Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Aufgaben Analytische Geometrie II, 2

Aufgabe II 2.1

Die Punkte A(5/0/0), B(5/3/0), C(5/0/4), F(0/0/0), G(0/3/0) und H(0/0/4) sind die Ecken eines dreiseitigen Prismas mit Grundfläche ABC.

a) Stellen Sie das Prisma in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie eine Koordiantengleichung der Ebene E, in der die Fläche BGHC liegt.
Unter welchem Winkel schneidet E die $x_1 - x_2$-Ebene ?
Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Geraden CG. (6 VP)

b) Im Prisma liegt ein Zylinder mit Radius 0,5 und Grundkreismittelpunkt M(0/0,5/0,5), dessen Achse parallel zur x_1-Achse verläuft.
Ermitteln Sie die Abstände des Punktes M von den drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas.
Berührt der Zylinder alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas ?

Ein anderer Zylinder mit Radius r und Grundkreismittelpunkt M*(0/r/r), dessen Achse ebenfalls parallel zur x_1-Achse ist, soll alle drei rechteckigen Seitenflächen des Prismas von innen berühren. Bestimmen Sie den Radius r dieses Zylinders. (6 VP)

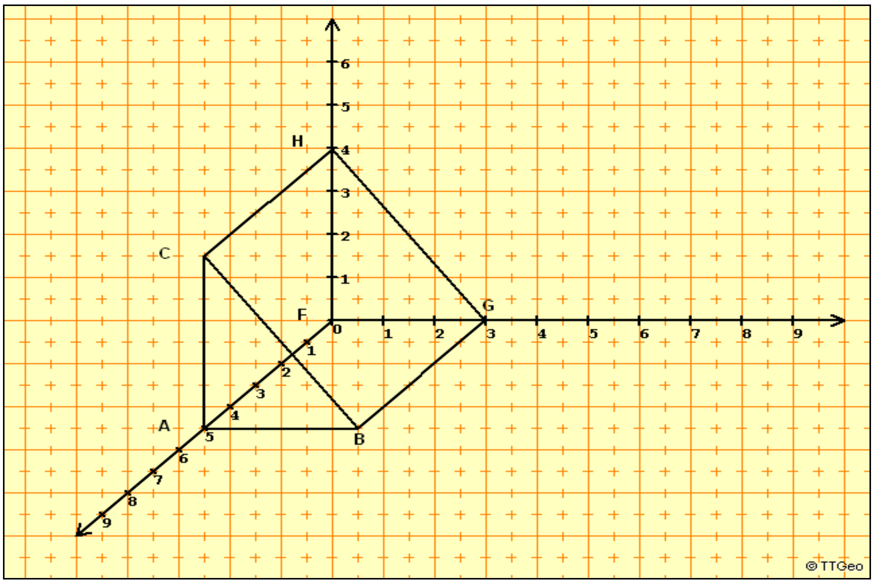
Aufgabe II 2.2
Hinweis: ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

In einem Viereck ABCD gilt für die Diagonale AC: $\overrightarrow{AC} = 0{,}4 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
Zeichnen Sie ein solches Viereck ABCD.
In welchem Verhältnis wird die Diagonale AC von der anderen Diagonalen geteilt ?
(4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analytische Geometrie II, 2

Aufgabe II 2.1

a)



Aufstellen der Ebenengleichung durch B, C und G:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } r, s \in R$$

Normalenvektor von E mit dem Kreuzprodukt: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ -15 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung von E: $4x_2 + 3x_3 = 12$
Die rechte Seite der Koordinatengleichung erhält man durch Einsetzen eines bekannten Punktes der Ebene, z.B. B(5/3/0).

Schnittwinkel von E mit der $x_1 - x_2 -$ Ebene (Koordinatengleichung $x_3 = 0$):

$$\cos\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{16+9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = 53{,}1°$$

Abstand des Punktes A von der Geraden CG:

Eine Gleichung der Geraden durch C(5/0/4) und G(0/3/0) lautet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Hilfsebene H durch Punkt A und orthogonal zur Geraden: H: $-5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -25$

Schnittpunkt S von H und der Gerade: $-5(5-5r) + 3(3r) - 4(4-4r) = -25$

$\Rightarrow -25 + 25r + 9r - 16 + 16r = -25 \Rightarrow 50r = 16 \Rightarrow r = \frac{8}{25} \Rightarrow S(3{,}4/0{,}96/2{,}72)$

$d(A,g) = \left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{(5-3{,}4)^2 + (0-0{,}96)^2 + (0-2{,}72)^2} = \sqrt{10{,}88} \approx 3{,}3$

b) Abstand des Punktes M von der Seitenfläche BGHC entspricht Abstand des Punktes M von der Ebene E.

