Abiturprüfung Mathematik 2012 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis I 3

Aufgabe I 3

Ein Medikament kann mithilfe einer Spritze oder durch Tropfinfusion verabreicht werden.

a) Bei Verabreichung des Medikaments mithilfe einer Spritze wird die Wirkstoffmenge im Blut des Patienten beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 130 \cdot \left(e^{-0,2t} - e^{-0,8t}\right) \;;\; 0 \le t \le 24$$

(t in Stunden nach der Injektion, f(t) in mg).

Skizzieren Sie den Graphen von f.
Das Medikament wirkt nur dann, wenn mindestens 36 mg des Wirkstoffs im Blut vorhanden sind.
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem das Medikament wirkt.
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die Wirkstoffmenge im Blut am stärksten zu bzw. ab ?
Berechnen Sie die mittlere Wirkstoffmenge im Blut während der ersten 12 Stunden.
(7 VP)

Wenn das Medikament stattdessen durch Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge im Blut beschreiben durch die Funktion g mit

$$g(t) = 80 \cdot \left(1 - e^{-0,05t}\right) \;;\; t \ge 0$$

(t in Minuten seit Infusionsbeginn, g(t) in mg).

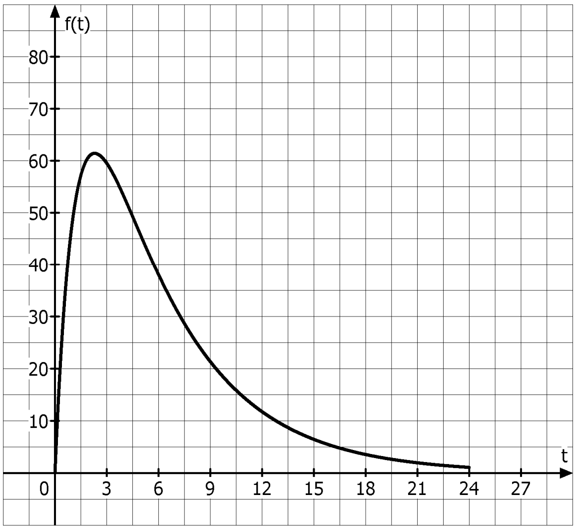
b) Welche Wirkstoffmenge wird sich langfristig im Blut befinden ?
Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge im Blut ständig zunimmt.
Zu welchem Zeitpunkt beträgt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut $1\frac{\text{mg}}{\text{min}}$?
In welchem 15-Minuten-Zeitraum ändert sich die Wirkstoffmenge um 30 mg ?
(7 VP)

c) Geben Sie eine Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums an, die von der Funktion g erfüllt wird.
Bei der Tropfinfusion wird dem Patienten pro Minute eine konstante Wirkstoffmenge zugeführt. Die Abbaurate ist dabei stets proportional zur Wirkstoffmenge im Blut.
Wie groß ist die konstante Zufuhr der Wirkstoffmenge pro Minute ?
Welche Wirkstoffmenge müsste man pro Minute zuführen, damit sich langfristig 90 mg im Blut befinden ? (4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2012 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil - Analysis I 3

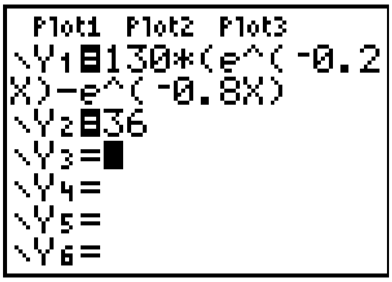
Aufgabe I 3

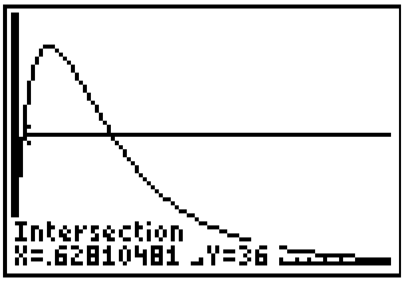
a) Skizze von f:

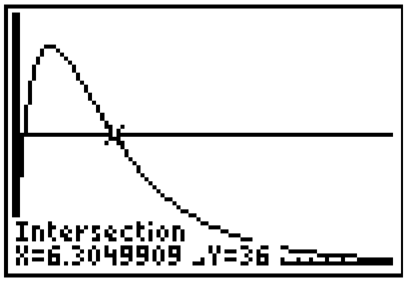


Zeitraum, in dem das Medikament wirkt: $f(t) \geq 36$

Lösung mit dem GTR:

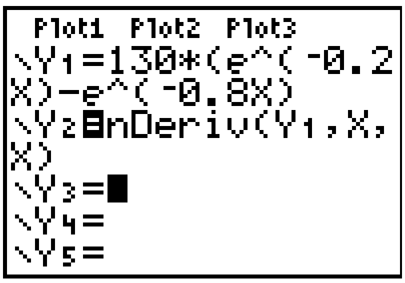


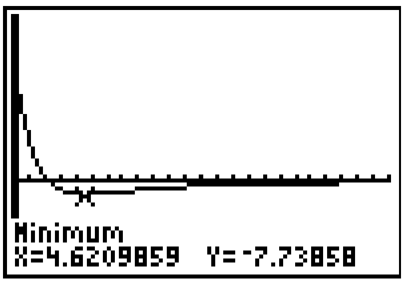




Das Medikament wirkt für $0{,}628 \leq t \leq 6{,}305$ Stunden nach der Injektion

Die Wirkstoffmenge nimmt zu den Zeitpunkten am schnellsten zu bzw. ab, bei denen die Ableitungsfunktion $f'(t)$ ein absolutes Maximum bzw. ein absolutes Minimum besitzt.





