Abiturprüfung Mathematik 2004 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Analytische Geometrie – Aufgabe II, 2

Aufgabe II 2.1

Gegeben sind die Punkte A(10/0/0) und B(0/10/0) sowie für jedes a > 0 eine Ebene $E_a : a \cdot x_1 - x_3 = 0$.

a) Beschreibe die Lage der Ebene E_3.
Die zu E_a senkrechte Gerade durch A schneidet E_a im Punkt D_a.
Bestimmen Sie seine Koordinaten.
(Teilergebnis: $D_a\left(\frac{10}{1+a^2} / 0 / \frac{10a}{1+a^2}\right)$) (5 VP)

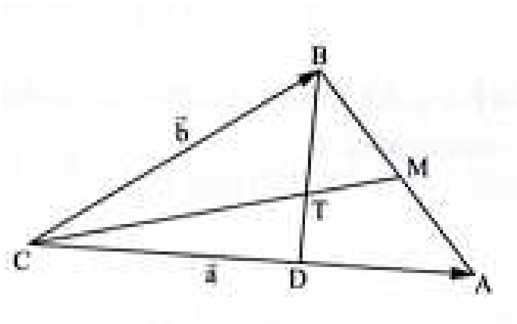
b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD_a für jedes a > 0 rechtwinklig ist. (3 VP)

Aufgabe II 2.2

Hinweis: Ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

Ein Dreieck ABC wird durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt. M ist die Mitte der Strecke AB. T teilt die Strecke CM im Verhältnis 3:1. Die Strecke BD verläuft durch T. In welchem Verhältnis wird diese Strecke durch T geteilt ?

(8 VP)



Abiturprüfung Mathematik 2004 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Analytische Geometrie – Lösung Aufgabe II, 2

Aufgabe II 2.1

a) $E_3:\ 3x_1 - x_3 = 0$

In der Ebenengleichung fehlt die Variable x_2. Das heißt, dass die Ebene entweder parallel zur x_2-Achse ist oder dass die Achse in der Ebene liegt.
Da der Ursprung O(0/0/0) auf E_3 liegt, liegt die x_2-Achse in der Ebene.

Geradengleichung von g_a durch A und senkrecht zu E_a:

$$g_a:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}a\\0\\-1\end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

(Normalenvektor der Ebene ist Richtungsvektor der Geraden)

Schnittpunkt der Gerade und der Ebene:

$$a\cdot(10 + a\cdot t) - (-t) = 0 \Leftrightarrow 10a + a^2 t + t = 0 \Leftrightarrow t\cdot(a^2+1) = -10a \Leftrightarrow t = \frac{-10a}{a^2+1}$$

Einsetzen des t-Wertes in die Geradengleichung: $D_a\left(\underbrace{10 - \frac{10a^2}{a^2+1}}_{=\frac{10}{a^2+1}} / 0 / \frac{10a}{a^2+1}\right)$

b) Zunächst werden die Dreiecksseiten als Vektoren dargestellt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{BD_a} = \begin{pmatrix}\frac{10}{a^2+1}\\-10\\\frac{10a}{a^2+1}\end{pmatrix};\quad \overrightarrow{AD_a} = \begin{pmatrix}\frac{10}{a^2+1}-10\\0\\\frac{10a}{a^2+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-10a^2}{a^2+1}\\0\\\frac{10a}{a^2+1}\end{pmatrix}$$

Für die Rechtwinkligkeit muss das Skalarprodukt zwei dieser Vektoren =0 ergeben.

Es gilt: $\overrightarrow{BD_a}\cdot\overrightarrow{AD_a} = \frac{10}{a^2+1}\cdot\frac{-10a^2}{a^2+1} + 0 + \frac{10a}{a^2+1}\cdot\frac{10a}{a^2+1} = 0$, damit ist die

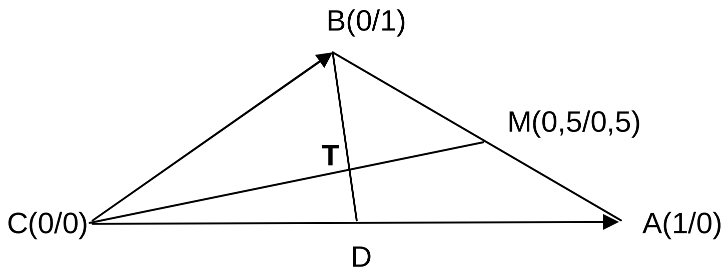
Rechtwinkligkeit für jedes a > 0 bewiesen.

Aufgabe II 2.2
Es gibt zwei verschiedene Methoden, das gesuchte Verhältnis zu ermitteln.

1.Methode: geschlossener Vektorzug
2.Methode: Einführung eines nicht kartesischen Koordinatensystems

Die nachfolgende Lösung bezieht sich auf die 2.Methode:

Es wird ein neues - nicht kartesisches – Koordinatensystem eingeführt.
Der Ursprung des Koordinatensystems sei C(0/0).
Die x-Achse entspricht der Geraden durch C und A.
Die y-Achse entspricht der Geraden durch C und B.
Die Punkte A und B auf den Achsen seien genau 1 Koordinatenachsen-Längeneinheit vom Ursprung entfernt. (Diese Annahme kann problemlos gemacht werden)
Daraus ergeben sich nun die folgenden Punktkoordinaten.



Die Koordinaten von M ergeben sich als Mittelpunkt von A und B.
Die Koordinaten von C ergeben sich aus bekannten Teilverhältnis t = 3:1

$$\overrightarrow{CT} = t \cdot \overrightarrow{TM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t_1 - 0 \\ t_2 - 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 - t_1 \\ 0{,}5 - t_2 \end{pmatrix}$$

Aus 1.Zeile: $t_1 = 1{,}5 - 3t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{3}{8}$ und analog $t_2 = \frac{3}{8}$ und somit $T\left(\frac{3}{8} / \frac{3}{8}\right)$.

Nun werden die Koordinaten von D benötigt.
D ist der Schnittpunkt der Geraden durch BT und durch AC.

$$g_{BT}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_{CA}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus 2.Zeile: $1 - \frac{5}{8} r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{8}{5}$

Aus 1.Zeile: $\frac{3}{8} r = s \Leftrightarrow s = \frac{3}{5}$

Daraus ergibt sich $D\left(\frac{3}{5} / 0\right)$.

Wie teilt T die Strecke $\overline{BD}$? $\overrightarrow{BT} = t \cdot \overrightarrow{TD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{40} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix} \Rightarrow t = \frac{5}{3}$

T teilt die Strecke $\overline{BD}$ im Verhältnis 5:3.