Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Pflichtteil – Aufgaben

Aufgabe 1: (2 VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{2x^2}{2x^2-3}$.
Bilden Sie die Ableitung von f und fassen Sie diese so weit wie möglich zusammen.

Aufgabe 2: (2 VP)

G ist eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x)=2-3\cdot\sin(4x)$.
Der Punkt P(0/1) liegt auf dem Schaubild von G. Bestimmen Sie einen Funktionsterm von G.

Aufgabe 3: (3 VP)

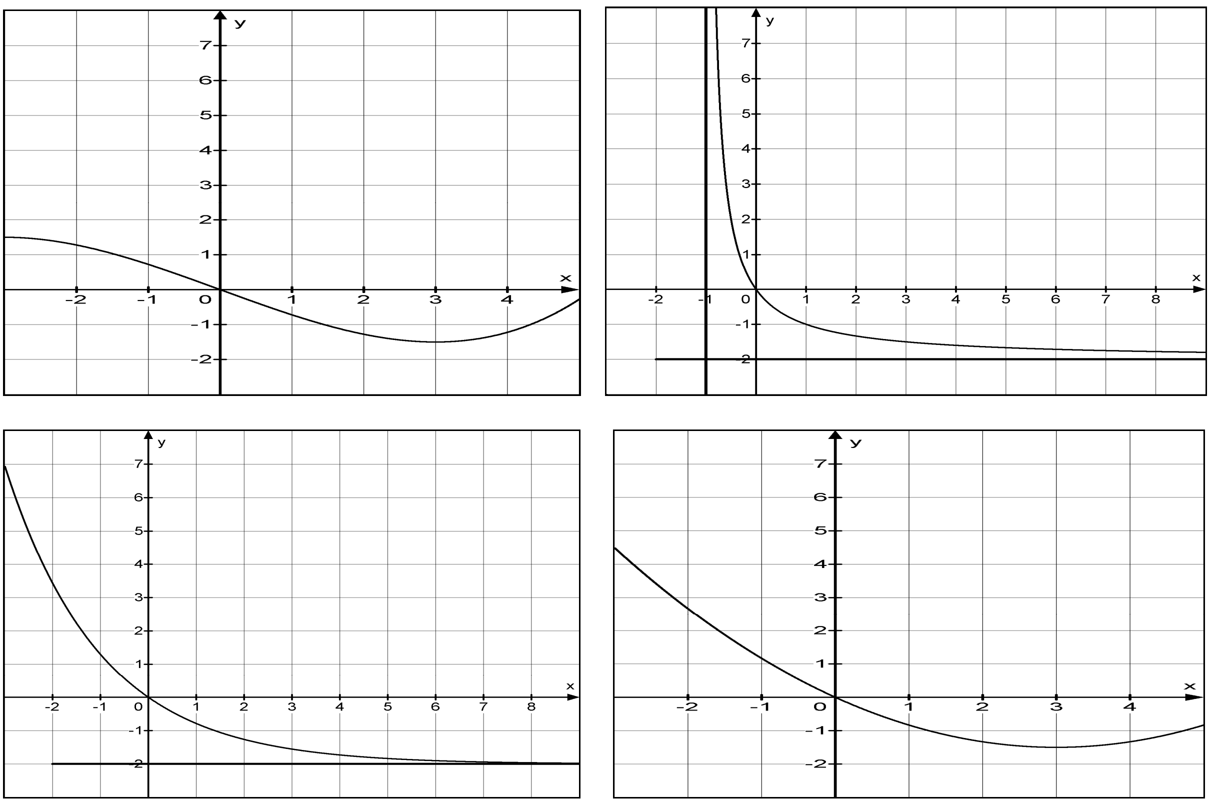
Lösen Sie die Gleichung $\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^2}=1 \;\; (x\neq 0)$.

Aufgabe 4: (4 VP)

Für eine ganzrationale Funktion h zweiten Grades gilt: T(-1/-4) ist Tiefpunkt und Q(2/5) ein weiterer Punkt ihres Schaubilds. Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von h.

