Abiturprüfung Mathematik 2011 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Aufgaben Analytische Geometrie II, 1

Aufgabe II 1

Eine prismenförmige Truhe ist durch ihre Eckpunkte A(6/4/0), B(6/8/0), C(-4/8/0), D(-4/4/0), P(6/4/4), Q(6/8/6), R(-4/8/6) und S(-4/4/4) gegeben.
Das Viereck PQRS beschreibt den Deckel der Truhe.

a) Stellen Sie die Truhe in einem Koordinateensystem dar.
Berechnen Sie das Volumen der Truhe.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in welcher der Deckel der Truhe liegt.
(Teilergebnis: $E_{Deckel}: x_2 - 2x_3 = -4$) (5 VP)

Gegeben ist eine Ebenenschar durch $E_a: x_2 - ax_3 = 8 - 6a$; $a \in \mathbb{R}$

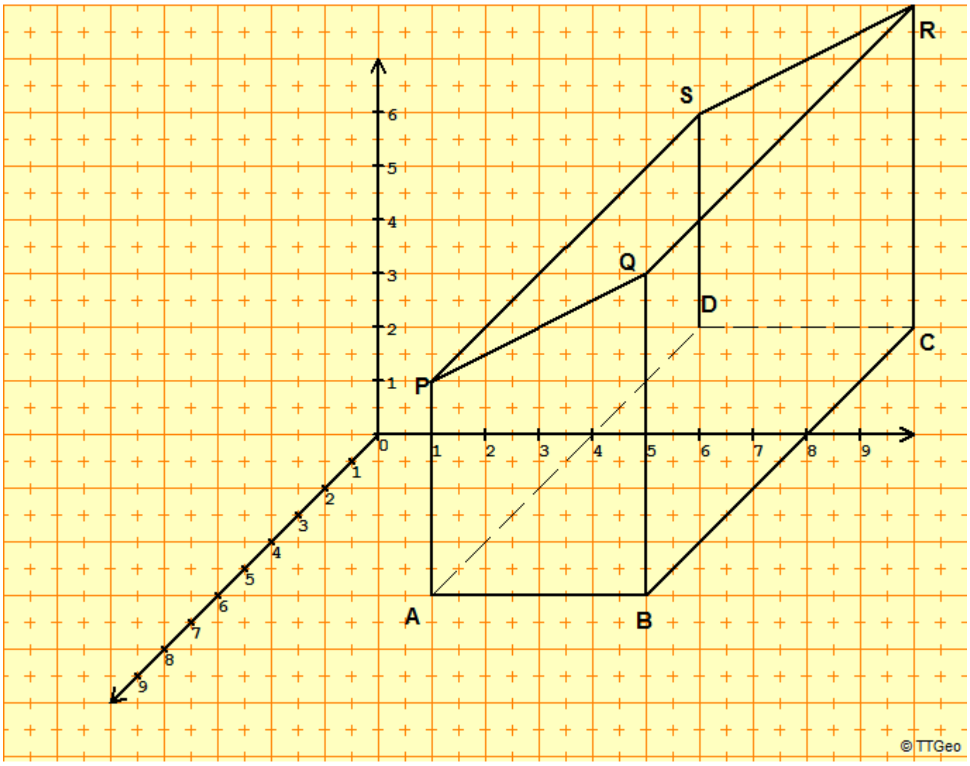
b) Zeigen Sie, dass die Ebene, in der der Deckel liegt, und die Ebene, in der die Rückwand BCRQ liegt, zur Ebenenschar gehören.
Zeigen Sie, dass es eine Gerade gibt, die in allen Ebenen E_a der Schar liegt.
Berechnen Sie den Schnittwinkel φ von E_0 und E_2.
Welche andere Ebene E_a schließt mit der Ebene E_2 ebenfalls den Winkel φ ein ?
(7 VP)

c) Der Deckel der Truhe ist um die Kante QR drehbar.
Durch Drehung des Deckels um 90° wird die Truhe geöffnet.
In welcher Ebene E_a liegt der Deckel dann ?
Der Punkt P geht bei dieser Drehung in den Punkt P* über.
Bestimmen Sie die Koordinaten von P*. (4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2011 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analytische Geometrie II, 1

Aufgabe II 1

a) Darstellung der Truhe:



Volumen der Truhe:
Die Truhe ist ein Prisma mit der Grundfläche ABPQ (Trapez) und der Höhe h = 10.

