Abiturprüfung Mathematik 2005 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Analysis – Aufgabe I, 2

Gegeben sind zwei Funktionen f und g durch

$$f(x) = \cos x \text{ mit } D_f = [-\pi;\pi] \text{ und}$$
$$g(x) = \frac{1}{1-\cos x} \text{ mit } D_g = D_f \setminus \{0\}.$$

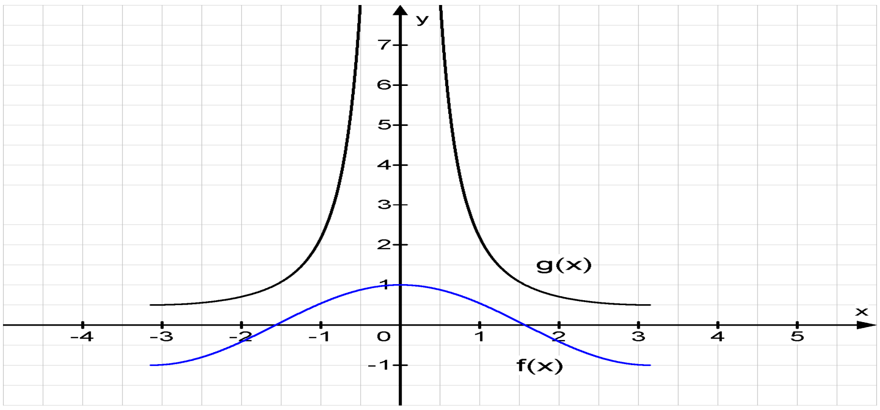
a) Skizziere die Schaubilder von f und g.
Das Schaubild von f schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.
Wie groß ist deren Inhalt ?
Die Funktion f soll nun durch eine quadratische Funktion h ersetzt werden, welche die gleichen Nullstellen wie f hat. Bestimme eine Gleichung von h so, dass die Schaubilder von h und f mit der x-Achse gleich große Flächen einschließen.
(7 VP)

b) Bestimme die Punkte auf dem Schaubild von g, die vom Hochpunkt des Schaubilds von f den kleinsten Abstand haben.
(4 VP)

c) Für jedes t > 0 ist eine Funktion f_t gegeben durch
$f_t(x) = t \cdot \cos(x)$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.
Das Schaubild der Funktion f_t schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.
Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Drehkörper.
Berechne dessen Volumen in Abhängigkeit von t.
Berechne t* so, dass die 1.Winkelhalbierende das Schaubild von f_{t^*} rechtwinklig schneidet.
(7 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2005 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Analysis – Lösung Aufgabe I, 2

a) Schaubilder von f und g:



Flächeninhalt:

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = [\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(-\frac{\pi}{2}) = 1-(-1) = 2$$

Aufstellen der ganzrationalen Funktion h:
Der allgemeine Ansatz $h(x) = ax^2 + bx + c$ ist hier umständlich, da von h die beiden Nullstellen bereits bekannt sind.

Besserer Ansatz: $h(x) = a \cdot (x - \frac{\pi}{2}) \cdot (x + \frac{\pi}{2}) = a \cdot (x^2 - \frac{\pi^2}{4})$

Nun wird a so gewählt, dass gilt: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx = 2$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cdot (x^2 - \frac{\pi^2}{4})dx = a \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{\pi^2}{4} \cdot x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{\pi^3}{8} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{\pi^3}{8}\right)$$

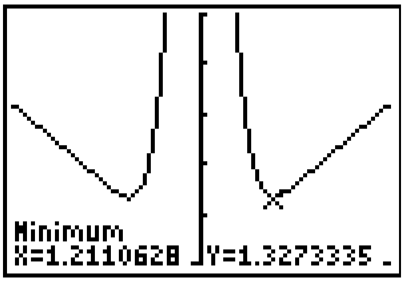
$$= a \cdot \left(-\frac{1}{6}\pi^3\right)$$

