Abiturprüfung Mathematik 2005 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Analysis – Aufgabe I, 3

Aufgabe I 3.1

Eine Forschungsgruppe versucht, die Entwicklung eines Fischbestandes in einem See durch ein mathematisches Modell zu erfassen. Zu Beginn der Untersuchung leben im See 4 Millionen Fische. Die Änderungsrate des Bestandes wird in diesem Modell durch eine Funktion f mit

$$f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} \;;\; t \geq 0$$

beschrieben (t in Jahren seit Untersuchungsbeginn, f(t) in Millionen pro Jahr).

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f für $0 \leq t \leq 6$.
Untersuchen Sie das Verhalten von f für $t \to \infty$.
Weisen Sie nach, dass f für t > 0 monoton abnimmt.
Bedeutet dies, dass der Fischbestand abnimmt ?
Begründen Sie Ihre Antwort. (6 VP)

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit

$$F(t) = \frac{-1}{e^t + 1}$$

eine Stammfunktion von f ist.
Welcher Fischbestand ist zwei Jahre nach Beginn der Untersuchung zu erwarten ? Welcher Fischbestand ist langfristig zu erwarten ? (5 VP)

Aufgabe I 3.2

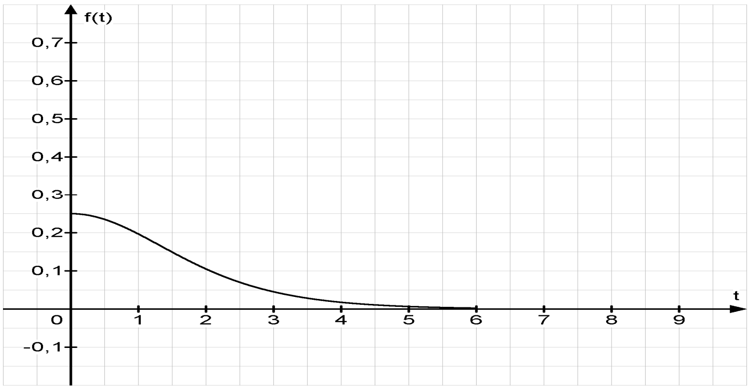
Ein Teich bietet Platz für maximal 7000 Fische. In einem Modell soll angenommen werden, dass die Änderungsrate des Fischbestandes proportional zur Anzahl der noch Platz findenden Fische ist. Anfangs befinden sich 4000 im Teich. Nach einem Monat sind 4400 Fische vorhanden.
Geben Sie eine zugehörige Differenzialgleichung an.
Bestimmen Sie eine Funktion, welche diesen Fischbestand in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Nach wie vielen Monaten sind 5000 Fische in dem Teich vorhanden ?
Wie viele Fische müssten sich am Anfang im Teich befinden, damit bei unveränderten Wachstumsbedingungen erst nach fünf Monaten 5000 Fische vorhanden sind ?

(7 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2005 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Analysis – Lösung Aufgabe I, 3

Aufgabe I 3.1

a) Skizze für $0 \le t \le 6$
Wertetabelle mit GTR:



Es gilt $f(t) = \dfrac{e^t}{e^{2t} + 2e^t + 1} = \dfrac{1}{e^t + 2 + \dfrac{1}{e^t}} = \dfrac{1}{e^t + 2 + e^{-t}}$ (Kürzung des Funktionsterms mit e^t)

Für $t \to \infty$ strebt der Zähler gegen 1 und der Nenner gegen ∞.
Also gilt $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Das Schaubild von f ist monoton fallend, wenn gilt: $f'(t) \le 0$.

Zum Ableiten der Funktion wird sie umgeschrieben in $f(t) = \left(e^t + 2 + e^{-t}\right)^{-1}$

Es gilt: $f'(t) = -(e^t + 2 + e^{-t})^{-2} \cdot (e^t - e^{-t}) = -\dfrac{e^t - e^{-t}}{(e^t + 2 + e^{-t})^2}$

Der Nenner ist für alle reellen t positiv.
Im Zähler ist $e^t - e^{-t} = e^{-t} \cdot \left(e^{2t} - 1\right)$ für t > 0 positiv.
Aufgrund des Minuszeichens vor dem Bruch gilt also $f'(t) < 0$ für t > 0.

Die Eigenschaft, dass das Schaubild von f monoton fällt bedeutet nicht, dass der Bestand abnimmt.
Die Funktion f beschreibt nicht den Bestand zum Zeitpunkt t, sondern die Änderungsrate, also die Momentangeschwindigkeit. Die Geschwindigkeit nimmt im Laufe der Zeit ab, was bedeutet, dass der Bestand im Laufe der Zeit immer langsamer wächst, aber trotzdem noch ansteigt.

b) Die Funktion $F(t) = \dfrac{-1}{1+e^t}$ ist Stammfunktion, wenn $F'(t) = f(t)$ gilt.

