Abiturprüfung Mathematik 2011 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis I 1

Aufgabe I 1

Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a mit

$$f_a(x) = \frac{4}{x^3 + 4a} \quad \text{gegeben.}$$

Ihr Schaubild ist K_a.

a) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge von f_2.
Geben Sie die Asymptoten von K_2 an.
Das Schaubild K_2 besitzt genau zwei Wendepunkte.
Bestimmen Sie deren Koordinaten.
Welcher Punkt P(u/v) von K_2 mit $0 \leq u \leq 2$ hat vom Punkt A(1/0) den kleinsten Abstand ?
(7 VP)

b) Zeigen Sie, dass K_2 mit keinem anderen Schaubild K_a einen gemeinsamen Punkt besitzt.
Bestimmen Sie den Punkt Q_a, in dem K_a eine waagrechte Tangente besitzt.
Wo liegen alle Punkte Q_a ? (5 VP)

c) Die Schaubilder K_1 und K_2 schließen mit der y-Achse und der Geraden x = 2 eine Fläche ein.
Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Drehkörper, der als Düse benutzt wird (Längeneinheit 1 cm).
Berechnen Sie die Masse einer solchen Düse, die aus Titan mit einer Dichte von $4{,}5\ \frac{g}{cm^3}$ besteht.
Diese Düse wurde aus einem massiven Kegel mit der Höhe 3 cm und der x-Achse als Rotationsachse ausgefräst.
Welchen Radius hatte der Grundkreis dieses Kegels mindestens ? (6 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2011 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil - Analysis I 1

Aufgabe I 1

a) $f_2(x) = \dfrac{4}{x^3+8}$

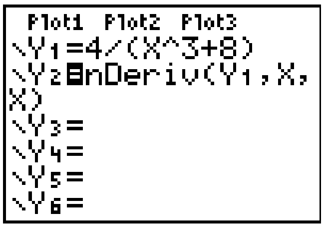
Maximale Definitionsmenge: $x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x = -2$ und daher D = $\mathbb{R}$ \ {-2}

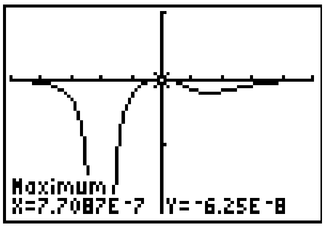
Asymptoten:
Senkrechte Asymptote x = -2 (Polstelle mit Vorzeichenwechsel)
Waagrechte Asymptote: y = 0 (Nennergrad > Zählergrad)

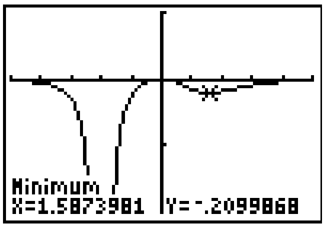
Wendepunkte:

Notwendige und hinreichende Bedingung: $f_2''(x) = 0$ und $f_2'''(x) \neq 0$

Schaubild der Ableitungsfunktion mit dem GTR:





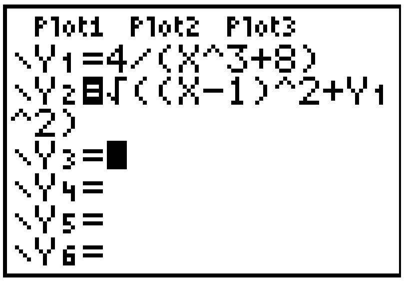


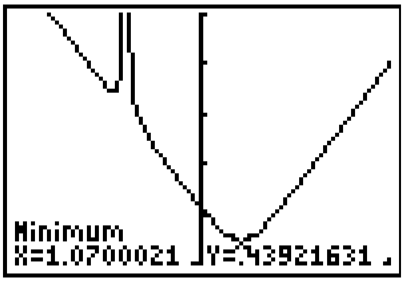
Die Ableitungsfunktion besitzt bei x = 0 und bei x = 1,59 Extremstellen.
Somit besitzt dort das Schaubild von f einen Wendepunkt.

$W_1(0 / f_2(0)) = W_1(0 / 0{,}5)$ und $W_2(1{,}59 / f_2(1{,}59)) = W_2(1{,}59 / 0{,}33)$

Kleinster Abstand von A(1/0):
Der Punkt P besitzt die allgemeinen Koordinaten $P(u / f_2(u))$.

Der Abstand von P zu A ergibt sich mit der Formel $d(u) = \sqrt{(u-1)^2 + (f_2(u) - 0)^2}$
Gesucht wird der Wert von u, für die die Funktion d(u) minimal wird.





Die Funktion d(u) wird minimal für u = 1,07 mit d(1,07) = 0,44.
Der minimale Abstand beträgt 0,44 und der Punkt P besitzt die Koordinaten
$P(1{,}07 / f_2(1{,}07)) = P(1{,}07 / 0{,}434)$.

b) Schnittpunkt von K_2 mit K_a mit $a \neq 2$

$$f_a(x) = f_2(x) \Rightarrow \frac{4}{x^3+4a} = \frac{4}{x^3+8} \Leftrightarrow x^3 + 4a = x^3 + 8 \Leftrightarrow a = 2$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $a \neq 2$.
Damit gibt es keinen Schnittpunkt was zu zeigen war.