Fläche des Trapezes: $A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AP} + \overline{BQ}\right) \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \cdot (4+6) \cdot 4 = 20$

Volumen der Truhe = $A_{Trapez} \cdot h_{Prisma} = 20 \cdot 10 = 200$

Koordinatengleichung der Ebene PQRS:

Parameterform der Ebene: $E_{Deckel}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -40 \end{pmatrix}$ und gekürzt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung von E: $x_2 - 2x_3 = -4$ (-4 ergibt sich durch Einsetzen von P in die Ebenengleichung)

b) Die Deckelebene $E_{Deckel}: x_2 - 2x_3 = -4$ ergibt sich für a = 2.
Die Rückwand BCRQ ist eine Parallele zur $x_1 - x_3$-Ebene und besitzt die Koordinatengleichung $E_{Rückwand}: x_2 = 8$
Die Rückwandebene wird in der Ebenenschar für a = 0 erzeugt.

Um nachzuweisen, dass es eine Gerade gibt, die in allen Ebenen der Schar liegt, wird zunächst die Schnittgerade zweier beliebiger Ebenen der Schar bestimmt.
Da bereits bekannt ist, dass die Deckelebene PQRS für a = 2 zur Schar gehört und ebenso die Rückwandebene BCQR für a = 0, ergibt sich daraus anschaulich, dass sich diese beiden Ebenen in der Gerade durch Q und R schneiden.

Parameterform der Gerade g durch Q und R: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Nun ist zu prüfen, ob diese Gerade auch auf allen anderen Ebenen der Schar liegt.

Schnitt von g mit der Ebenenschar E_a: $8 - a \cdot 6 = 8 - 6a$
Diese Gleichung ist für alle Parameter a wahr.
Somit liegt die Gerade g in allen Scharebenen.

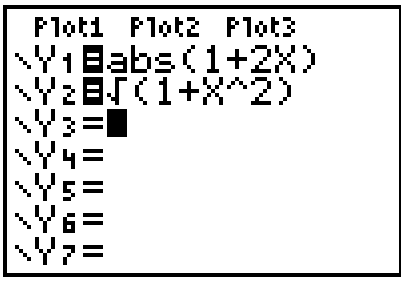
Schnittwinkel von E_0 und E_2:

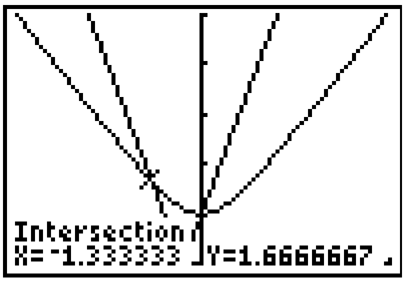
Es gilt: $\cos\varphi = \dfrac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi = 63{,}4°$

Eine weitere Ebene E_a, die mit E_2 den Winkel $\varphi = 63{,}4°$ einschließt:

$$\cos 63{,}4° = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|1+2a|}{\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow |1+2a| = \sqrt{1+a^2}$$

Lösen der Gleichung mit dem GTR:





Die Lösungen lauten a = 0 (dieser Wert ist aber nicht gesucht) und $a = -1{,}\overline{3} = -\frac{4}{3}$.

Die Ebene $E_{-\frac{4}{3}}$ schließt mit E_2 einen Winkel von 63,4° ein.

c) Aus Teilaufgabe b) ergibt sich, dass die Deckelebene PQRS der Scharebene E_2 entspricht.
Gesucht ist nun die Ebene E_a, die orthogonal zur Ebene E_2 ist.
Die Normalenvektoren der Ebenen müssen zueinander orthogonal sein.

Aus $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 1 + 2a = 0 \Rightarrow a = -0{,}5$

Der Deckel liegt nach der Öffnung in der Ebene $E_{-0,5}$.

Die Koordinaten von P* bekommt man folgendermaßen:
Der Punkt P* liegt auf der Geraden g durch Q, die senkrecht zur Ebene E_2 verläuft.

Gleichung von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (Richtungsvektor von g ist Normalenvektor von E_2)

Da P* auf g liegt, gilt für die Koordinaten P*(6 / 8+r / 6-2r).

Weiterhin gilt $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{P^*Q}\right|$.

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0+16+4} = \sqrt{20}$ und $\left|\overrightarrow{P^*Q}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 2r \end{pmatrix}\right| = \sqrt{r^2 + 4r^2} = \sqrt{5r^2}$

$\Rightarrow \sqrt{20} = \sqrt{5r^2} \Rightarrow 5r^2 = 20 \Rightarrow r = \pm 2$

Für r = 2 ergäbe sich P*(6/10/2).
Für r = -2 ergäbt sich P*(6/6/10).

Da P* oberhalb von P liegen muss (und damit der x_3-Wert größer sein muss) gilt P*(6/6/10).