Pflichtteilaufgaben zu Beschreiben und Begründen

Baden-Württemberg

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

September 2016

Abituraufgaben (Haupttermin)

Aufgabe 1: (Abiturprüfung 2016)

Von zwei Kugeln K_1 und K_2 sind die Mittelpunkte M_1 und M_2 sowie die Radien r_1 und r_2 bekannt. Die Kugeln berühren einander von außen im Punkt B.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man B bestimmen kann.

Aufgabe 2: (Abiturprüfung 2015)

Mit $V = \pi \cdot \int_0^4 \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^2 dx$ wird der Rauminhalt eines Körpers berechnet.
Skizzieren Sie diesen Sachverhalt und beschreiben Sie den Körper.

Aufgabe 3: (Abiturprüfung 2014)

Gegeben sind der Mittelpunkt einer Kugel sowie eine Ebene.
Die Kugel berührt diese Ebene.
Beschreiben Sie, wie man den Kugelradius und den Berührpunkt bestimmen kann.

Aufgabe 4: (Abiturprüfung 2013)

Gibt es eine ganzratioale Funktion vierten Grades, deren Graph drei Wendepunkte besitzt ?
Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5: (Abiturprüfung 2012)

Gegeben sind eine Ebene E und eine Gerade g, die in E liegt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung einer Geraden h ermitteln kann, die orthogonal zu g ist und ebenfalls in E liegt.

Aufgabe 6: (Abiturprüfung 2011)

Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf g liegt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man denjenigen Punkt B auf g bestimmt, der den kleinsten Abstand von A hat.

Aufgabe 7: (Abiturprüfung 2010)

Die Gerade g und die Ebene E schneiden sich im Punkt S.
Die Gerade g' ist das Bild von g bei Spiegelung an der Ebene E.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um eine Gleichung der Geraden g' zu ermitteln.

Aufgabe 8: (Abiturprüfung 2009)

Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt A im Raum. A liegt nicht auf g.
A wird an der Geraden g gespiegelt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Bildpunkt A' zu bestimmen.

Aufgabe 9: (Abiturprüfung 2008)

Gegeben sind die beiden Ebenen $E_1: \left(\vec{x}-\overrightarrow{p_1}\right)\cdot\overrightarrow{n_1}=0$ und $E_2: \left(\vec{x}-\overrightarrow{p_2}\right)\cdot\overrightarrow{n_2}=0$.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man anhand dieser Normalengleichungen die gegenseitige Lage der beiden Ebenen untersuchen kann.

Aufgabe 10: (Abiturprüfung 2007)

Von einem senkrechten Kreiskegel kennt man die Koordinaten der Spitze S, die Koordinaten eines Punktes P des Grundkreises sowie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der der Grundkreis liegt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Mittelpunkt M und den Radius r des Grundkreises zu bestimmen.

Aufgabe 11: (Abiturprüfung 2006)

Gegeben sind zwei Punkte A und B. Diese liegen bezüglich einer Ebene E symmetrisch.
Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung einer Gleichung von E.

Aufgabe 12: (Abiturprüfung 2005)

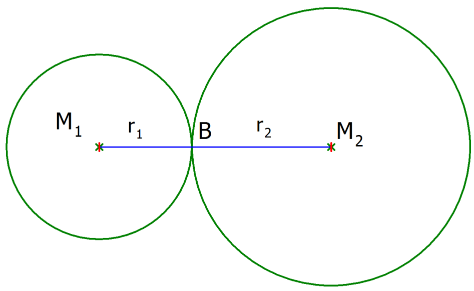
Gegeben sind eine Ebene E und ein Punkt P, der nicht in E liegt.
P wird an E gespiegelt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Bildpunkt P' zu bestimmen.
Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

Aufgabe 13: (Abiturprüfung 2004)
Gegeben sind im Raum eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf g liegt.
Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung des Abstandes von A zu g.

Lösungen

Aufgabe 1:

Skizze:



Um die Koordinaten von B zu bestimmen, benötigt man den Ortsvektor $\overrightarrow{OB}$.

Da der Punkt B r_1 Einheiten von M_1 entfernt ist, muss mit einem Einheitsvektor gearbeitet werden.

