Abiturprüfung Mathematik 2007 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Aufgaben Analysis I 2

Die Funktion f ist durch $f(x)=\dfrac{4}{2+\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$ für $x\in\mathbb{R}$ gegeben. Ihr Schaubild ist K.

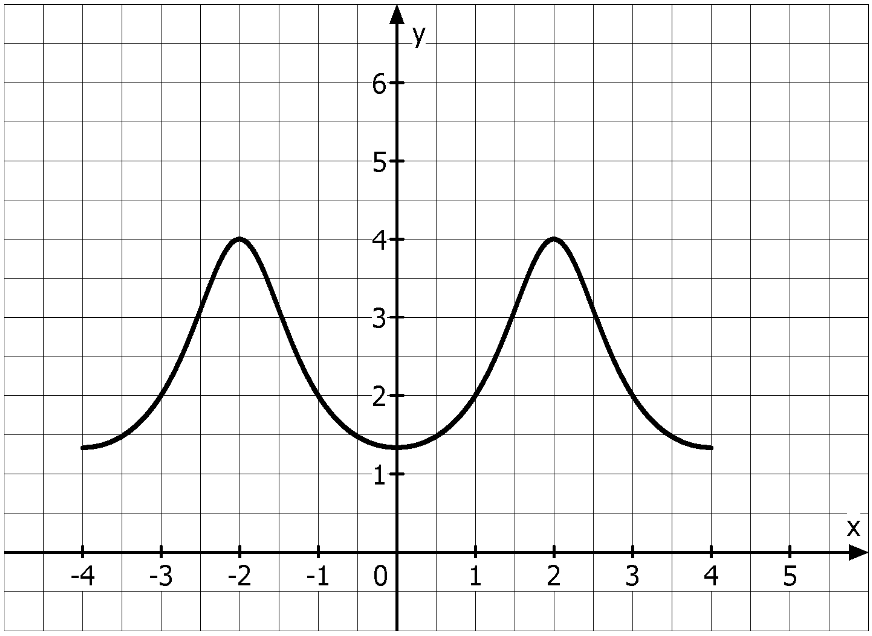
a) Skizzieren sie K im Intervall [-4 ; 4].
Begründen Sie, dass $\mathbb{R}$ die maximale Definitionsmenge von f ist.
Geben Sie die Wertemenge von f an.
Bestimmen Sie die Periode von f.
Geben Sie alle Hoch- und Tiefpunkte von K an. (7 VP)

b) Im Intervall [-2;2] soll f durch eine ganzrationale Funktion g vom Grad 2 angenähert werden, die mit f an den Stellen -2 ; 0 und 2 übereinstimmt.
Bestimmen Sie einen geeigneten Funktionsterm für g.
An welchen Stellen des Intervalls [-2 ; 2] weicht die Näherungsfunktion g am stärksten von der Funktion f ab ?
Wie groß ist die Abweichung an diesen Stellen ?
Wie groß ist im Mittel der Betrag der Abweichung von f und g im angegebenen Intervall ? (6 VP)

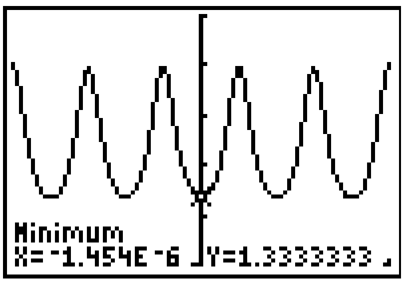
c) Das Schaubild K rotiert im Intervall [0;4] um die Gerade mit der Gleichung $y=\frac{4}{3}$.
Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.
Das Schaubild K wird an der durch die Gleichung $y=\frac{4}{3}$ gespiegelt.
Geben Sie die Gleichung des gespiegelten Schaubilds an. (5 VP)

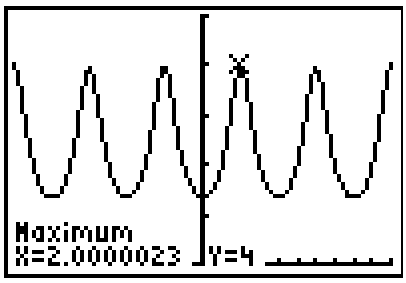
Abiturprüfung Mathematik 2007 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analysis I 2

a) Skizze von K:



Die maximale Definitionsmenge von f ist $\mathbb{R}$, da der Nenner der Funktionsgleichung nicht Null werden kann und zu jedem reellen x ein Funktionswert f(x) berechnet werden kann.





Aufgrund der GTR-Schaubilder ergibt sich als Wertemenge von f das Intervall

$W = [\frac{4}{3};4]$.

