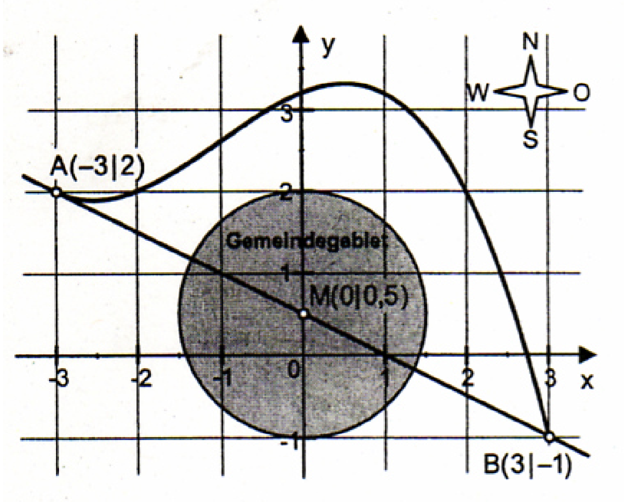
Abiturprüfung Mathematik 2012 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis I 1

Aufgabe I 1

Die Abbildung zeigt den Verlauf einer Umgehungsstraße zur Entlastung der Ortsdurchfahrt AB einer Gemeinde. Das Gemeindegebiet ist kreisförmig mit dem Mittelpunkt M und dem Radius 1,5 km. Die Umgehungsstraße verläuft durch die Punkte A und B und wird beschrieben durch die Funktion f mit
$f(x) = -0{,}1x^3 - 0{,}3x^2 + 0{,}4x + 3{,}2$.
1 LE entspricht 1 km.



a) Welche Koordinaten hat der nördlichste Punkt der Umgehungsstraße ?
Wie weit ist dieser Punkt vom Ortsmittelpunkt M entfernt ?
Die Umgehungsstraße beschreibt eine Linkskurve und eine Rechtskurve.
Bestimmen Sie den Punkt, in dem diese beiden Abschnitte ineinander übergehen.
Zeigen Sie, dass die Umgehungsstraße im Punkt A ohne Knick in die Ortsdurchfahrt einmündet.

(6 VP)

b) Zur Bewertung von Grundstücken wird die Fläche zwischen der Ortsdurchfahrt und der Umgehungsstraße vermessen.
Wie viel Prozent dieser Fläche liegt außerhalb des Gemeindegebiets ?

(4 VP)

c) Im Punkt P(1,5/3) befindet sich eine Windkraftanlage.
Ein Fahrzeug fährt von B aus auf der Umgehungsstraße.
Von welchem Punkt der Umgehungsstraße aus sieht der Fahrer die Windkraftanlage genau in Fahrtrichtung vor sich ?

(4 VP)

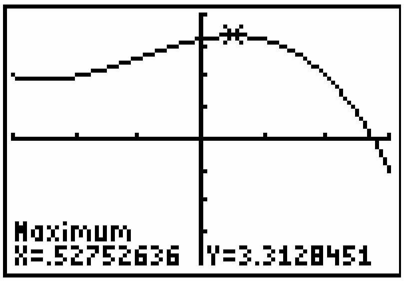
d) In welchem Punkt der Umgehungsstraße fährt ein Fahrzeug parallel zur Ortsdurchfahrt AB ?
Welchen Abstand hat ein Fahrzeug auf der Umgehungsstraße höchstens von der Ortsdurchfahrt ?

(4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2012 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil - Analysis I 1

Aufgabe I 1

a) Der nördlichste Punkt der Umgehungsstraße entspricht dem Hochpunkt des Schaubildes.
Notwendige und hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$



Mit dem GTR folgt: H(0,528/3,313)

Entfernung des Hochpunktes vom Punkt M(0/0,5):
$\overline{MH} = \sqrt{(0,528-0)^2 + (3,313-0,5)^2} \approx 2,86$ km

Der Punkt, in dem der Übergangspunkt von der Links- in die Rechtskurve übergeht, ist der Wendepunkt des Schaubildes von f(x).

