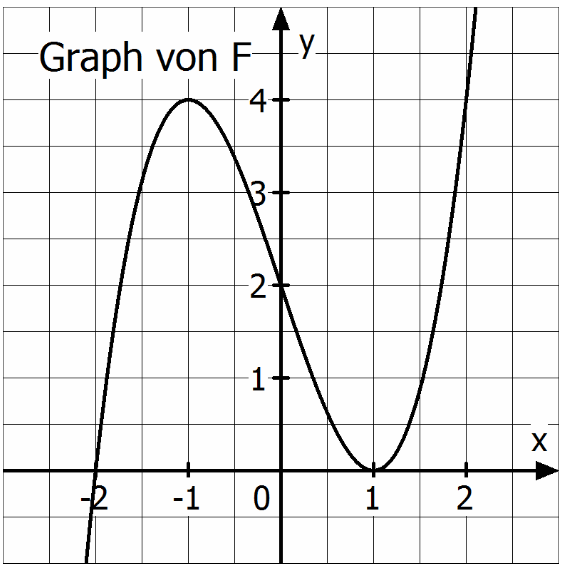
Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f.
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) f(1) = F(1)

(2) $\int_0^2 f(x)dx = 4$

(3) f' besitzt im Bereich $-1 \le x \le 1$ eine Nullstelle.

(4) f(F(-2)) > 0



Aufgabe 6: (5 VP)

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Untersuchen Sie, ob es einen Punkt auf g gibt, dessen drei Koordinaten identisch sind.
b) Die Gerade h verläuft durch Q(8/5/10) und schneidet g orthogonal.
Bestimmen Sie eine Gleichung von h.

Aufgabe 7: (3 VP)
Gegeben ist die Ebene E: $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 28$.
Es gibt zwei zu E parallele Ebenen F und G, die vom Ursprung den Abstand 2 haben.
Bestimme jeweils eine Gleichung von F und G.

Aufgabe 8: (4 VP)
Bei einem Glücksrad werden die Zahlen 1, 2, 3 und 4 bei einmaligem Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt:

Zahl	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,1	0,3	0,2

a) Das Glücksrad wird einmal gedreht.
Geben Sie zwei verschiedene Ereignisse an, deren Wahrscheinlichkeit jeweils 0,7 beträgt.
b) An dem Glücksrad sollen nur die Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2 so verändert werden, dass das folgende Spiel fair ist:
Für einen Einsatz von 2,50 € darf man einmal am Glücksrad drehen.
Die angezeigte Zahl gibt den Auszahlungsbetrag in Euro an.
Bestimmen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2.

Aufgabe 9: (3 VP)

Von zwei Kugeln K_1 und K_2 sind die Mittelpunkte M_1 und M_2 sowie die Radien r_1 und r_2 bekannt. Die Kugeln berühren einander von außen im Punkt B.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man B bestimmen kann.

Lösungen

Aufgabe 1:

Für die Ableitungsfunktion wird die Kettenregel und Produktregel benötigt:

$f'(x) = 5 \cdot \sin(x^2) + (5x+1) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$

Aufgabe 2:

Zunächst wird die Funktionsgleichung von f umgeformt:

$f(x) = \frac{48}{(2x-4)^3} = 48 \cdot (2x-4)^{-3}$

Die allgemeine Stammfunktion lautet $F(x) = 48 \cdot \frac{1}{-2}(2x-4)^{-2} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{-12}{(2x-4)^2} + C$

Nun wird die Bedingung eingesetzt: $F(3) = 1 \Rightarrow \frac{-12}{(6-4)^2} + C = 1 \Rightarrow -3 + C = 1 \Rightarrow C = 4$

Die gesuchte Stammfunktion lautet $F(x) = \frac{-12}{(2x-4)^2} + 4$

Aufgabe 3:

$3 - e^x = \frac{2}{e^x} \quad | \cdot e^x$

$\Rightarrow 3e^x - e^{2x} = 2 \Rightarrow -e^{2x} + 3e^x - 2 = 0$ Substitution: $u = e^x$

Daraus folgt $-u^2 + 3u - 2 = 0$

Lösung mit der a-b-c-Formel: $u_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2}$

Daraus folgt $u_1 = 1$ und $u_2 = 2$

Rücksubstitution: $e^x = 1 \Rightarrow x = \ln(1) = 0$

$e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$

Lösungsmenge $L = \{0 ; \ln(2)\}$

Aufgabe 4:

Berechnung der Wendestelle der Funktion $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$

Es gilt $f'(x) = -0{,}5x^2 + 2x - 1$ und $f''(x) = -x + 2$

Notwendige Bedingung für eine Wendestelle: $f''(x) = 0$
$\Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Da gemäß Aufgabenstellung vorgegeben ist, dass die Funktion f einen Wendepunkt besitzt, kann die hinreichende Bedingung weggelassen werden.

Gleichung der Tangente an der Stelle x = 2: $y = f'(2)\cdot(x-2) + f(2)$

Es gilt $f(2) = -\frac{1}{6}\cdot 8 + 4 - 2 = \frac{2}{3}$ und $f'(2) = -0{,}5\cdot 4 + 4 - 1 = 1$

Einsetzen in die Tangentengleichung: $y = 1\cdot(x-2) + \frac{2}{3} \Rightarrow y = x - \frac{4}{3}$

Die Tangentengleichung entspricht der in der Aufgabenstellung angegebenen Gerade.

Aufgabe 5:

(1) Die Aussage ist wahr.
Es gilt F(1) = 0 und $f(1) = 0$ da bei x = 1 das Schaubild von F eine waagrechte Tangente besitzt.

(2) Die Aussage ist falsch.

$$\int_0^2 f(x)dx = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) = 4 - 2 = 2$$

(3) Die Aussage ist wahr.
Es gilt $F'' = f'$.
Da das Schaubild von F an der Stelle x = 0 eine Wendestelle besitzt, gilt
$F''(0) = f'(0) = 0$.

(4) Die Aussage ist falsch.
Es gilt F(-2) = 0 und f(F(-2)) = f(0) < 0, da an der Stelle x = 0 die Tangente an das Schaubild von F eine negative Steigung besitzt.

Aufgabe 6:

a) Es ist zu prüfen, ob ein Punkt der Gestalt P(p / p / p) auf g liegt.

$$\begin{pmatrix} p \\ p \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und daraus folgt} \quad \begin{matrix} p & = & 3 & +r \\ p & = & & 4r \\ p & = & 1 & +3r \end{matrix}$$

Setze p = 4r in die erste Zeile ein: $4r = 3 + r \Rightarrow 3r = 3 \Rightarrow r = 1$
Daraus folgt $p = 4 \cdot 1 = 4$

Test, ob die dritte Zeile stimmt: $4 = 1 + 3 \cdot 1$ ist wahr.

Damit liegt der Punkt P(4/4/4) für r = 1 auf der Gerade g.

b) Um die Gleichung der Gerade h zu erhalten, benötigt man die Koordinaten des Lotfußpunktes L, wenn man vom Punkt Q aus ein Lot auf die Gerade h fällt.

Man geht so vor, wie wenn man den Abstand des Punktes Q von der Gerade g bestimmen möchte.

Der allgemeine Lotfußpunkt auf g besitzt die Koordinaten $L(3 + r \,/\, 4r \,/\, 1 + 3r)$.

Der Vektor $\overrightarrow{QL} = \begin{pmatrix} -5 + r \\ 4r - 5 \\ -9 + 3r \end{pmatrix}$ steht orthogonal auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bedingung: $\begin{pmatrix} -5 + r \\ 4r - 5 \\ -9 + 3r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -5 + r + 4 \cdot (4r - 5) + 3 \cdot (-9 + 3r) = 0$

$\Rightarrow -5 + r + 16r - 20 - 27 + 9r = 0 \Rightarrow 26r = 52 \Rightarrow r = 2$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten L(5/8/7).