Aufgabe 5: (5 VP)

Gegeben sind die Schaubilder von vier Funktionen, jeweils mit sämtlichen Asymptoten:



Drei dieser vier Schaubilder werden beschrieben durch die Funktionen f, g und h mit

$f(x) = \frac{-2x}{x+a}$, $g(x) = -2 + b \cdot e^{-0,5x}$, $h(x) = c \cdot x^2 - x$

a) Ordnen Sie den Funktionen f, g und h das jeweils passende Schaubild zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.
b) Bestimmen Sie die Werte für a und b.

Aufgabe 6: (4 VP)

Gegeben sind die zwei parallelen Geraden g und h durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad s,t \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

Aufgabe 7: (3 VP)

Die Ebene E geht durch die Punkte A(1,5/0/0), B(0/3/0) und C(0/0/6).

Untersuchen Sie, ob die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$ parallel zur Ebene E verläuft.

Aufgabe 8: (3 VP)

Gegeben sind die beiden Ebenen $E_1 : \left(\vec{x} - \overrightarrow{p_1}\right) \cdot \overrightarrow{n_1} = 0$ und $E_2 : \left(\vec{x} - \overrightarrow{p_2}\right) \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man anhand dieser Normalengleichungen die gegenseitige Lage der beiden Ebenen untersuchen kann.

Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Pflichtteil – Lösungen

Aufgabe 1:

Hinweis: Da die Quotientenregel ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr im Lehrplan steht, muss die Funktion umgeschrieben werden.

$$f(x) = 2x^2 \cdot \left(2x^2 - 3\right)^{-1}$$

Ableitung mit der Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x) = 4x \cdot \left(2x^2 - 3\right)^{-1} + 2x^2 \cdot (-1) \cdot \left(2x^2 - 3\right)^{-2} \cdot 4x = \frac{4x}{2x^2 - 3} - \frac{8x^3}{(2x^2 - 3)^2}$$

$$= \frac{4x \cdot (2x^2 - 3) - 8x^3}{(2x^2 - 3)^2} = \frac{-12x}{(2x^2 - 3)^2}$$

Hinweis: Mit Hilfe der Quotientenregel würde man die Funktion folgendermaßen ableiten:

$$f(x) = \frac{2x^2}{2x^2 - 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x(2x^2 - 3) - 2x^2 \cdot 4x}{(2x^2 - 3)^2} = \frac{-12x}{(2x^2 - 3)^2}$$

Aufgabe 2:

Da das Schaubild der Stammfunktion G durch einen bestimmten Punkt verlaufen soll, muss die Stammfunktion mit der Integrationskonstanten C aufgestellt werden.

$$G(x) = 2x - 3 \cdot (-\cos(4x)) \cdot \frac{1}{4} + C = 2x + \frac{3}{4}\cos(4x) + C$$

Punktprobe P(0/1): $G(0) = \frac{3}{4} + C = 1 \Rightarrow C = 0{,}25$

Damit ergibt sich: $G(x) = 2x + \frac{3}{4}\cos(4x) + 0{,}25$

Aufgabe 3:

$$\frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 1 \quad | \cdot x^4$$

$$6 + x^2 = x^4 \Rightarrow x^4 - x^2 - 6 = 0$$

Substitution: $u = x^2 \Rightarrow u^2 - u - 6 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$

Daraus folgt $u_1 = 3$ und $u_2 = -2$

Rücksubstitution: $x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$
$x^2 = -2 \Rightarrow$ nicht rücksubstituierbar
Daraus folgt L = { $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$}

Aufgabe 4:

Die Funktion kann mit zwei unterschiedlichen Ansätzen aufgestellt werden.