Umschreiben der Funktion zu $F(t) = -(1+e^t)^{-1}$

$F'(t) = (1+e^t)^{-2} \cdot e^t = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = f(t)$ und damit ist die Stammfunktionseigenschaft gezeigt.

Fischbestand nach 2 Jahren:
Die Bestandsfunktion in Mio. Fischen wird durch die Stammfunktion F(t) dargestellt.
Hierbei muss aber noch berücksichtigt werden, dass der Anfangsbestand 4 Millionen Fische sind, also F(0) = 4.

Allgemeine Stammfunktion: $F(t) = \frac{-1}{1+e^t} + C$

$F(0) = \frac{-1}{1+1} + C = 4 \Rightarrow C = 4{,}5 \Rightarrow F(t) = \frac{-1}{1+e^t} + 4{,}5$

Bestand nach 2 Jahren: $F(2) = \frac{-1}{1+e^2} + 4{,}5 = 4{,}38$ Millionen Fische.

Langfristig zu erwartender Bestand: $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 4{,}5$, da $\frac{-1}{1+e^t} \to 0$ für $t \to \infty$.
Also befinden sich langfristig 4,5 Millionen Fische im See.

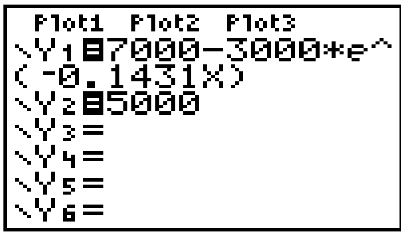
Aufgabe I 3.2
Zunächst ist zu prüfen, welche Wachstumsart hinter dem beschriebenen Modell steckt.
Der Teich kann maximal 7000 Fische aufnehmen.
Es sei $f(t)$ der Fischbestand des Teiches nach t Monaten.
Die Anzahl der noch Platz findenden Fische nach t Monaten ist dann $7000 - f(t)$ (das so genannte Sättigungsmanko).
Da die Änderungsrate (=momentane Wachstumsgeschwindigkeit) $f'(t)$ proportional zum Sättigungsmanko ist, gilt die folgende Differenzialgleichung:

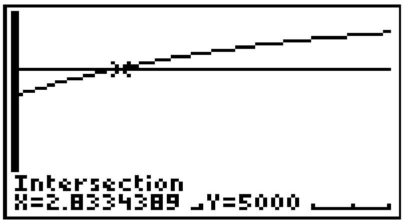
$$f'(t) = k \cdot (7000 - f(t))$$

Hierbei handelt es sich um das beschränkte Wachstum mit der Lösungsfunktion
$f(t) = S - a \cdot e^{-kt}$ und mit S = 7000 dann $f(t) = 7000 - a \cdot e^{-kt}$.
Aus $f(0) = 4000$ ergibt sich $f(0) = 7000 - a \cdot e^0 = 4000 \Rightarrow a = 3000$
Aus $f(1) = 4400$ ergibt sich
$f(1) = 7000 - 3000 \cdot e^{-k} = 4400 \Rightarrow e^{-k} = \frac{13}{15} \Rightarrow k = -\ln\frac{13}{15} \approx 0{,}1431$

Also lautet die Funktionsgleichung $f(t) = 7000 - 3000 \cdot e^{-0{,}1431 \cdot t}$

Anzahl der Monate, bis 5000 Fische vorhanden sind:
$5000 = 7000 - 3000 \cdot e^{-0{,}1431 \cdot t}$
Die Gleichung kann man entweder „per Hand“ oder auch mit dem GTR berechnen.





Als Lösung ergeben sich t = 2,83 Monate.

Bestimmung des neuen Anfangsbestandes:
Der Anfangsbestand wird gesteuert über den Parameter a in der allgemeinen Funktionsgleichung. Der Parameter a selbst gibt aber nicht den Anfangsbestand an, sondern das Sättigungsmanko zum Zeitpunkt t = 0.

Neue Funktionsgleichung: $g(t) = 7000 - a \cdot e^{-0{,}1431 \cdot t}$ mit $g(5) = 5000$

Daraus folgt $7000 - a \cdot e^{-0{,}1431 \cdot 5} = 5000 \Rightarrow a = \dfrac{7000 - 5000}{e^{-0{,}1431 \cdot 5}} = 4090$

Der neue Anfangsbestand wäre also $g(0) = 7000 - 4090 \cdot e^{0} = 2910$ Fische.