Die Periode von f entspricht dem Abstand zweier Hoch- bzw. Tiefpunkte.
Die Periode beträgt 4.
Hochpunkte von K: Der y-Wert der Hochpunkte beträgt immer y = 4, die x-Werte haben aufgrund der Periode den Abstand 4.
Daraus ergeben sich für alle Hochpunkte: HP(2+4k/4) mit $k \in \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen)
Als Tiefpunkte ergeben sich TP(0+4k/$\frac{4}{3}$) mit $k \in \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen)

b) Für die ganzrationale Funktion g soll gelten: $g(x) = ax^2 + bx + c$

$g(-2) = f(-2) = 4 \Rightarrow 4a - 2b + c = 4$

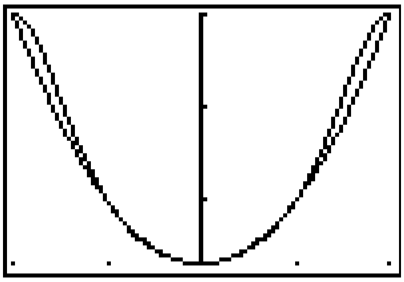
$g(0) = f(0) = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \frac{4}{3}$

$g(2) = f(2) = 4 \Rightarrow 4a + 2b + c = 4$

Aus diesem linearen Gleichungssystem ergibt sich $a = \frac{2}{3}$, b = 0 , $c = \frac{4}{3}$

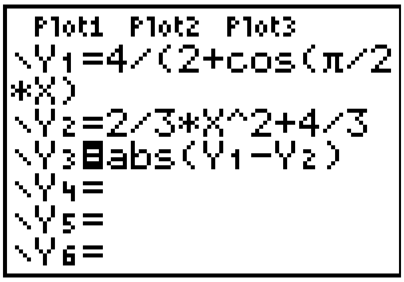
Also gilt $g(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}$.

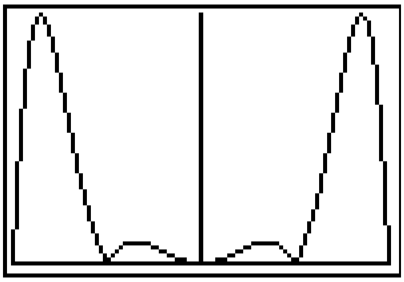
GTR-Skizze von f und g im Intervall [-2;2]:



Abweichung von g und f:
Die Abweichung an der Stelle x zwischen g und f wird durch folgende Funktion beschrieben: $d(x) = |f(x) - g(x)|$.

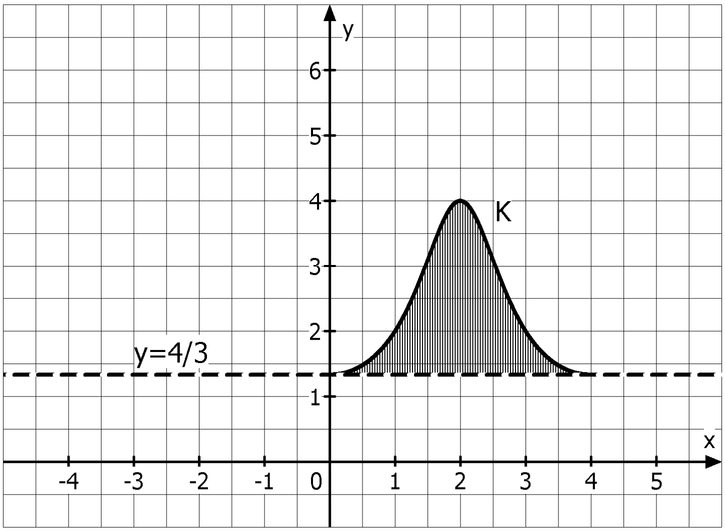
GTR-Schaubild von d(x):





Die Hochpunkte von d(x) geben die Stellen an, an denen die Abweichung zwischen f und g am stärksten ist.
An den Stellen x = 1,71 und x = -1,71 ist die Abweichung am stärksten. Die Abweichung beträgt dort jeweils 0,347.

Mittlerer Betrag der Abweichungen = $\frac{1}{4} \cdot \int_{-2}^{2} d(x)dx = 0{,}103$ (GTR) c)



Da für die Berechnung des Rotationsvolumens nur die Formel bei Rotation um die x-Achse bekannt ist, wird das gesamte Schaubild f(x) um $\frac{4}{3}$ Einheiten nach unten verschoben. Anschließend lässt man die Fläche um die x-Achse rotieren.

Verschobene Funktion: $h(x) = f(x) - \frac{4}{3}$

Rotationsvolumen: $V = \pi \cdot \int_0^4 (h(x))^2 \, dx = 22{,}34$ Volumeneinheiten

Gespiegeltes Schaubild:

1.Schritt: Verschiebung des Schaubildes um $\frac{4}{3}$ Einheiten nach unten:

$$h(x) = f(x) - \frac{4}{3} = \frac{4}{2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} - \frac{4}{3}$$

2.Schritt: Spiegelung von h(x) an der x-Achse:

$$j(x) = -h(x) = -\frac{4}{2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} + \frac{4}{3}$$

3.Schritt: Verschiebung von j(x) um $\frac{4}{3}$ Einheiten nach oben:

$$k(x) = -\frac{4}{2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} + \frac{8}{3}$$ und dies ist die gesuchte Gleichung