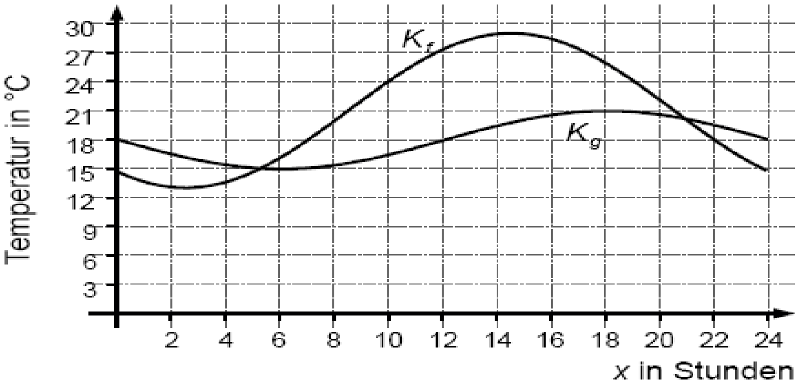
Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis I 2

Aufgabe I 2:

Der Temperaturverlauf außerhalb eines Hauses während eines Tages kann durch eine Funktion f mit

$$f(x) = 8 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8{,}5)\right] + 21 \; ; \; 0 \le x \le 24$$

beschrieben werden (x in Stunden, f(x) in ℃).
Die Abbildung zeigt das Schaubild K_f von f sowie den innerhalb des Hauses gemessenen Temperaturverlauf K_g.



a) Berechnen Sie, zu welchen Uhrzeiten die Außentemperatur minimal bzw. maximal ist. Wie viele Stunden an diesem Tag beträgt die Außentemperatur höchstens 22℃ ? Wann ist der Temperaturanstieg im Freien am größten ? Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur im Freien zwischen 6 und 18 Uhr. (5 VP)

b) Bestimmen Sie einen Term der Funktion g, der den Temperaturverlauf K_g wiedergibt. Beschreiben Sie, wie K_g aus dem Schaubild der Sinusfunktion mit $y = \sin x$ entsteht. Geben Sie eine mögliche Ursache für die zeitliche Verschiebung der beiden Temperaturverläufe K_f und K_g an. Zu welcher Uhrzeit ist der Unterschied zwischen Innen- und Außentemperatur am größten ? (7 VP)

c) Für den folgenden Tag wird vermutet, dass der Temperaturverlauf außerhalb des Hauses durch eine Funktion h mit

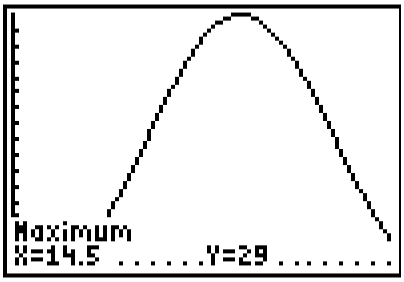
$$h(x) = 10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8{,}5)\right] + ax + b \; ; \; 24 \le x \le 48$$

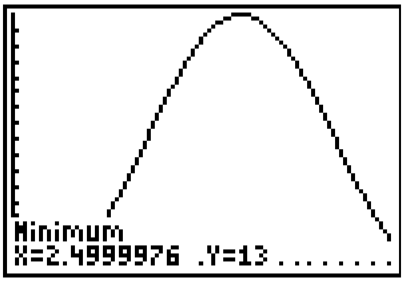
beschrieben werden kann (x in Stunden, h(x) in ℃). Dabei stimmen zum Zeitpunkt x = 24 sowohl die durch f und h beschriebenen Temperaturen als auch ihre momentanen Änderungsraten überein. Ermitteln Sie a und b.
Begründen Sie, warum die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag nur durch den Term ax+b bestimmt wird. (6 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analysis I 2

a) $f(x) = 8 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8{,}5)\right] + 21 \Rightarrow f'(x) = 8 \cdot \cos\left[\frac{\pi}{12}(x-8{,}5)\right] \cdot \frac{\pi}{12}$

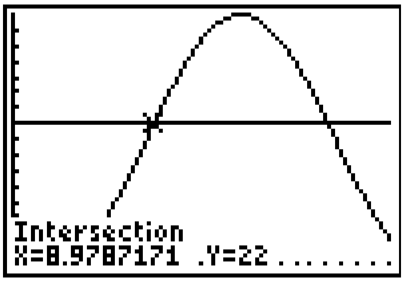
Minimale und maximale Außentemperatur:

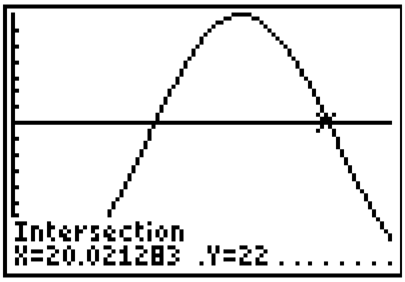




Nach 2,5 Stunden (um 2:30 Uhr) beträgt die minimale Außentemperatur 13℃, nach 14,5 Stunden (um 14:30 Uhr) beträgt die maximale Außentemperatur 29℃.