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{4x_2 + 3x_3 - 12}{5} = 0$

$d(M,E) = \left|\frac{4 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}5 - 12}{5}\right| = 1{,}7$

Abstand des Punktes M von der Seitenfläche ADCH entspricht der x_2-Koordinate von M, also Abstand = 0,5.

Abstand des Punktes M von der Seitenfläche ABGF entspricht der x_3-Koordinate von M, also Abstand = 0,5.

Der Zylinder **berührt nicht alle drei Seitenflächen**, da er von der Seitenfläche BGHC den Abstand 1,7 besitzt, der größer ist als der Radius des Zylinders.

Der Abstand des Punktes M*(0/r/r) von der Seitenfläche ADCH entspricht der x_2-Koordinate von M*, also Abstand = r.

Abstand des Punktes M* von der Seitenfläche ABGF entspricht der x_3-Koordinate von M, also Abstand = r.

Damit der Zylinder alle drei Seitenflächen berührt, muss für die dritte Seitenfläche gelten:

$d(M^*,E) = \left|\frac{4 \cdot r + 3 \cdot r - 12}{5}\right| = r$

Diese Betragsgleichung muss mithilfe einer Fallunterscheidung gelöst werden:

1.Fall: $\frac{7r - 12}{5} = r \Rightarrow r = 6$

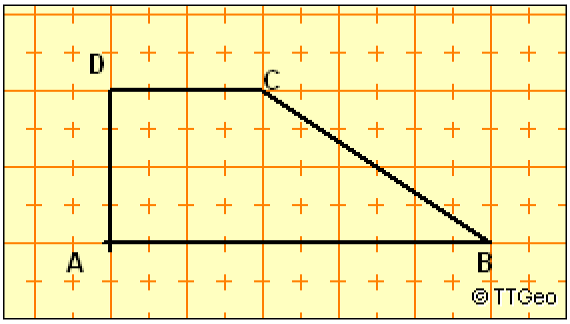
2.Fall: $\frac{7r - 12}{5} = -r \Rightarrow r = 1$

Der gesuchte Radius des Zylinders ist r = 1.

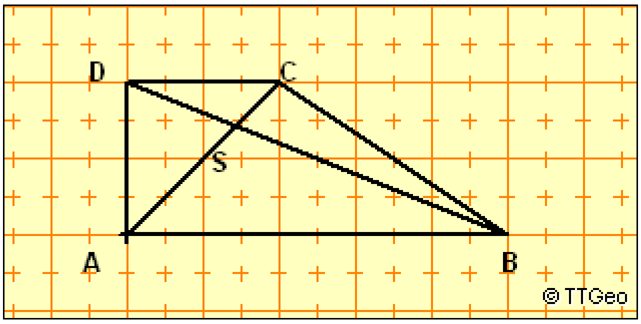
Die Lösung r = 6 des 1.Falles würde eine Berührung des Zylinders an die drei Seitenflächen von außen darstellen.

Aufgabe II 2.2:

Zeichnung des Vierecks ABCD:



Vorgehen: Wähle z.B. $\overline{AB}$ = 5 cm, dann gilt $0{,}4 \cdot \overline{AB} = 2$ cm.
Nach 2 cm auf der Strecke AB wird eine Parallele zum Vektor $\overrightarrow{AD}$ eingezeichnet (der hier aus Vereinfachungsgründen orthogonal auf dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ steht) und dann der Punkt C abgetragen.



Wie teilt der Punkt S die Diagonale AC und die Diagonale DB ?

Hierzu werden zwei linear unabhängige Vektoren in der Figur eingeführt: $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$

Nun muss ein geschlossener Vektorzug aufgestellt werden, der den Teilungspunkt S enthält:

$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ (*)

Die einzelnen Vektoren müssen nun durch die linear unabhängigen Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ dargestellt werden:

$\overrightarrow{AS} = t \cdot \overrightarrow{AC} = t \cdot (0{,}4 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ gemäß Vorgabe
$\overrightarrow{SD} = s \cdot \overrightarrow{BD} = s \cdot (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$
$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$

Der Vektorzug (*) kann nun folgendermaßen dargestellt werden:

$$0{,}4t \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AD} - s \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

Umstellung des Terms ergibt: $\overrightarrow{AB} \cdot (0{,}4t - s) + \overrightarrow{AD} \cdot (t + s - 1) = \vec{0}$

Da die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ linear unabhängig sind, folgt daraus, dass die Klammerausdrücke Null werden:

$$0{,}4t - s = 0$$
$$t + s - 1 = 0$$

Das Gleichungssystem liefert $t = \frac{5}{7}$ und $s = \frac{2}{7}$.

S teilt die Diagonale AC im Verhältnis 5:2
S teilt die Diagonale BD im Verhältnis 5:2