Abiturprüfung Mathematik 2009 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Pflichtteil – Aufgaben

Aufgabe 1: (2 VP)

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot \sin(3x+1)$

Aufgabe 2: (2 VP)

Berechnen Sie das Integral $\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \right) dx$

Aufgabe 3: (3 VP)
Lösen Sie die Gleichung $(2x^2 - 8) \cdot (e^{2x} - 6) = 0$.

Aufgabe 4: (4 VP)

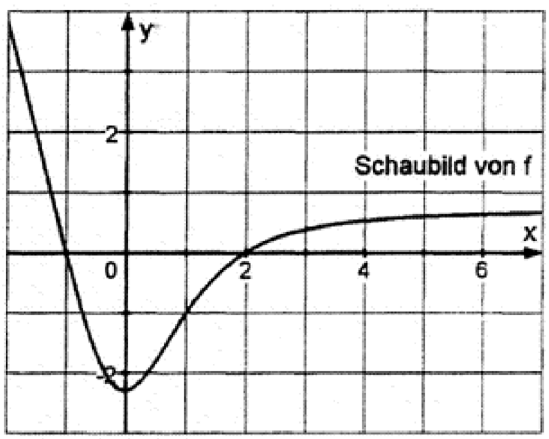
Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 3$ besitzt einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 5: (5 VP)

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.
F ist eine Stammfunktion von f.
a) Welche Aussagen über F ergeben sich daraus im Bereich -2 < x < 7 hinsichtlich
- Extremstellen
- Wendestellen
- Nullstellen ?

Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Begründen Sie, dass F(6) – F(2) > 1 gilt.



Aufgabe 6: (3 VP)

Hinweis: ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 7: (4 VP)

Gegeben sind die Ebene E: $x_1 + x_2 = 4$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Veranschaulichen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem.
b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.
c) Bestimmen Sie den Abstand des Ursprungs von der Ebene E.

Aufgabe 8: (3 VP)

Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt A im Raum. A liegt nicht auf g.
A wird an der Geraden g gespiegelt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Bildpunkt A' zu bestimmen.

Abiturprüfung Mathematik 2009 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Pflichtteil – Lösungen

Aufgabe 1:
Die Ableitungsfunktion wird mit der Produktregel und der Kettenregel ermittelt:

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ mit $u(x) = x^2$, $v(x) = \sin(3x+1)$, $u'(x) = 2x$,
$v'(x) = \cos(3x+1) \cdot 3$ (Kettenregel)

Anwendung der Produktregel:
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 2x \cdot \sin(3x+1) + 3x^2 \cdot \cos(3x+1)$

Aufgabe 2:

$$\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \right) dx = \int_4^9 \left(2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) dx = \left[4 \cdot x^{\frac{1}{2}} - x \right]_4^9 = \left[4 \cdot \sqrt{x} - x \right]_4^9 = 4 \cdot 3 - 9 - (4 \cdot 2 - 4) = -1$$

Aufgabe 3:

$(2x^2 - 8) \cdot (e^{2x} - 6) = 0$

Das Produkt ist genau dann 0, wenn einer der beiden Faktoren 0 ergibt:

1.Faktor: $2x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$
2.Faktor: $e^{2x} - 6 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 6 \Leftrightarrow 2x = \ln 6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln 6$
Lösungsmenge: L = { 2 ; -2 ; $\frac{1}{2} \ln 6$ }

Aufgabe 4:

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6x - 1 \Rightarrow f''(x) = -6x + 6 \Rightarrow f'''(x) = -6$

Berechnung des Wendpunktes: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
Da $f'''(1) = -6 \neq 0$ existiert bei x = 1 eine Wendestelle.
Mit $f(1) = -2$ folgt WP(1/-2).

Die Steigung der Tangente im Wendepunkt beträgt $f'(1) = 2$.