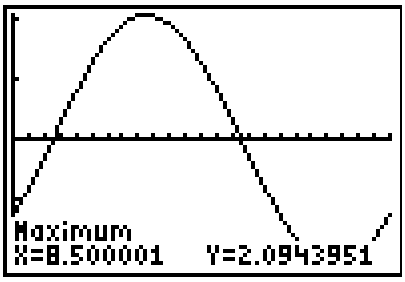
Um zu ermitteln, wie viel Stunden die Außentemperatur höchstens 22℃ beträgt, wird das Schaubild von f mit der Geraden y = 22 geschnitten.





Die Temperatur beträgt höchstens 22℃ für $x \leq 8{,}98$ und für $x \geq 20{,}02$
Anzahl der Stunden: 8,98 + (24-20,02) = 13 Stunden

Der Temperaturanstieg im Freien ist am größten, wenn das Schaubild von f' maximal ist.
Mit dem GTR wird die Ableitungsfunktion f' von f gezeichnet. Es ist die Stelle gesucht, an der die Ableitungsfunktion von f einen Hochpunkt besitzt.



Der Temperaturanstieg im Freien ist bei x = 8,5 am größten.

Durchschnittliche Temperatur zwischen 6 und 18 Uhr:

$$\frac{1}{18-6}\cdot\int_6^{18} f(x)dx = 25{,}04\,°C \quad \text{(GTR)}$$

b) Die Funktion g(x) hat die Bauart $g(x) = a\cdot\sin(b(x+c)) + d$

Das Schaubild von g ist um 18 nach oben verschoben, also d = 18.
Die Amplitude beträgt a = 3.

Die Periode von g beträgt 24 und damit gilt $24 = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{\pi}{12}$

Das Schaubild ist um 12 nach rechts verschoben, also c = -12.

Es gilt $g(x) = 3\cdot\sin\left[\frac{\pi}{12}(x-12)\right] + 18$

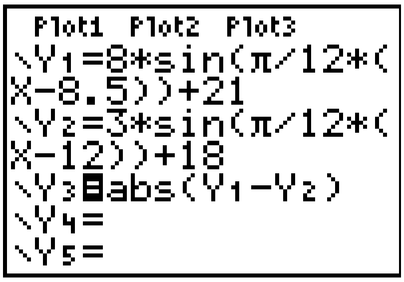
Das Schaubild von g entsteht aus der Sinusfunktion durch folgende Schritte:
1.) Streckung mit dem Faktor a = 3 in y-Richtung
2.) Verschiebung um 18 nach oben
3.) Streckung mit dem Faktor $\frac{12}{\pi}$ in x-Richtung (Kehrwert !)
4.) Verschiebung um 12 nach rechts

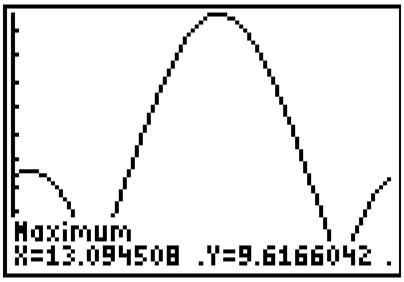
Die Ursache für die zeitliche Verschiebung liegt darin begründet, dass eine Temperaturänderung im Freien sich erst zeitversetzt im Haus bemerkbar macht (aufgrund der Dämmung etc.).

Größter Unterschied zwischen Innen- und Außentemperatur:

Die Differenz wird dargestellt durch die Funktion $d(x) = |f(x) - g(x)|$

Durch den Betrag muss nicht unterschieden werden, ob f(x) über g(x) liegt oder umgekehrt.





Mit dem GTR ergibt sich als Maximum der Funktion d(x) (unter Y3=…) die Stelle x =13,1 also um 13:06 Uhr.

c) Es gilt: $h(24) = f(24) \Rightarrow 10\cdot\sin(\frac{31}{24}\pi) + 24a + b = 8\cdot\sin(\frac{31}{24}\pi) + 21 \Rightarrow -1{,}587 + 24a + b = 21$

Weiterhin gilt

$$h'(24) = f'(24) \Rightarrow 10\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{12}(24-8{,}5)\right] + a = 8\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\cos\left[\frac{\pi}{12}(24-8{,}5)\right] \Rightarrow -0{,}319 + a = 0$$

Daraus ergibt sich a = 0,32 und b = 14,9.

Die durchschnittliche Außentemperatur am zweiten Tag beträgt:

$$D = \frac{1}{48-24} \cdot \int_{24}^{48} (10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8,5)\right] + ax + b)dx$$

Da das Schaubild von h eine Periode von p = 24 besitzt, gilt:

$$\frac{1}{48-24} \cdot \int_{24}^{48} 10 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x-8,5)\right]dx = 0 .$$

Somit wird die durchschnittliche Temperatur nur durch den Term ax +b bestimmt.