Die gesuchte Gerade h verläuft durch Q(8/5/10) und L(5/8/7).

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 7:

Eine zu E parallele Ebene hat die Gleichung F: $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = c$

Hesse'sche Normalenform der Ebene F: $\frac{4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - c}{\sqrt{16+16+49}} = 0$

Gesucht ist der Wert von c, so dass gilt: d(O, F) = 2 mit O(0/0/0).

$$d(O,F) = \left|\frac{-c}{9}\right| = 2$$

1.Fall: $\frac{-c}{9} = 2 \Rightarrow c = -18$ also F: $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -18$

2.Fall: $\frac{-c}{9} = -2 \Rightarrow c = 18$ also G: $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 18$

Aufgabe 8:

a) Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0,7:
A: "Es werden die Zahlen 1 oder 2 oder 4 gedreht" (bzw. "Es wird keine 3 gedreht")
B: "Es werden die Zahlen 1 oder 3 gedreht" (bzw. "Es wird eine ungerade Zahl gedreht")

b) Für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten gelten nun: P("1") = p
Da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss, ergibt sich daraus
P("2") = 1 - p - 0,3 - 0,2 = 0,5 - p

Die Zufallsvariable X sei die Auszahlung an den Spieler in Euro.
Das Spiel ist dann fair, wenn gilt: E(X) = 2,50 Euro.

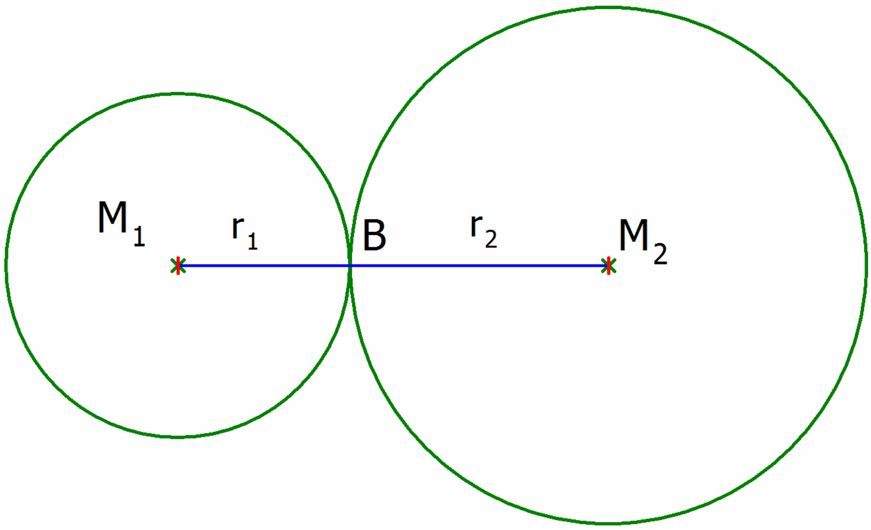
Es gilt: $E(X) = 1 \cdot p + 2 \cdot (0,5 - p) + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,2 = -p + 2,7$

Bedingung: $-p + 2,7 = 2,5 \Rightarrow p = 0,2$

Daraus folgt: P("1") = 0,2 und P("2") = 0,5-0,2 = 0,3

Aufgabe 9:

Skizze:



Um die Koordinaten von B zu bestimmen, benötigt man den Ortsvektor $\overrightarrow{OB}$.

Da der Punkt B r_1 Einheiten von M_1 entfernt ist, muss mit einem Einheitsvektor gearbeitet werden.

Es sei $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ und $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ der zugehörige Einheitsvektor.

Den Ortsvektor von Punkt B erhält man nun so: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM_1} + r_1 \cdot \overrightarrow{a_0}$