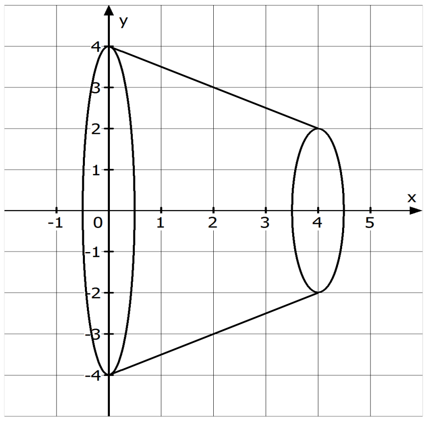
Es sei $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ und $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ der zugehörige Einheitsvektor.

Den Ortsvektor von Punkt B erhält man nun so: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM_1} + r_1 \cdot \overrightarrow{a_0}$

Aufgabe 2:

Skizze:

Die Gerade $y = 4 - \frac{1}{2}x$ rotiert im Intervall zwischen 0 und 4 um die x-Achse.
Es entsteht ein Kegelstumpf, dessen Volumen mit der in der Aufgabe dargestellten Formel berechnet wird.



Aufgabe 3:

1.Schritt:
Man stellt die Gleichung einer Hilfsgeraden g auf. Diese Gerade g steht senkrecht auf der gegebenen Ebene (Richtungsvektor von g ist der Normalenvektor von E) und geht durch den Mittelpunkt M der Kugel (Ortsvektor der Gerade ist $\overrightarrow{OM}$)

2.Schritt:
Der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E ist der gesuchte Berührpunkt B.

3.Schritt:
Den Abstand der Punkte M und B erhält man durch Berechnung von $\left|\overrightarrow{MB}\right|$ und entspricht dem Radius der Kugel.

Aufgabe 4:
Eine solche Funktion gibt es nicht.
Begründung: Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt lautet $f''(x) = 0$.
Die zweite Ableitungsfunktion einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist eine Funktion zweiten Grades.
Die Gleichung $f''(x) = 0$ ist daher eine quadratische Gleichung, die maximal zwei Lösungen besitzt.
Somit kann eine ganzrationale Funktion vierten Grades höchstens zwei Wendepunkte besitzen.

Aufgabe 5:
Da in der Aufgabenstellung nicht vorgegeben ist, in welchem Gleichungstyp die Ebene vorgegeben ist, wird diese nun als Normalenform vorausgesetzt: $\left[\vec{x} - \vec{p}\right] \cdot \vec{n} = 0$.

Die Gerade g habe die Parameterform $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$

Gesucht ist nun die Gleichung der Geraden h in der Parameterform $\vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$

1.Schritt: Da die Gerade h in der Ebene E liegt und g orthogonal schneiden soll, kann der Ortsvektor von g auch für h übernommen werden. Es gilt also $\vec{q} = \vec{p}$

2.Schritt: Der Richtungsvektor von h ist orthogonal zum Richtungsvektor von g.
Somit muss gelten $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ (1)
Da die Gerade h in der Ebene E liegt, ist der Richtungsvektor von h auch orthogonal zum Normalenvektor von E.
Somit muss gelten: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ (2)

Aus (1) und (2) ergibt sich ein Gleichungssystem (2 Gleichungen, 3 Unbekannte) mit unendlich vielen Lösungen für $\vec{v}$. Eine beliebige Lösung mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist ein möglicher Richtungsvektor von h.

(Alternativ könnte man auch das Vektorprodukt nutzen: $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{n}$)

Aufgabe 6:

1.Schritt: Stelle eine Hilfsebene auf, die orthogonal zur Gerade verläuft und den Punkt A Enthält (Richtungsvektor von g ist Normalenvektor der Ebene)

2. Schritt: Schneide die Hilfsebene mit der Gerade. Der Schnittpunkt ist der Punkt B.

Aufgabe 7:

1.Schritt: Berechnung des Schnittpunktes S der Gerade g mit der Ebene E

2.Schritt: Bestimmung eines weiteren von S verschiedenen beliebigen Punktes P auf der Geraden.