Es gilt $f'(x) = -0,3x^2 - 0,6x + 0,4$ und $f''(x) = -0,6x - 0,6$ und $f'''(x) = -0,6$.
Notwendige und hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow -0,6x - 0,6 = 0 \Rightarrow x = -1$
$f'''(-1) = -0,6 \neq 0$ und damit existiert ein Wendepunkt bei W(-1/2,6)

Aufstellen der Geradengleichung, die die Ortsdurchfahrt AB beschreibt:
$y = mx + b$ mit b = 0,5 (y-Achsenabschnitt) und $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2-(-1)}{-3-3} = -0,5$
Die Gleichung der Gerade AB lautet $y = -0,5x + 0,5$.

Damit die Umgehungsstraße im Punkt A ohne Knick in die Ortsdurchfahrt übergeht, muss der Punkt A auf dem Schaubild von f(x) liegen und die Steigung der Tangente an f(x) in A muss der Steigung der Gerade AB entsprechen.

Es gilt $f(-3) = 2$ also liegt A(-3/2) auf dem Schaubild von f(x).
Es gilt $f'(-3) = -0,3 \cdot (-3)^2 - 0,6 \cdot (-3) + 0,4 = -0,5$
Damit ist die Steigung der Tangente genau so groß wie die Steigung der Gerade durch AB. Somit geht die Umgehungsstraße ohne Knick in A in die Ortsdurchfahrt über.

b) Berechnung der Gesamtfläche zwischen dem Schaubild von f(x) und der Ortsdurchfahrt:

$$A = \int_{-3}^{3} (f(x) - (-0{,}5x + 0{,}5))dx = 10{,}8 \ \text{km}^2$$

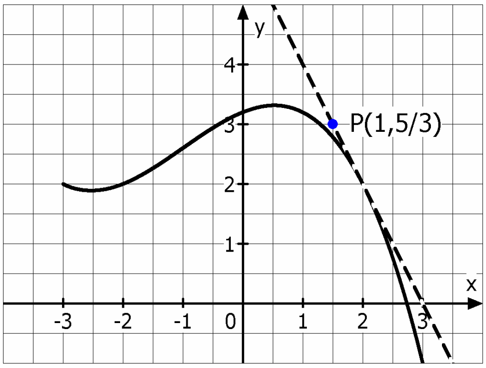
Das Gemeindegebiet innerhalb dieser Fläche entspricht einem Halbkeis mit r = 1,5 km.

$$A_{\text{Halbkreis}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 = 3{,}534 \ \text{km}^2$$

Damit liegen 10,8 km² – 3,534 km² = 7,266 km² außerhalb des Gemeindegebiets.

Dies sind $\frac{7{,}266}{10{,}8} = 0{,}673 = 67{,}3\%$ der Gesamtfläche.

c) Um den Punkt der Umgehungsstraße zu bestimmen, von dem aus der Fahrer den Punkt P(1,5/3) genau vor sich sieht, muss von P aus eine Tangente an das Schaubild von f gelegt werden (siehe gestrichelte Gerade)

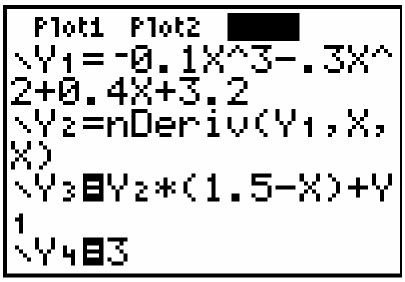


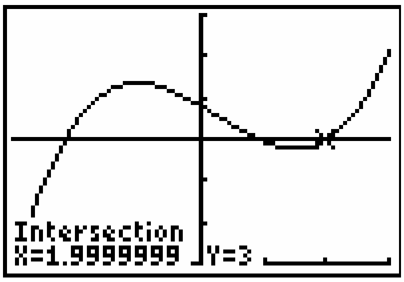
Allgemeine Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

u ist der x-Wert des Berührpunktes der Tangente an das Schaubild von f.

