Abiturprüfung Mathematik 2011 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis I 3

Aufgabe I 3

In einer großen Stadt breitet sich eine Viruserkrankung aus.
Die momentane Erkrankungsrate wird modellhaft beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 150 \cdot t^2 \cdot e^{-0,2t} \;;\; t \geq 0$$

Dabei ist t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn und f(t) die Anzahl der Neuerkrankungen pro Woche.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von f.
Wann erkranken die meisten Personen ?
Zeigen Sie, dass ab diesem Zeitpunkt die momentane Erkrankungsrate rückläufig ist.
Wann nimmt sie am stärksten ab ? (6 VP)

b) Alle Neuerkrankungen werden sofort dem Gesundheitsamt gemeldet.
Bei Beobachtungsbeginn sind bereits 100 Personen gemeldet.
Wie viele Personen sind nach 12 Wochen insgesamt gemeldet ?
Die Funktion F mit $F(t) = -750 \cdot \left(t^2 + 10t + 50\right) \cdot e^{-0,2t}$ ist eine Stammfunktion von f.
Geben Sie eine Funktion für die Gesamtzahl der gemeldeten Personen nach t Wochen an.
Wann wird die Zahl von 20.000 gemeldeten Personen erreicht ?
Weisen Sie nach, dass die Anzahl der Meldungen unter 40.000 bleiben wird.
(6 VP)

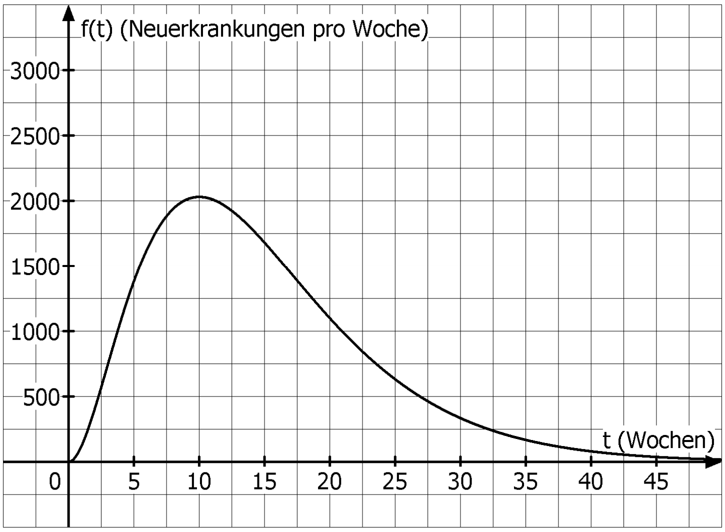
In einer benachbarten Stadt mit 30.000 Einwohner ist bei Beobachtungsbeginn bereits die Hälfte der Einwohner an diesem Virus erkrankt. Es ist davon auszugehen, dass im Laufe der Zeit alle Einwohner von der Krankheit erfasst werden und dass dabei die momentane wöchentliche Erkrankungsrate proportional zur Anzahl der bisher noch nicht von der Krankheit erfassten Einwohner ist.

c) Man nimmt zur Modellierung zunächst den Proportionalitätsfaktor 0,1 an.
Gebe Sie eine zugehörige Differenzialgleichung an.
Bestimmen sie eine Funktion, welche die Anzahl der von der Krankheit erfassten Personen beschreibt.
Wie viele Personen werden demzufolge nach 4 Wochen von der Krankheit erfasst sein ?
Tatsächlich sind es nach 4 Wochen bereits 22.000 Personen.
Passen Sie die Funktion an die tatsächliche Situation an. (6 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2011 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil - Analysis I 3

Aufgabe I 3

a)



Die Funktion f(t) wird maximal für t = 10 (GTR).
Die momentane Erkrankungsrate ist 10 Wochen nach Beobachtungsbeginn maximal.

Rückläufigkeit der Erkrankungsrate:
Die Rückläufigkeit wird dadurch nachgewiesen, dass Schaubild von f für t > 10 monoton fallend (also $f'(t) < 0$) ist.

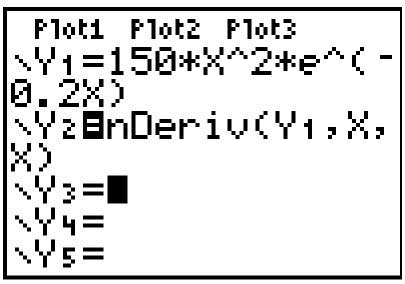
$$f'(t) = 300t \cdot e^{-0,2t} + 150t^2 \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0,2) = e^{-0,2t} \cdot \left(300t - 30t^2\right)$$

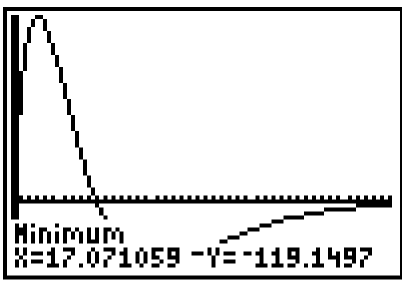
Der 1.Faktor: $e^{-0,2t} > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (und damit auch für t > 10)
Der 2.Faktor $300t - 30t^2$ muss negativ sein, damit $f'(t) < 0$ ist.

