Abiturprüfung Mathematik 2010 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Aufgaben Analytische Geometrie II, 2

Aufgabe II 2.1

Gegeben sind der Punkt A(4,5/6/3,5) sowie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der x_1x_2 – Ebene.
Zeichnen Sie die Gerade g in ein Koordinatensystem.
Unter welchem Winkel schneidet g die x_1x_2 – Ebene ?
Welcher Punkt F auf der Geraden g hat vom Punkt A den kleinsten Abstand ?
Die Gerade h entsteht durch Spiegelung von g an A.
Bestimmen Sie eine Gleichung von h.
(Teilergebnis: F(3/4/1)) (7 VP)

b) Begründen Sie, dass bei Rotation der Geraden g um die Gerade durch A und F eine Ebene entsteht.
Zeigen Sie, dass $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$ eine Gleichung dieser Ebene ist.
Untersuchen Sie, ob die Punkte P(18/-9/1) und Q(-2/1/-9) auf verschiedenen Seiten dieser Ebene liegen. (5 VP)

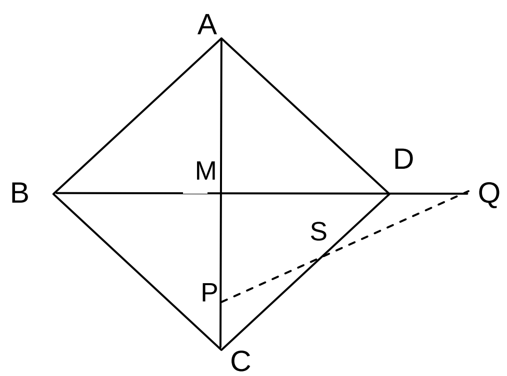
Aufgabe II 2.2

Hinweis: ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

Das Quadrat ABCD hat den Mittelpunkt M.

Die Punkte P und Q werden so gewählt, dass $\overrightarrow{MP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MC}$ und $\overrightarrow{MQ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{MD}$ gilt.

Die Strecken CD und PQ schneiden sich im Punkt S.
In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Strecke CD ?



(4 VP)

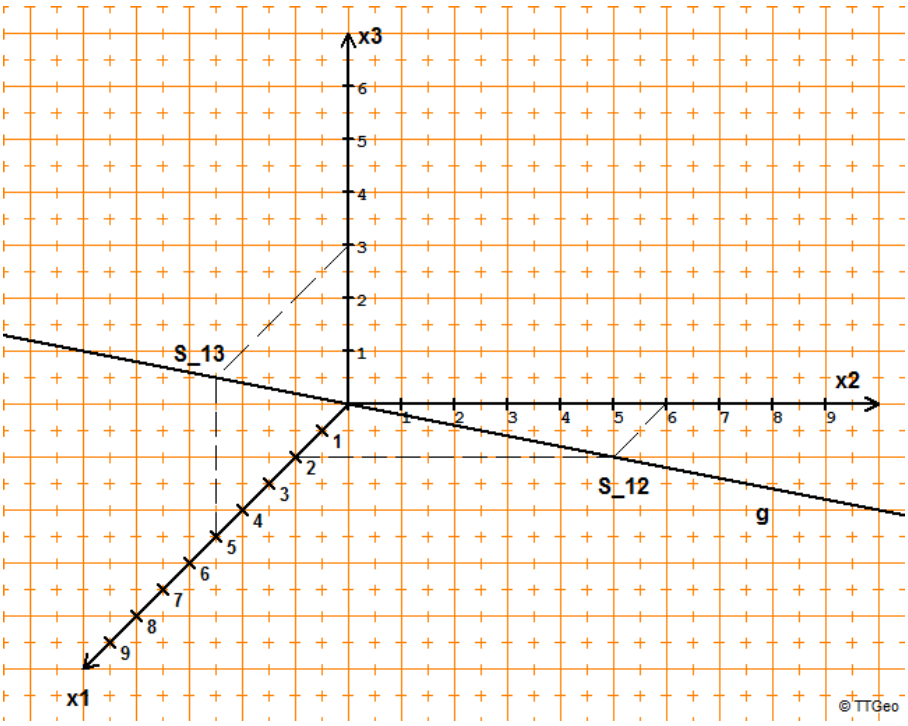
Abiturprüfung Mathematik 2010 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analytische Geometrie II, 2

Aufgabe II 2.1

a) Schnittpunkt S_{12} von g mit der x_1x_2 – Ebene:

Setze in der Geradengleichung $x_3 = 0$: $3 + t = 0 \Rightarrow t = -3$
Einsetzen von t = -3 in die Geradengleichung ergibt $S_{12}(2/6/0)$

Zeichnung:

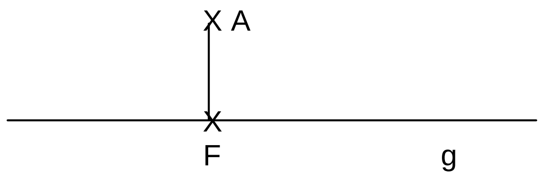


Schnittwinkel der Gerade mit der x_1x_2 – Ebene:

Die x_1x_2 – Ebene besitzt den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechnung des Schnittwinkels: $\sin\alpha = \dfrac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{1}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \alpha = 24{,}1°$

Berechnung des Punktes F:



Der Punkt F entspricht dem Fußpunkt des Lotes von A auf die Gerade g.
(Dieser Punkt muss auch bestimmt werden, um den Abstand des Punktes A von der Geraden g zu ermitteln)

