Hauptprüfung Abiturprüfung 2015 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Pflichtteil

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

März 2015

Aufgabe 1: (2 VP)

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \left(4 + e^{3x}\right)^5$.

Aufgabe 2: (2 VP)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi} \left(4x - \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) dx$

Aufgabe 3: (3 VP)

Lösen Sie die Gleichung $\left(x^3 - 3x\right) \cdot \left(e^{2x} - 5\right) = 0$

Aufgabe 4: (4 VP)

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat im Ursprung einen Hochpunkt und an der Stelle x = 2 die Tangente mit der Gleichung $y = 4x - 12$.

Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

Aufgabe 5: (5 VP)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

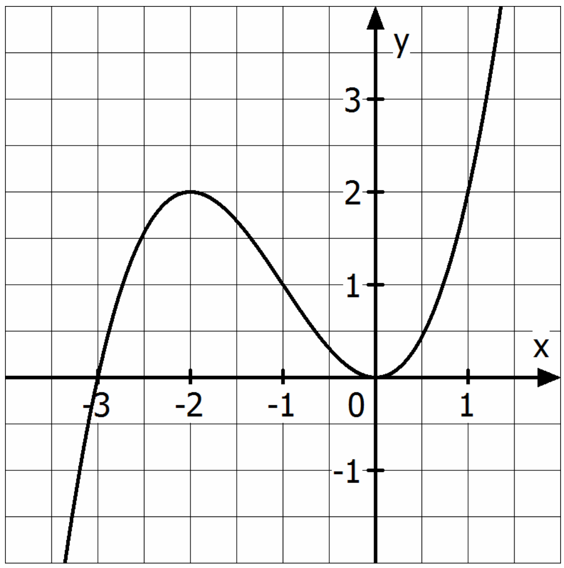
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(1) Der Graph von f hat bei x = -3 einen Tiefpunkt.

(2) f(-2) < f(-1)

(3) $f''(-2) + f'(-2) < 1$

(4) Der Grad der Funktion f ist mindestens vier.



Aufgabe 6: (4 VP)

Gegeben sind die drei Punkte A(4/0/4), B(0/4/4) und C(6/6/2).

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm ergänzt. Veranschaulichen Sie durch eine Skizze, wie viele solcher Punkte es gibt.

Aufgabe 7: (3 VP)
Gegeben ist die Ebene E: $4x_1 + 3x_3 = 12$.
a) Stellen Sie E in einem Koordinatensystem dar.
b) Bestimmen Sie alle Punkte der x_3-Achse, die von E den Abstand 3 haben.

Aufgabe 8: (4 VP)
Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden:

Rot: 20% Grün: 30% Blau: 50%

Das Glücksrad wird n-mal gedreht.
Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.
a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.

Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
P(X=k)	0,01	0,06	0,14	0,21	0,22	0,17	0,11	0,05	...

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens dreimal Rot angezeigt wird.

c) Entscheiden Sie , welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann:
20, 25 oder 30
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 9: (3 VP)

Mit $V = \pi \cdot \int_0^4 \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^2 dx$ wird der Rauminhalt eines Körpers berechnet.
Skizzieren Sie diesen Sachverhalt und beschreiben Sie den Körper.

Lösungen

Aufgabe 1:

Für die Ableitungsfunktion wird die Kettenregel benötigt:

$$f'(x) = 5 \cdot \left(4 + e^{3x}\right)^4 \cdot e^{3x} \cdot 3 = 15e^{3x} \cdot \left(4 + e^{3x}\right)^4$$

Aufgabe 2:

$$\int_0^{\pi} \left(4x - \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)dx = \left[2x^2 + \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{0{,}5}\right]_0^{\pi} = \left[2x^2 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\pi^2 + 2\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) - (0 + 2\cos(0)) = 2\pi^2 - 2$$

Aufgabe 3:

$\left(x^3 - 3x\right) \cdot \left(e^{2x} - 5\right) = 0$

Anwendung des Satzes vom Nullprodukt:

Gleichung I) $x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x \cdot \left(x^2 - 3\right) = 0$

Daraus folgt $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{3}$; $x_3 = -\sqrt{3}$

Gleichung II) $e^{2x} - 5 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 5 \Rightarrow 2x = \ln(5) \Rightarrow x = \frac{\ln(5)}{2}$

Lösungsmenge $L = \{0 \; ; \; -\sqrt{3} \; ; \; \sqrt{3} \; ; \; \frac{\ln(5)}{2}\}$

Aufgabe 4:

Ansatz für die Funktionsgleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Aufstellen der Bedingungen:

Ursprung liegt auf Schaubild: $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

Hochpunkt bei x = 0: $f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Steigung der Tangente an der Stelle x = 2 ist 4: $f'(2) = 4 \Rightarrow 12a + 4b + c = 4$ (*)

Einsetzen von x = 2 in die Tangentengleichung ergibt $y = 4 \cdot 2 - 12 = -4$

Bedingung: $f(2) = -4 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = -4$ (**)

Einsetzen von d = 0 und c = 0 in (*) und (**) ergibt folgendes Gleichungssystem:

12a	+4b	=	4	(1)
8a	+4b	=	−4	(2)

(1) - (2) ergibt $4a = 8 \Rightarrow a = 2$
Einsetzen von a = 2 in (2): $16 + 4b = -4 \Rightarrow 4b = -20 \Rightarrow b = -5$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = 2x^3 - 5x^2$

Aufgabe 5:

(1) Die Aussage ist wahr. Die Ableitungsfunktion f' hat an der Stelle x = -3 mit einem Vorzeichenwechsel von - nach +.

(2) Die Aussage ist wahr. Im Intervall -2 < x -1 ist die erste Ableitungsfunktion oberhalb der x-Achse, somit ist f in diesem Intervall streng monoton wachsend.
Daher gilt f(-2) < f(-1).