1.Möglichkeit:
Bei der Funktion handelt es sich um eine Parabel mit Scheitelpunkt T(-1/-4).
Somit kann die Parabel in der so genannten Scheitelform aufgestellt werden (lernt man in der Mittelstufe): $h(x) = a \cdot (x+1)^2 - 4$
Den Wert von a erhält man mit dem Punkt Q(2/5): $5 = a \cdot (2+1)^2 - 4 \Rightarrow a = 1$
Daraus folgt: $h(x) = (x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x - 3$

2.Möglichkeit:
Allgemeiner Ansatz für ganzrationale Funktion 2.Grades: $h(x) = ax^2 + bx + c$
mit $h'(x) = 2ax + b$
Bedingungen:
Punkt T(-1/-4) liegt auf dem Schaubild: $h(-1) = -4 \Rightarrow a - b + c = -4$
An der Stelle x = -1 ist die Steigung 0: $h'(-1) = 0 \Rightarrow -2a + b = 0$
Punkt Q(2/5) liegt auf dem Schaubild: $h(2) = 5 \Rightarrow 4a + 2b + c = 5$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt a = 1, b = 2, c = -3.
Damit gilt: $h(x) = x^2 + 2x - 3$.

Aufgabe 5:

Das Schaubild von f befindet sich rechts oben, da es das einzige Schaubild mit einer Definitionslücke ist.
Da sich die Definitionslücke an der Stelle x = -1 befindet, muss a = 1 sein, also
$f(x) = \frac{-2x}{x+1}$.

Das Schaubild von g befindet sich links unten, da es das einzige Schaubild mit einer waagrechten Asymptote y = -2 ist, die nur für eine Unendlichkeitsrichtung (für $x \to \infty$) gilt.

Der Wert von b ergibt sich anhand einer Punktprobe: O(0/0) liegt auf dem Schaubild
$g(0) = 0 \Rightarrow 0 = -2 + b \cdot e^{-0,5 \cdot 0} \Rightarrow b = 2$ und damit $g(x) = -2 + 2 \cdot e^{-0,5x}$.

Das Schaubild von h befindet sich rechts unten, da es sich um eine nach oben geöffnete Parabel handelt. Das Schaubild links oben kann es nicht sein, da dieses symmetrisch zum Ursprung ist, das Schaubild von h hingegen nicht.

Aufgabe 6:

Der Abstand der beiden Geraden ergibt sich aus dem Abstand des Punktes P(2/9/4) auf der Geraden g von der Geraden h.

Aufstellen der Hilfsebene E, die den Punkt P enthält und senkrecht auf h steht:
E: $6x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -52$

Schnitt der Ebene E mit der Geraden h:
$6(1+6t) - 8(2-8t) + 2(5+2t) = -52$
$\Rightarrow 6 + 36t - 16 + 64t + 10 + 4t = -52 \Rightarrow 104t = -52 \Rightarrow t = -0{,}5$
Schnittpunkt S(-2/6/4)

Der Abstand des Punktes S von P entspricht dem Abstand der beiden Geraden:

d(g,h) = $\left|\overrightarrow{SP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+9+0} = 5$

Aufgabe 7:

Da die Durchstoßpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen gegeben sind, kann die Koordinatengleichung direkt aufgestellt werden:

E: $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$

(andere Möglichkeit: Aufstellen der Parameterform und Umwandeln in die Koordinatengleichung)

Die Gerade ist parallel zur Ebene E, wenn die Gerade und die Ebene keinen Schnittpunkt besitzt:

Berechnung des Schnittpunktes:
$4(-4-2t) + 2(2+3t) + (3+2t) = 6$
$\Rightarrow -16 - 8t + 4 + 6t + 3 + 2t = 6 \Rightarrow -9 = 6$
Dies ist ein Widerspruch, also existiert kein Schnittpunkt.
Damit ist die Gerade g parallel zur Ebene E.

Aufgabe 8:

- Gilt $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$, dann stehen die beiden Ebenen orthogonal aufeinander und schneiden sich in einer Schnittgerade
- Sind die beiden Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ Vielfache und liegt der Punkt, dessen Koordinaten dem Ortsvektor $\overrightarrow{p_1}$ entsprechen auf der Ebene E_2, dann sind die Ebenen identisch (sie liegen aufeinander).
- Sind die beiden Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ Vielfache und liegt der Punkt, dessen Koordinaten dem Ortsvektor $\overrightarrow{p_1}$ entsprechen nicht auf der Ebene E_2, dann sind die Ebenen echt parallel
- In allen anderen Fällen schneiden sich die Ebenen (nicht orthogonal) in einer Schnittgerade.