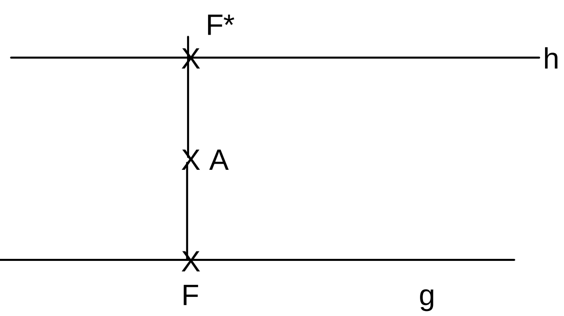
Aufstellen einer Hilfsebene H, die A enthält und orthogonal zu g verläuft:
H: $x_1 - 2x_2 + x_3 = d$ (Richtungsvektor von g entspricht einem Normalenvektor von H)
Einsetzen von A: $4{,}5 - 2 \cdot 6 + 3{,}5 = d \Rightarrow d = -4$

Koordinatengleichung von H: $x_1 - 2x_2 + x_3 = -4$

Der Schnittpunkt von g mit H entspricht dem Punkt F:
$(5+t) - 2(-2t) + (3+t) = -4 \Rightarrow 8 + 6t = -4 \Rightarrow t = -2$

Einsetzen von t = -2 in die Gerade ergibt Schnittpunkt F(3/4/1).

Berechnung der Geradengleichung von h:



Die Gerade h ist parallel zur Geraden g, somit hat die denselben Richtungsvektor.

Nun müssen noch die Koordinaten von F* ermittelt werden.

Es gilt $\overrightarrow{OF^*} = \overrightarrow{OF} + 2 \cdot \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

Die Koordinaten von F* lauten F*(6/8/6).

Geradengleichung von h lautet: h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Anhand der Skizze aus a) ergibt sich, dass der Punkt F auf der Geraden g liegt und die Gerade durch A und F orthogonal zur Geraden g ist.

Daher entsteht bei Rotation der Gerade g um die Gerade durch A und F eine Ebene.

Die Ebene, die dabei entsteht, besitzt einen Normalenvektor $\vec{n} = \overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$.

Die gegebene Ebene besitzt einen vielfachen Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Nun muss noch geprüft werden, ob der Punkt F auf der gegebenen Ebene liegt:
Einsetzen von F(3/4/1) in die Ebene: $3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 30$ liefert eine wahre Aussage.

Damit ist $3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$ eine Gleichung der Ebene.

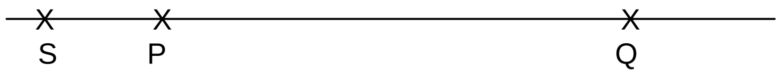
Lage von P und Q bzgl. der Ebene E:
.
Aufstellen einer Hilfsgerade k durch P und Q:

k: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$

Berechung des Schnittpunktes von k mit E:
$3 \cdot (18 - 20s) + 4 \cdot (-9 + 10s) + 5 \cdot (1 - 10s) = 30 \Rightarrow 54 - 60s - 36 + 40s + 5 - 50s = 30$
$\Rightarrow 23 - 70s = 30 \Rightarrow s = -0{,}1$

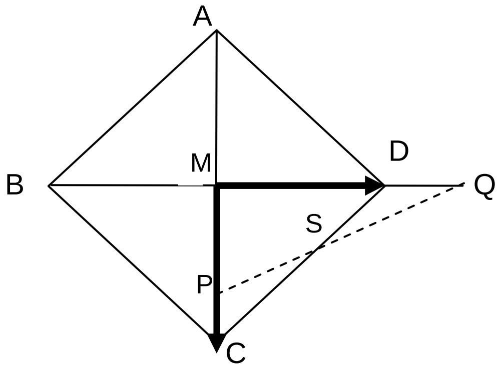
Für den Schnittpunkt S gilt nun: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} - 0{,}1 \cdot \overrightarrow{PQ}$

Aufgrund des negativen Wertes von s liegt der Punkt S gemäß der Skizze nicht zwischen den Punkten P und Q.



Somit liegen P und Q nicht auf verschiedenen Seiten von E.

Aufgabe II 2.1



1.Schritt: Festlegung zweier linear unabhängiger Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{MC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{MD}$

2.Schritt: Festlegung eines geschlossenen Vektorzuges: $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SP} = \vec{0}$

3.Schritt: Umschreiben des Vektorzuges mit den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\overrightarrow{PC} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{1}{4} \cdot \vec{a}$$

$$\overrightarrow{CS} = r \cdot \overrightarrow{CD} = r \cdot \left(-\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$\overrightarrow{SP} = t \cdot \overrightarrow{QP} = t \cdot \left(-\frac{5}{4} \cdot \vec{b} + \frac{3}{4} \cdot \vec{a}\right)$$

Zusammengefasst in einem Vektorzug: $\frac{1}{4}\vec{a} + r \cdot \left(-\vec{a} + \vec{b}\right) + t \cdot \left(-\frac{5}{4} \cdot \vec{b} + \frac{3}{4} \cdot \vec{a}\right) = \vec{0}$

4.Schritt: Umsortieren nach $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\left(\frac{1}{4} - r + \frac{3}{4}t\right) \cdot \vec{a} + \left(r - \frac{5}{4}t\right) \cdot \vec{b} = \vec{0}$$

Da die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, folgt daraus:

$\frac{1}{4} - r + \frac{3}{4}t = 0$ und $r - \frac{5}{4}t = 0$

Die Lösung des Gleichungssystems ergibt $r = \frac{5}{8}$ und $t = \frac{1}{2}$

Da $\overrightarrow{CS} = \frac{5}{8} \cdot \overrightarrow{CD}$ gilt, folgt daraus, dass der Punkt S die Strecke CD im Verhältnis 5:3 teilt.