Abiturprüfung Mathematik 2004 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Analysis – Aufgabe I, 2

Aufgabe I 2.1

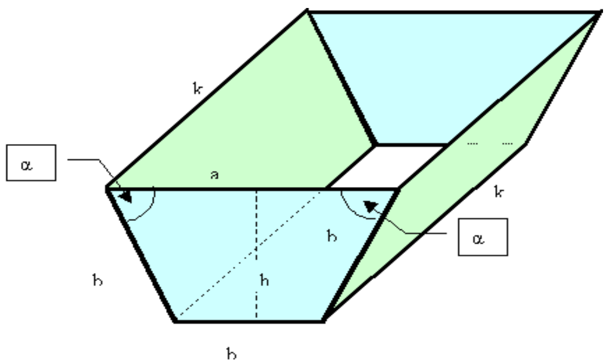
Die Geschwindigkeit eines Schwimmers schwankt periodisch um einen Wert. Messungen beim Training haben gezeigt, dass sich die Bewegung näherungsweise durch die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion v mit

$$v(t) = 0{,}4 \cdot \sin(12t) + 1{,}5$$

beschreiben lässt (Zeit t in s, Geschwindigkeit v(t) in m/s).
Bestimmen Sie die Periodendauer. Zwischen welchen Werten schwankt die Geschwindigkeit des Schwimmers ? Skizzieren Sie ein Schaubild von v.
Zu welchen Zeitpunkten nimmt die Geschwindigkeit am stärksten ab ?
Welchen Weg legt der Schwimmer innerhalb von 50 Perioden zurück ? (6 VP)

Aufgabe I 2.2

Eine Firma stellt aus Holzbrettern der Länge k und der Breite b oben offene Blumentröge mit trapezförmigem Querschnitt her (siehe Abb.).



a) Wählen Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für den Neigungswinkel α.
Drücken Sie die Höhe h und die obere Breite a des Blumentrogs in Abhängigkeit vom Neigungswinkel α aus. Weisen Sie damit nach, dass sich der Flächeninhalt der Querschnittsfläche durch die Funktion A mit

$$A(\alpha) = b^2 \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot \sin\alpha$$

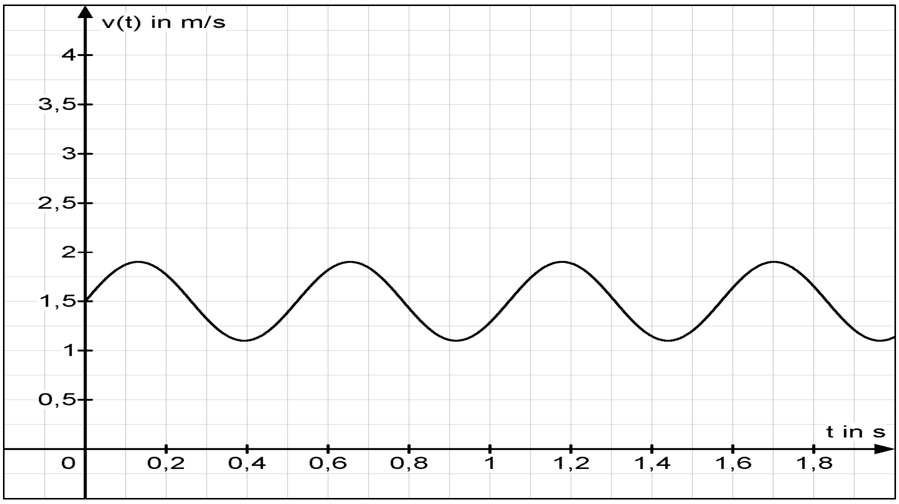
darstellen lässt. (5 VP)

b) Die Breite b der Bretter beträgt nun 0,5 m. Für $k = b \cdot (1 + 2\cos\alpha)$ ist die Pflanzfläche eines vollständig gefüllten Troges quadratisch.
Für welches α hat ein derartiger Trog maximales Volumen ?
Wie groß ist dieses Volumen ?
Für welche Werte von α benötigt man zum vollständigen Befüllen eines Troges mit quadratischer Pflanzfläche mindestens vier Säcke Blumenerde von je 80 Liter Inhalt ? (7 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2004 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Hauptterminj Wahlteil – Analysis – Lösung zu Aufgabe I, 1

Aufgabe I 2.1

a)



Die Periodendauer beträgt $T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} = 0{,}52$ Sekunden.
Die Funktion $f(x) = 0{,}4 \cdot \sin(x)$ besitzt die Wertemenge [-0,4 ; 0,4].
Durch die Verschiebung um 1,5 nach oben besitzt die Funktion v(t) die Wertemenge [1,1 ; 1,9].