$$-\frac{1}{6}a \cdot \pi^3 = 2 \Rightarrow a = -\frac{12}{\pi^3} \Rightarrow h(x) = -\frac{12}{\pi^3} \cdot (x^2 - \frac{\pi^2}{4}) = -\frac{12}{\pi^3}x^2 + \frac{3}{\pi}$$

b) Der Hochpunkt des Schaubildes von f ist H(0/1).
Gesucht sind nun Punkte auf dem Schaubild von g, die von H(0/1) einen minimalen Abstand besitzen. Hierbei handelt es sich um eine Extremwertaufgabe, bei der zunächst eine Funktionsgleichung (=Zielfunktion) aufzustellen ist, die für einen beliebigen Punkt des Schaubildes von g den Abstand zu H(0/1) beschreibt.
Der Punkt auf dem Schaubild von g sei $B(u/g(u))$ mit $u \in D_f \setminus \{0\}$.
Der Abstand von B zu H ist

$$d(u) = \sqrt{(u-0)^2 + (g(u)-1)^2} = \sqrt{u^2 + \left(\frac{1}{1-\cos(u)} - 1\right)^2}$$

Das Minimum des Schaubildes von d(u) wird mit Hilfe des GTR bestimmt:



Das Minimum liegt bei u = 1,211 und bei u = -1,211 mit dem minimalen Abstand von 1,327.

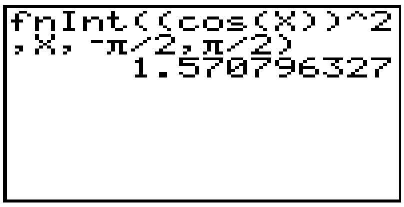
Punkte auf dem Schaubild von g: P(1,211/g(1,211)) = (1,211/1,54)
Q(-1,211/g(-1,211)) = (-1,211/1,54)

c) Volumen Rotationskörper:

Die Nullstellen des Schaubildes von $f_t(x) = t \cdot \cos(x)$ sind $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{\pi}{2}$

Volumen des Rotationskörpers = $\pi \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (t \cdot \cos(x))^2 \, dx = t^2 \cdot \pi \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^2 \, dx$

Dieses Integral kann nun – da es vom Parameter t unabhängig ist – mit dem GTR berechnet werden:



$V = 1{,}57 \cdot t^2 \cdot \pi$ (GTR)

Berechnung von t*:
Die 1. Winkelhalbierende hat die Gleichung $y = x$.
Für einen rechtwinkligen Schnitt müssen die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sein:

(1) $f_{t^*}(x) = x$ (allgemeine Schnittbedingung) und

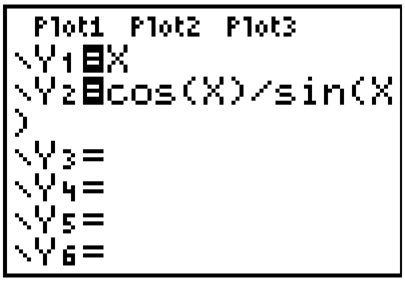
(2) $f'_{t^*}(x) = -1$ (Orthogonalität zur 1.Winkelhalbierenden)

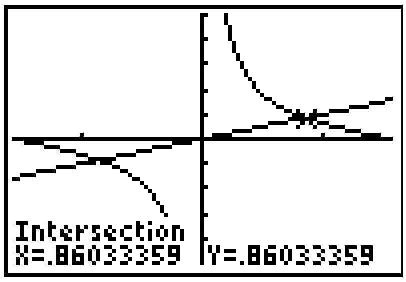
Aus (1): $t \cdot \cos(x) = x$

Aus (2): $-t \cdot \sin(x) = -1 \Rightarrow t = \dfrac{1}{\sin(x)}$ in (1)

$$\frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) = x \text{ für } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

Diese Gleichung muss mit Hilfe des GTR gelöst werden:





Als Lösung ergibt sich x = 0,8603 und daraus t* = $\dfrac{1}{\sin(0{,}8603)} = 1{,}32$

Als Lösung ergibt sich x = -0,8603 und daraus t* = -1,32 < 0, was nicht zulässig ist laut Aufgabenstellung.

Also gibt es als einzige Lösung t* = 1,32