(3) Die Aussage ist falsch. Es gilt $f'(-2) = 2$ (y-Wert des abgebildeten Schaubildes) und
$f''(-2) = 0$ (Steigung des abgebildeten Schaubildes an der Stelle x = -2)
Also ist $f''(-2) + f'(-2) = 0 + 2 = 2 > 1$.

(4) Die Aussage ist wahr. Das abgebildete Schaubild ist eine Funktion, die mindestens Grad 3 besitzt
Begründung 1: Das Schaubild besitzt eine einfache und eine doppelte Nullstelle
Begründung 2: Das Schaubild besitzt zwei Extrempunkte

Daher besitzt das Schaubild von f mindestens Grad 4.

Aufgabe 6:

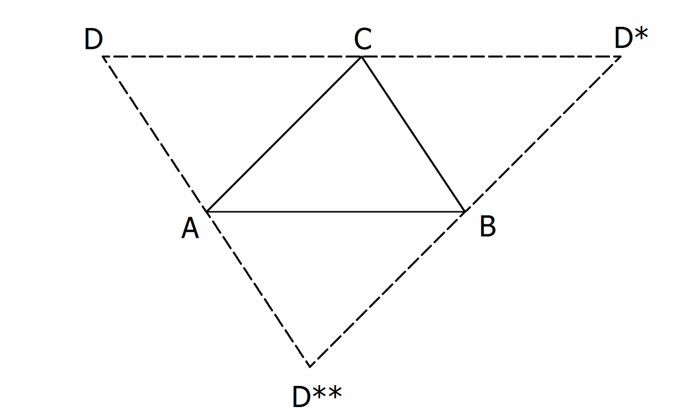
a) Berechnung der Seitenlängen des Dreiecks:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+16+0} = \sqrt{32}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{36+4+4} = \sqrt{44}$

Da zwei der drei Seiten gleich lang sind, ist das Dreieck gleichschenklig.

b) Skizze:



Es gibt drei solcher Punkte.

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ also D(10/2/2)

$\overrightarrow{OD^*} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ also D*(2/10/2)

$\overrightarrow{OD^{**}} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ also D**(-2/-2/6)

Aufgabe 7:

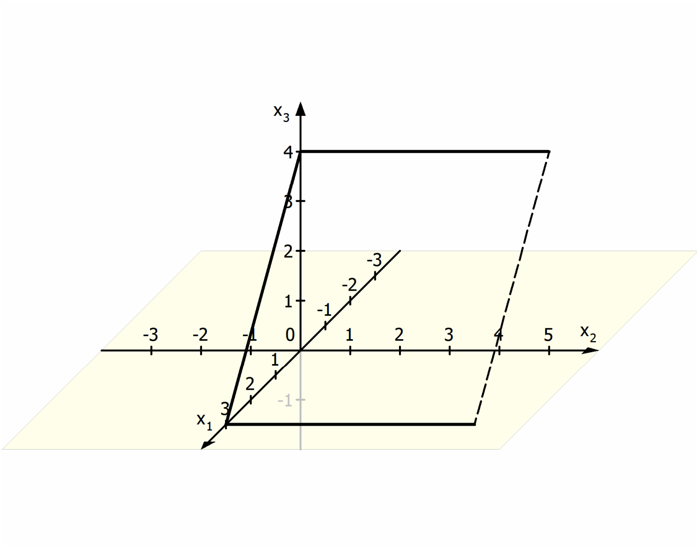
a) Schnittpunkte der Ebene E: $4x_1 + 3x_3 = 12$ mit den Koordinatenachsen:

$S_{x_1}(x_1 / 0 / 0) = S_{x_1}(3 / 0 / 0)$

$S_{x_2}(0 / x_2 / 0)$ existiert nicht, da dies auf einen Widerspruch 0 = 12 führt

$S_{x_3}(0 / 0 / x_3) = S_{x_3}(0 / 0 / 4)$

Die Ebene ist folglich parallel zur x_2-Achse.



b) Ein Punkt auf der x_3-Achse hat die Koordinaten $P(0 / 0 / a)$.

HNF von E: $\dfrac{4x_1 + 3x_3 - 12}{5} = 0$

Einsetzen des Punktes P ergibt: $\left|\dfrac{3a - 12}{5}\right| = 3$

Fall 1: $\dfrac{3a-12}{5} = 3 \Rightarrow 3a - 12 = 15 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow P_1(0/0/9)$

Fall 2: $\dfrac{3a-12}{5} = -3 \Rightarrow 3a - 12 = -15 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow P_2(0/0/-1)$

Aufgabe 8:

a) X ist binomialverteilt, da es für jeden der n Versuche nur zwei Ausgänge gibt:
"Rot" (Treffer) und "Nicht Rot" (kein Treffer)
Außerdem ist die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer stets p = 0,2.

b) P(mindestens dreimal rot) =
$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (0{,}01 + 0{,}06 + 0{,}14) = 1 - 0{,}21 = 0{,}79$

c) Bei n = 20 würde $E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}2 = 4$ gelten.
Bei n = 25 wäre E(X) = 5 und bei n = 30 wäre E(X) = 6.
Da gemäß Tabelle die größte Wahrscheinlichkeit bei 4 Treffern liegt, muss der Erwartungswert auch ungefähr 4 sein. Daher kommt nur n = 20 in Frage.

Aufgabe 9:

Skizze:

Die Gerade $y = 4 - \frac{1}{2}x$ rotiert im Intervall zwischen 0 und 4 um die x-Achse.

Es entsteht ein Kegelstumpf, dessen Volumen mit der in der Aufgabe dargestellten Formel berechnet wird.