Punkt mit waagrechter Tangente:
Für die Ableitung wird die Funktion umgeschrieben: $f_a(x) = 4 \cdot \left(x^3 + 4a\right)^{-1}$

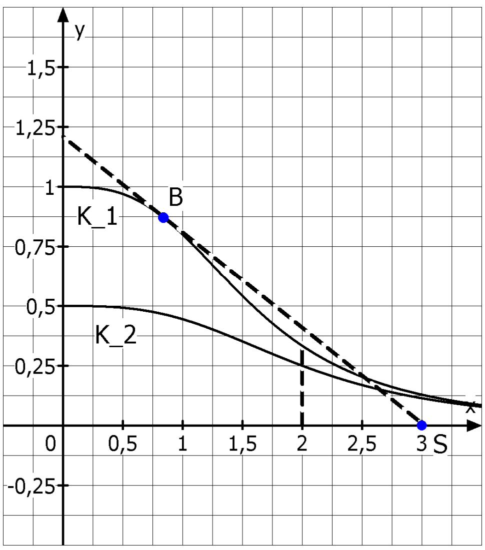
$$\Rightarrow f_a'(x) = -4 \cdot \left(x^3+4a\right)^{-2} \cdot 3x^2 = \frac{-12x^2}{(x^3+4a)^2}$$

$$f_a'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-12x^2}{(x^3+4a)^2} = 0 \Rightarrow 12x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

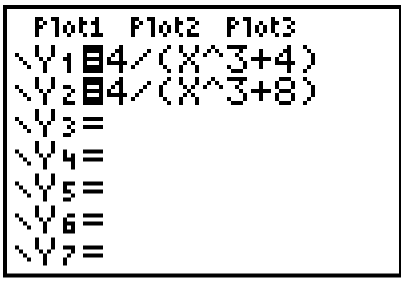
Im Punkt $Q_a(0 / \frac{1}{a})$ besitzt das Schaubild von f_a eine waagrechte Tangente.

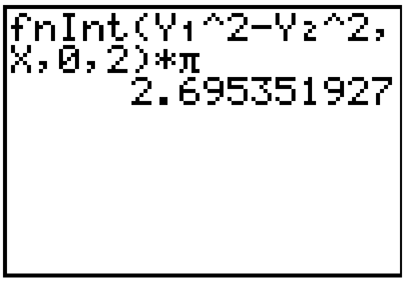
Alle Punkte Q_a liegen auf ihrer Ortskurve, und diese lautet x = 0 (also die y-Achse).
Da $\frac{1}{a} \neq 0$ ist, kann der Ursprung O(0/0) keinem Punkt Q_a entsprechen.

c)



Das Volumen des Drehkörpers beträgt $V = \pi \cdot \int_0^2 \left(f_1(x)^2 - f_2(x)^2\right) dx = 2{,}695\ \text{cm}^3$





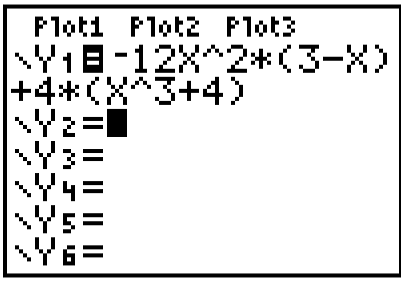
Masse der Düse = $2{,}695\text{cm}^3 \cdot 4{,}5\dfrac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 12{,}1$ g.

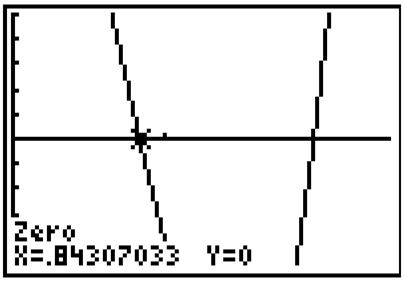
Um den Radius des Kegels zu bestimmen, wird vom Punkt S(3/0) aus eine Tangente an das Schaubild von K_1 gelegt (gestrichelte Gerade im Schaubild).

Die allgemeine Tangentengleichung im Berührpunkt $B(u\,/\,f_1(u))$ lautet:
$y = f_1'(u) \cdot \left(x - u\right) + f_1(u)$

Einsetzen des gegebenen Tangentenpunktes S(3/0) ergibt:
$0 = f_1'(u) \cdot (3 - u) + f_1(u)$

$$\Rightarrow 0 = \frac{-12u^2}{(u^3+4)^2} \cdot \left(3 - u\right) + \frac{4}{u^3+4} \quad | \cdot (u^3+4)^2$$
$$\Rightarrow 0 = -12u^2 \cdot (3 - u) + 4(u^3 + 4)$$





Im Bereich $0 \le u \le 2$ gibt es die Lösungen u = 0,843 und u = 2.

Laut der Skizze mit der gestrichelten Geraden kommt als x-Wert für B nur 0,843 in Frage.
Es gilt für den Berührpunkt $B(0{,}843\,/\,f_1(0{,}843)) = B(0{,}843\,/\,0{,}87)$

Die Tangentengleichung lautet $y = f_1'(0{,}843) \cdot \left(x - 0{,}843\right) + f_1(0{,}843)$
$$\Rightarrow y = -0{,}4 \cdot (x - 0{,}843) + 0{,}87 \Rightarrow y = -0{,}4x + 1{,}21$$

Der y-Achsenabschnitt der Tangente beträgt 1,21 und dies entspricht auch dem Mindestradius des Grundkreises in cm.