Das absolute Minimum ist bei t = 4,62. Zu diesem Zeitpunkt nimmt die Wirkstoffmenge am stärksten ab.

Das absolute Maximum befindet sich am Rand bei t = 0 mit $f'(0)=78$.
Zum Zeitpunkt t = 0 nimmt die Wirkstoffmenge am stärksten zu.

Berechnung der mittleren Wirkstoffmenge $\overline{m}$ in den ersten 12 Stunden:

$$\overline{m}=\frac{1}{12-0}\cdot\int_0^{12} f(t)dt=35,71\text{ mg}\quad\text{(GTR)}$$

b) Die langfristige Menge im Blut ergibt sich durch Betrachtung des Verhaltens der Funktion $g(t)=80\cdot\left(1-e^{-0,05t}\right)$ für $t\to\infty$.

Es gilt $e^{-0,05t}\to 0$ für $t\to\infty$. Somit gilt $g(t)\to 80$ für $t\to\infty$.
Langfristig befinden sich 80 mg des Medikaments im Blut.

Die Wirkstoffmenge im Blut nimmt ständig zu, wenn das Schaubild von g(t) streng monoton wächst.
Der rechnerische Nachweis erfolgt durch die Bedingung $g'(t)>0$ für $t\geq 0$.

$g'(t)=80\cdot(-e^{-0,05t})\cdot(-0,05)=4\cdot e^{-0,05t}>0$ für alle $t\in\mathbb{R}$ und damit auch für $t\geq 0$.

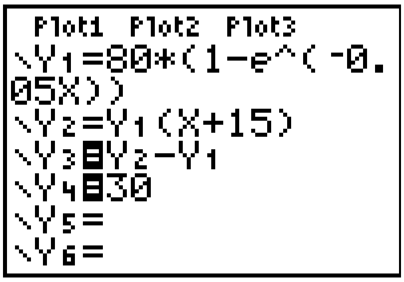
Die momentane Änderungsrate wird durch die Ableitungsfunktion $g'(t)$ beschrieben.

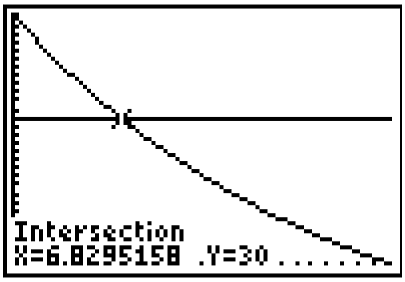
$$g'(t)=1\Rightarrow 4e^{-0,05t}=1\Rightarrow e^{-0,05t}=0,25\Rightarrow t=\frac{\ln(0,25)}{-0,05}=27,7\text{ min}$$

Nach 27,7 Minuten beträgt die momentane Änderungsrate $1\frac{\text{mg}}{\text{min}}$.

Innerhalb eines 15-Minuten-Intervalls ändert sich die Wirkstoffmenge um $g(t+15)-g(t)$
Nun soll gelten: $g(t+15)-g(t)=30$

Die Lösung erfolgt mit dem GTR:





Mit dem GTR ergibt sich als Lösung t = 6,83.
Das 15-Minuten-Intervall liegt dann im Bereich [6,83 ; 21,83].

c) Die allgemeine Differenzialgleichung für beschränktes Wachstum lautet $g'(t)=k\cdot\left(S-g(t)\right)$ und die zugehörige Lösungsfunktion $g(t)=S-c\cdot e^{-kt}$.

Anhand der vorliegenden Funktionsgleichung von g(t) ergibt sich S = 80 und k = 0,05.
Somit lautet die Differenzialgleichung $g'(t)=0,05\cdot\left(80-g(t)\right)$.

Multipliziert man die Differnezialgleichung aus, folgt $g'(t)=4-0,05\cdot g(t)$.

Pro Minute werden 4 mg der Wirkstoffmenge konstant zugeführt (und gleichzeitig stetig 5% der vorhandenen Menge wieder abgebaut).

Damit sich langfristig 90 mg der Menge im Blut befinden, müßte die Differenzialgleichung lauten: $g'(t) = 0{,}05 \cdot \left(90 - g(t)\right)$.

Dies ergäbe ausmultipliziert $g'(t) = 4{,}5 - 0{,}05 \cdot g(t)$.

Pro Minute müßte dann eine Menge von 4,5 mg konstant zugeführt werden.