Die Geschwindigkeit des Schwimmers nimmt am stärksten an den Stellen ab, an denen die Tangentensteigung minimal ist.
Diese Stellen sind bei den Wendepunkten mit negativer Steigung.

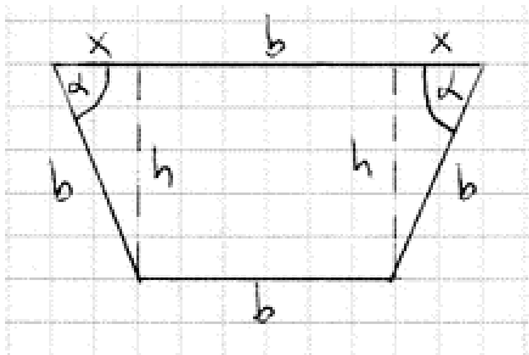
Anhand des Schaubildes ist zu erkennen, dass der Wendepunkt mit negativer Steigung nach einer halben Periodendauer, also bei $t = \frac{\pi}{12}$ auftritt.
Die nächsten Zeitpunkte kommen jeweils eine Periodendauer später, also bei
$t = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}$ bzw. $t = \frac{\pi}{12} + 2 \cdot \frac{\pi}{6}$ bzw. $t = \frac{\pi}{12} + 3 \cdot \frac{\pi}{6}$ usw.

Da es sich bei der Funktion v(t) um eine Geschwindigkeitsfunktion handelt, also um eine so genannte „momentane Änderungsrate“, wird der Weg des Schwimmers über ein Integral berechnet.

$$s = \int_0^{50 \cdot \frac{\pi}{6}} v(t)dt = \int_0^{\frac{25}{3}\pi} (0{,}4 \cdot \sin(12t) + 1{,}5)dt = 39{,}27 \text{ Meter} \quad \text{(mit GTR)}$$

Aufgabe I 2.2

a) Definitionsmenge für α: Wenn der Blumentrog oben schmäler sein darf als unten, würde als Definitionsmenge D =]0°; 180°[gelten.
Geht man hingegen davon aus, dass der Blumentrog wie in der Abbildung oben breiter sein soll, gilt für die Definitionsmenge D =]0°; 90°[.



Es gilt $\sin\alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \sin\alpha$

Für die obere Strecke des Trapezes gilt: $a = b + 2x$

Es gilt $\cos\alpha = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \cos\alpha$ und damit $a = b + 2 \cdot b \cdot \cos\alpha$

Inhalt der Querschnittsfläche:

$$A_{Trapez} = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h = \frac{1}{2}(b + 2b \cdot \cos\alpha + b) \cdot b \cdot \sin\alpha = b^2 \cdot \sin\alpha \cdot (1 + \cos\alpha)$$

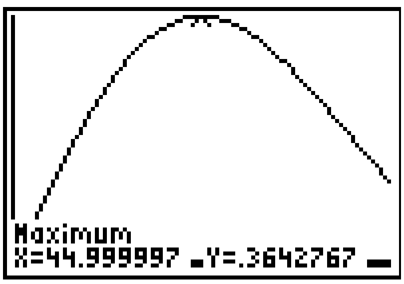
was zu zeigen war.

b) Das Volumen des Troges ergibt sich zu $V = A(\alpha) \cdot k$

Für b = 0,5 ergibt sich damit:

$$V(\alpha) = 0{,}5^2 \cdot \sin\alpha \cdot (1 + \cos\alpha) \cdot 0{,}5 \cdot (1 + 2\cos\alpha) = 0{,}125 \cdot \sin\alpha \cdot (1 + \cos\alpha)(1 + 2\cos\alpha)$$

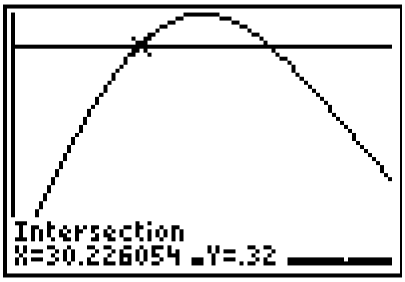
Mit Hilfe des GTR (Einstellung DEGREE) kann das Maximum dieser Funktion ermittelt werden.



Für $\alpha = 45°$ ergibt sich ein maximales Volumen von V = 0,364 m³.

Wie groß muss der Winkel nun gewählt werden, dass mindestens
$4 \cdot 80 = 320$ Liter = 0,32 m³ Erde hineinpassen ?

Für welche α gilt $V(\alpha) \geq 0{,}32$?



Aus dem GTR-Schaubild kann man entnehmen, dass dies für alle Winkelwerte zwischen $\alpha_1 = 30{,}22°$ und $\alpha_2 = 60{,}94°$ liegt.