Dieser Punkt P wird nun an der Ebene E gespiegelt mit folgenden weiteren Schritten:

3.Schritt: Aufstellen einer Hilfsgerade h, die orthogonal zur Ebene E und durch P verläuft (Richtungsvektor von h ist ein Normalenvektor von E)

4.Schritt: Bestimmung des Schnittpunktes F von h mit E

5. Schritt: Berechnung des Spiegelpunktes P* mit $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$

6.Schritt: Aufstellen der Parameterform der Gerade g' durch die Punkte S und P*
g': $\vec{x} = \overrightarrow{OS} + r \cdot \overrightarrow{SP^*}$

Aufgabe 8:

1.Schritt: Aufstellen einer Hilfsebene H, die den Punkt A enthält und die orthogonal zur Geraden g verläuft (das heißt der Normalenvektor von H ist der Richtungsvektor von g)

2.Schritt: Bestimmung des Schnittpunktes L der Hilfsebene H und der Geraden g

3.Schritt: Berechnung des Punktes A' mit dem Vektorzug $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AL}$

Die Koordinaten des Ortsvektors $\overrightarrow{OA'}$ entsprechen den Koordinaten des Punktes A'.

Aufgabe 9:

- Gilt $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$, dann stehen die beiden Ebenen orthogonal aufeinander und schneiden sich in einer Schnittgerade
- Sind die beiden Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ Vielfache und liegt der Punkt, dessen Koordinaten dem Ortsvektor $\overrightarrow{p_1}$ entsprechen auf der Ebene E_2, dann sind die Ebenen identisch (sie liegen aufeinander).
- Sind die beiden Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ Vielfache und liegt der Punkt, dessen Koordinaten dem Ortsvektor $\overrightarrow{p_1}$ entsprechen nicht auf der Ebene E_2, dann sind die Ebenen echt parallel
- In allen anderen Fällen schneiden sich die Ebenen (nicht orthogonal) in einer Schnittgerade.

Aufgabe 10:

1.) Aufstellen einer Hilfsgerade h, die durch den Punkt S geht und die orthogonal zur Ebene E verläuft, d.h. der Richtungsvektor von h ist der Normalenvektor von E.

2.) Bestimmung des Schnittpunktes der Gerade h und der Ebene E ergibt den Mittelpunkt M des Grundkreises.

3.) Der Abstand von M zu P, der mit $\left|\overrightarrow{MP}\right|$ berechnet wird, ergibt den Radius des Grundkreises.

Aufgabe 11:

Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ steht senkrecht auf dieser Ebene E, also ist dies der Normalenvektor.

Außerdem liegt der Mittelpunkt M von A und B ebenfalls auf E.

Die Ebenengleichung kann in Normalenform geschrieben werden:

E: $[\vec{x} - \vec{m}] \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, wobei $\vec{m}$ der Ortsvektor des Mittelpunktes M ist.

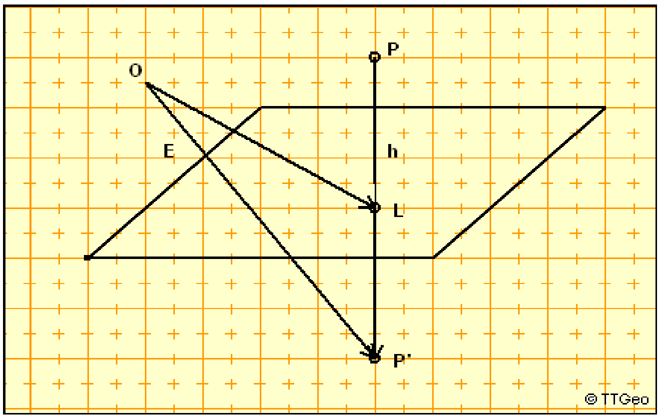
Aufgabe 12:

In folgenden Schritten erhält man den Spiegelpunkt P’ von P bei der Spiegelung an E:

1.Schritt:
Aufstellen einer Hilfsgerade h, die senkrecht zur Ebene steht und durch den Punkt P verläuft (d.h. der Richtungsvektor von g entspricht dem Normalenvektor von E)

2.Schritt:
Berechnung des Schnittpunktes von der Hilfsgerade h mit der Ebene E. Hiermit erhält man den Lotfußpunkt L.

3.Schritt:
Vektorzugverfahren: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{PL}$
Die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{OP'}$ entsprechen den Punktkoordinaten des Punktes P’.



Aufgabe 13:

Zunächst wird die Gleichung einer Hilfsebene E aufgestellt, die orthogonal zur Geraden g ist (Normalenvektor von E = Richtungsvektor von g) und den Punkt A enthält.
Anschließend wird der Schnittpunkt R der Geraden g und der Ebene E ermittelt.
R ist dann der Lotfußpunkt und der Abstand von A zum Lotfußpunkt R entspricht dem Abstand der Geraden zum Punkt A. Der Abstand von R zu A wird ermittelt durch $\overline{RA} = \left|\overrightarrow{RA}\right|$.