$300t - 30t^2 < 0 \Leftrightarrow 30t \cdot (10 - t) < 0$
1.Fall: 30t > 0 und 10 – t < 0. Daraus folgt t > 0 und t > 10 und damit t > 10.
2.Fall: 30t < 0 und 10 – t > 0. Daraus folgt t < 10 und t < 0 und damit t < 0.

Für t > 10 gilt daher $f'(t) < 0$.

Die Erkrankungsrate nimmt am stärksten ab, wenn $f'(t)$ minimal wird.





Die Ableitungsfunktion wird minimal für t = 17,07.
Die Erkrankungsrate nimmt nach ca. 17 Wochen am stärksten ab.

b) Krankmeldungen nach 12 Wochen: $100 + \int_0^{12} f(t)dt = 16235,9$

Nach 12 Wochen sind etwa 16.200 Menschen gemeldet.

Die Anzahl der gemeldeten Personen wird durch eine Stammfunktion von f(t) beschrieben. In der Aufgabenstellung ist bereits eine Stammfunktion F(t) gegeben, allerdings muss diese noch um einen Summand C ergänzt werden.

Die Funktion $G(t) = F(t) + C$ beschreibt die Anzahl der gemeldeten Personen.
Es muss gelten G(0) = 100. Daraus folgt
$G(0) = -750 \cdot 50 \cdot e^0 = -37500 + C = 100 \Rightarrow C = 37600$

$G(t) = -750 \cdot \left(t^2 + 10t + 50\right) \cdot e^{-0,2t} + 37600$

Anzahl 20.000 gemeldete Personen werden erreicht wenn
$20000 = -750 \cdot \left(t^2 + 10t + 50\right) \cdot e^{-0,2t} + 37600$
Mit dem GTR ergibt sich t = 14.

Nach etwa 14 Wochen sind 20.000 Personen gemeldet.

Die Funktion G(t) ist monoton wachsend, da $G'(t) = f(t) = 150t^2 \cdot e^{-0,2t} > 0$ gilt.
Um zu untersuchen, ob 40.000 Menschen erreicht werden, muss der Grenzwert von G(t) für $t \to \infty$ bestimmt werden.

$\lim_{t \to \infty} G(t) = 37600$ da der Term mit der e-Funktion gegen 0 strebt.
Somit bleibt die Anzahl der Meldungen unter 40.000.

c) Die Funktion B(t) beschreibe die Anzahl der kranken Personen t Wochen nach Beobachtungsbeginn.
Das dargestelllte Wachstumsmodell beschreibt ein beschränktes Wachstum.
Begründung: Es gibt eine Schranke S = 30.000. Außerdem ist die momentane Änderungsrate $B'(t)$ proportional zur Anzahl der noch gesunden Einwohner (also zum Sättigungsmanko $30000 - B(t)$

Die Differenzialgleichung lautet $B'(t) = 0,1 \cdot \left(30000 - B(t)\right)$
Die Lösung der Differenzialgleichung lautet $B(t) = 30000 - a \cdot e^{-0,1t}$.
Mit B(0) = 15000 gilt $15000 = 30000 - a \cdot e^0 \Rightarrow a = 15000$
Die Funktion lautet daher $B(t) = 30000 - 15000 \cdot e^{-0,1t}$

Nach 4 Wochen sind $B(4) = 30000 - 15000 \cdot e^{-0,4} = 19945$ Personen krank.

Nun gilt tatsächlich B(4) = 22000.
Um die Funktion anzupassen, sollte der Proportionalitätsfaktor k angepasst werden.
Ansatz für die neue Funktion: $B^*(t) = 30000 - 15000 \cdot e^{-k \cdot t}$

(Grund: Die Schranke S = 30000 (Anzahl der Einwohner) bleibt nach wie vor gültig und B(0) = 15000 (woraus sich a = 15000 ergibt) ist ebenfalls nach wie vor gültig.

$B^*(4) = 22000 \Rightarrow 22000 = 30000 - 15000 \cdot e^{-k \cdot 4} \Rightarrow e^{-4k} = \frac{8}{15}$

$k = -\frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{8}{15}\right) \approx 0{,}1572$

Die neue Funktion lautet $B^*(t) = 30000 - 15000 \cdot e^{-0{,}1572t}$