Einsetzen des gegebenen Punktes P(1,5/3) ergibt: $3 = f'(u) \cdot (1{,}5 - u) + f(u)$

Nun wird der Wert von u aus der Gleichung mit Hilfe des GTR bestimmt:





Als Lösung ergibt sich u = 2.

(Hinweis: Die andere Schnittstelle liegt bei u = 0,92 ; dies kann aber nicht die gesuchte Lösung sein, da die Lösung zwischen u = 3 (Startstelle B) und u = 1,5 (Stelle der Windkraftanlage) liegen muss).

Mit f(2) = 2 folgt, dass vom Punkt Q(2/2) aus der Fahrer die Windkraftanlage genau in Fahrtrichtung vor sich sieht.

d) Das Fahrzeug fährt in dem Punkt parallel zur Ortsdurchfahrt AB, bei dem die Tangentensteigung der Steigung der Gerade AB, also m = -0,5 entspricht.

Setze $f'(x) = -0,5$

$-0,3x^2 - 0,6x + 0,4 = -0,5 \Rightarrow -0,3x^2 - 0,6x + 0,9 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

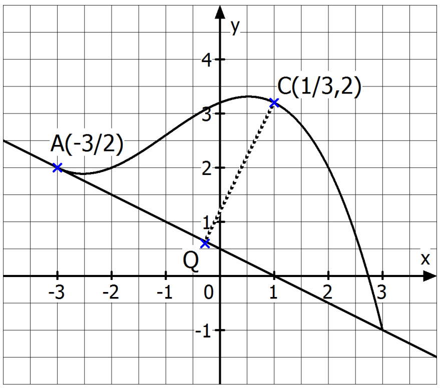
$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$ und damit x = -3 und x = 1.

Da x = -3 dem Punkt A (und damit dem Endpunkt der Umgehungsstraße) entspricht, ist der gesuchte Punkt derjenige mit x = 1, also C(1/f(1)) = C(1/3,2).

Der Punkt auf der Umgehungsstraße mit dem x-Wert $-3 \le x \le 3$, der den maximalen Abstand zur Ortsdurchfahrt, muss entweder die gleiche Steigung wie die Ortsdurchfahrtsgerade besitzen oder (als Randmaximum) am Rand des betrachteten Intervalles $-3 \le x \le 3$ liegen.
Da an den Rändern x = -3 und x = 3 der Abstand zwischen der Umgehungsstraße und der Ortsdurchfahrt 0 ist, existiert das gesuchte Maximum nicht am Rand.

Es wurde bereits ermittelt, dass der Punkt C(1/3,2) eine Tangente mit Steigung m = -0,5 besitzt. Daher ist C(1/3,2) der gesuchte Punkt auf der Umgehungsstraße.

Den gesuchten Abstand des Punktes C von der Ortsdurchfahrt erhält man über eine Hilfsgerade, die durch C verläuft und senkrecht auf der Gerade AB steht.



Ansatz für Gerade h: $y = m \cdot x + b$

Aufgrund der Orthogonalität gilt $m_h = -\frac{1}{-0,5} = 2$, also $y = 2x + b$

Einsetzen von C(1/3,2): $3,2 = 2 + b \Leftrightarrow b = 1,2$
Die Hilfsgerade hat die Gleichung $y = 2x + 1,2$

Schnittpunkt Q der Ortsdurchfahrtsgerade $y = -0,5x + 0,5$ und der Hilfsgerade:
GTR: Q(-0,28/0,64).

Abstand von C(1/3,2) und Q(-0,28/0,64): $d = \sqrt{(1+0,28)^2 + (3,2-0,64)^2} \approx 2,862$ km

Der Abstand des Fahrzeugs auf der Umgehungsstraße beträgt von der Ortsdurchfahrt höchstens 2,862 km.