Aufstellen der Tangentengleichung mit $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$ mit u = 1:
$y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1) \Rightarrow y = 2(x-1) + (-2) \Rightarrow y = 2x - 4$

Aufgabe 5:

a) An der Stelle x = -1 und an der Stelle x = 2 besitzt f Nullstellen.
Bei x = -1 existiert ein Vorzeichenwechsel von + nach -, dort besitzt F einen Hochpunkt.
Bei x = 2 existiert ein Vorzeichenwechsel von – nach +, dort besitzt F einen Tiefpunkt.
An der Stelle x = 0 besitzt f einen Extrempunkt, daher hat F an dieser Stelle einen Wendepunkt.
Ob F in diesem Intervall Nullstellen besitzt, kann nicht beurteilt werden, da es keine eindeutige Stammfunktion F von f gibt (aufgrund der Integrationskonstanten C).

b) Es gilt $F(6) - F(2) = \int_2^6 f(x)dx$. Es handelt sich anschaulich um die Fläche, die im Intervall $2 \le x \le 6$ zwischen dem Schaubild von f und der x-Achse existiert.
Durch die Zusammensetzung der Kästchen kann man erkennen, dass hierdurch eine Fläche entsteht, die größer als 1 ist. Deshalb ist die Behauptung wahr.

Aufgabe 6:

Prüfung der linearen Unabhängigkeit von $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$:

Lösung des Gleichungssystems $r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

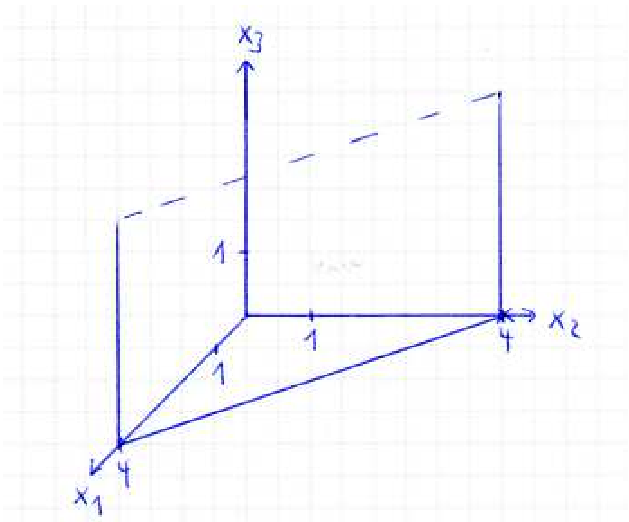
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} |\cdot(-3) \\ |\cdot 2 \\ \end{array} \qquad |\cdot 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -10 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Daraus folgt eindeutig t = 0, s = 0 und r = 0. Damit sind die Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe 7:

a) Zur Veranschaulichung der Ebene müssen die Durchstoßpunkte von E mit den Koordinatenachsen berechnet werden:
Schnittpunkt mit der x_1-Achse: $S_{x_1}(x_1/0/0) \Rightarrow S_{x_1}(4/0/0)$
Schnittpunkt mit der x_2-Achse: $S_{x_2}(0/x_2/0) \Rightarrow S_{x_2}(0/4/0)$
Schnittpunkt mit der x_3-Achse: $S_{x_3}(0/0/x_3)$:
Dies führt auf den Widerspruch 0 = 4. Das heißt, dass dieser Schnittpunkt nicht existiert.
Die Ebene E ist parallel zur x_3-Achse.



b) Zur Ermittlung der gegenseitige Lage der Gerade und der Ebene wird der Schnittpunkt von g und E berechnet.
Einsetzen der Zeilen der Parameterform von g in die Koordinatengleichung von E:

$(1+r)+(3-r)=4 \Leftrightarrow 4=4$

Diese Gleichung besitzt unendlich viele Lösungen. Dies bedeutet, dass die Gerade g in der Ebene E liegt.

c) Hesse'sche Normalform von E: $\frac{x_1+x_2-4}{\sqrt{2}}=0$

Einsetzen des Ursprungs in die HNF ergibt den Abstand $d(O,E)=\left|\frac{0+0-4}{\sqrt{2}}\right|=\frac{4}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 8:

1.Schritt: Aufstellen einer Hilfsebene H, die den Punkt A enthält und die orthogonal zur Geraden g verläuft (das heißt der Normalenvektor von H ist der Richtungsvektor von g)

2.Schritt: Bestimmung des Schnittpunktes L der Hilfsebene H und der Geraden g

3.Schritt: Berechnung des Punktes A' mit dem Vektorzug $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{AL}$

Die Koordinaten des Ortsvektors $\overrightarrow{OA'}$ entsprechen den Koordinaten des Punktes A'.