Abiturprüfung Mathematik 2011 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Aufgaben Analytische Geometrie II, 2

Aufgabe II 2

Ein Gebäude hat als Grundfläche das Rechteck ABCD mit A(4/0/0), B(4/6/0), C(0/6/0) und D(0/0/0) und als Dachfläche das Viereck EFGH mit E(4/0/4), F(4/6/1), G(0/6/5) und H(0/0/8) (Koordinatenangaben in Meter).

a) Stellen Sie das Gebäude in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Dachfläche EFGH liegt.
Welchen Neigungswinkel besitzt die Dachfläche ?
Zeigen Sie, dass die Dachfläche ein Parallelogramm ist.
Berechnen Sie den Inhalt der Dachfläche.
(Zwischenergebnis: $E_{Dach}: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16$) (8 VP)

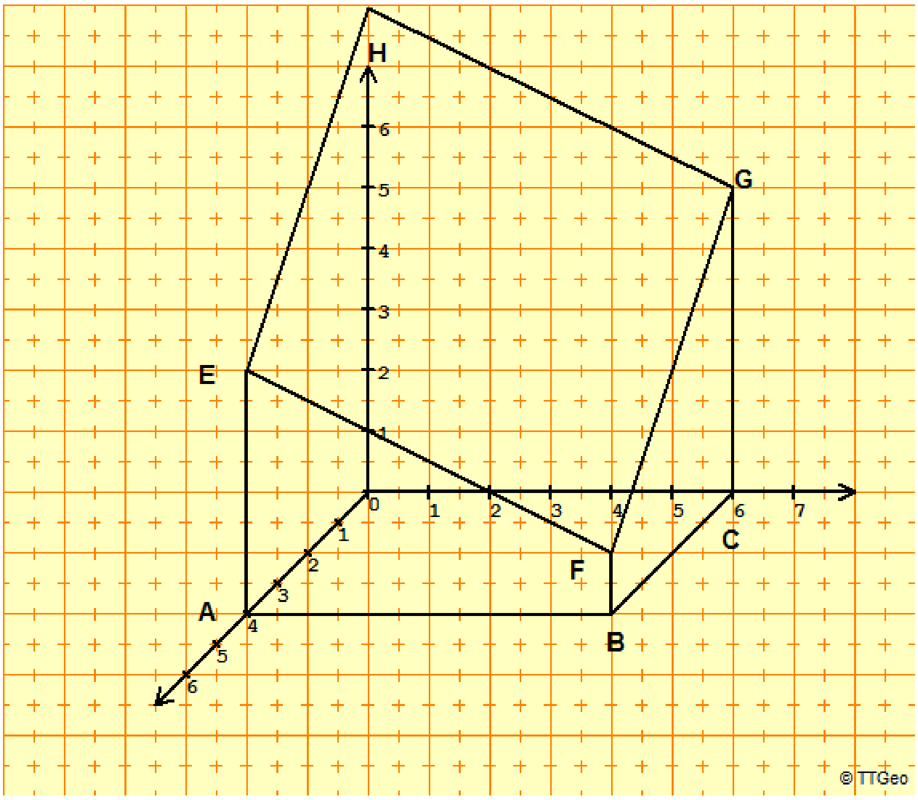
b) Im Innern des Gebäudes soll eine Lampe im Punkt L(d/d/d) angebracht werden.
Die Lampe soll von der Bodenfläche und der Dachfläche des Gebäudes den gleichen Abstand haben. Bestimmen Sie d.
(4 VP)

c) Eine Person mit 1,7 m Augenhöhe bewegt sich vom Punkt P(5/1/0) aus in positiver x_2 - Richtung.
Wie weit muss sie mindestens gehen, damit sie die Ecke H sehen kann ?
(4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2011 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analytische Geometrie II, 2

Aufgabe II 1

a) Darstellung des Gebäudes:



Koordinatengleichung der Ebene EFGH:
Eine Parameterform der Ebene, die die Punkte E, F und H enthält, lautet:

$$E_{Dach}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor lautet $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix}$ und daher $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung: $E_{Dach}: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16$

Neigungswinkel der Dachfläche (zur $x_1 - x_2$-Ebene):

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 48{,}2°$$

Die Dachfläche ist ein Parallelogramm EFGH, wenn $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ gilt.

Es gilt $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{HG}$. Somit ist das Viereck EFGH ein Parallelogramm.

Die Parallelogrammfläche ergibt sich mit der Formel $A = \left|\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EH}\right|$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} \text{ und } \left|\overrightarrow{EF} \times \overrightarrow{EH}\right| = \sqrt{24^2 + 12^2 + 24^2} = 36$$

Die Fläche des Parallelogramms beträgt 36 m².

b) Die Lampe L(d/d/d) hat vom Boden den Abstand d (x_3 – Wert).

Der Abstand von L zu E_{Dach} muss damit auch d sein.

HNF von E_{Dach}: $\dfrac{2x_1 + x_2 + 2x_3 - 16}{3} = 0$

Einsetzen von L in die HNF: $\left|\dfrac{2d + d + 2d - 16}{3}\right| = \left|\dfrac{5d - 16}{3}\right|$

Nun soll gelten: $\left|\dfrac{5d - 16}{3}\right| = d$

1.Fall: $\dfrac{5d - 16}{3} = d \Rightarrow d = 8$

2.Fall: $\dfrac{5d - 16}{3} = -d \Rightarrow d = 2$

Da der Punkt L(8/8/8) außerhalb des Gebäudes liegen würde, kommt nur L(2/2/2) in Frage.

c) Das Auge der Person befindet sich im Punkt R(5/1/1,7).

Die Augen der Person bewegen sich auf der Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1{,}7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Der Grenzpunkt, bis zu dem die Person laufen muss, damit sie H sehen kann, ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Gerade h mit E_{Dach}: $2 \cdot 5 + 1 + t + 2 \cdot 1{,}7 = 16 \Rightarrow t = 1{,}6$

Der Schnittpunkt lautet S(5/2,6/1,7).

Die Person muss vom Punkt P(5/1/1,7) bis zum Punkt S(5/2,6/1,7) laufen, um den Punkt H zu sehen.
Sie muss also mindestens 1,6 m weit gehen.