Abiturprüfung Mathematik 2013 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analytische Geometrie / Stochastik B 1

Aufgabe B 1.1

Ein Würfel besitzt die Eckpunkte O(0/0/0), P(6/0/0), Q(0/6/0) und R(0/0/6).
Gegeben ist außerdem die Ebene E: $3x_2 + x_3 = 8$.

a) Stellen Sie den Würfel und die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene E mit der x_1x_2-Ebene einschließt.
Bestimmen Sie den Abstand von E zur x_1-Achse.

(5 VP)

b) Die Ebene E gehört zu einer Ebenenschar. Diese Schar ist gegeben durch

$$E_a: \ 3x_2 + x_3 = a \ ; \ a \in \mathbb{R}$$

Welche Lage haben die Ebenen der Schar zueinander ?
Für welche Werte von a hat der Punkt S(6/6/6) den Abstand $\sqrt{10}$ von der Ebene E_a ?
Für welche Werte von a hat die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel ?

(6 VP)

Aufgabe B 1.2

Bei einer Lotterie sind 10% der Lose Gewinnlose.
Jemand kauft drei Lose.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter mindestens zwei Gewinnlose ?
Wie viele Lose hätte man mindestens kaufen müssen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinnlose über 50% liegt ?

(4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2013 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analytische Geometrie / Stochastik B 1

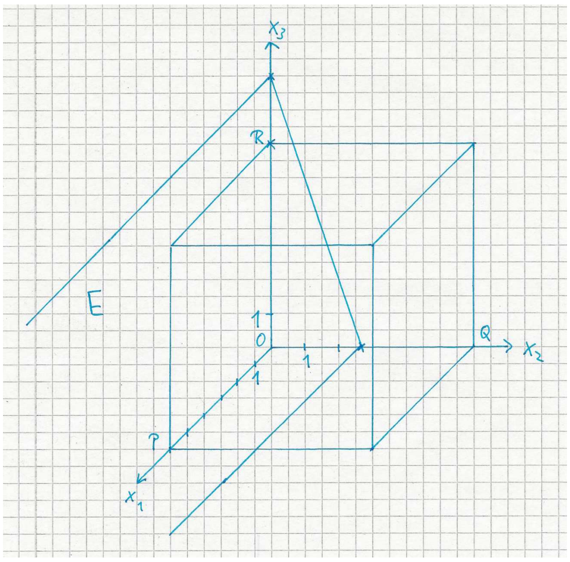
Aufgabe B 1.1

a) Skizze des Würfels und der Ebene:

Für die Ebene werden die Spurpunkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen) benötigt:
Da in der Koordinatengleichung die Variable x_1 nicht vorkommt, ist die Ebene E parallel zur x_1-Achse.

Schnittpunkt mit x_2-Achse: $S_{x_2}(0/x_2/0) \Rightarrow S_{x_2}(0/\frac{8}{3}/0)$

Schnittpunkt mit x_3-Achse: $S_{x_3}(0/0/x_3) \Rightarrow S_{x_3}(0/0/8)$



Berechnung des Winkels:

Die x_1x_2-Ebene besitzt den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für den Winkel gilt: $\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{0^2+3^2+1^2} \cdot \sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$

Daraus folgt $\alpha = 71{,}6°$

Die x_1-Achse ist parallel zu E.
Der Abstand von E zur x_1-Achse wird dadurch bestimmt, dass ein beliebiger Punkt A auf der x_1-Achse bestimmt wird und dann der Abstand von A zur Ebene E berechnet wird.

Als Punkt A wird der Ursprung A(0/0/0) festgelegt.

Hessesche Normalenform von E: $\frac{3x_2 + x_3 - 8}{\sqrt{10}} = 0$

Einsetzen von A in die HNF von E: $d(A,E) = \left|\frac{3 \cdot 0 + 0 - 8}{\sqrt{10}}\right| = \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2,53$

Die Ebene E hat von der x_1-Achse den Abstand 2,53.

b) Alle Ebenen der Schar besitzen den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aus diesem Grund sind alle Ebenen der Schar zueinander parallel.

Abstand des Punktes S(6/6/6) von E_a:

HNF von E_a: $\frac{3x_2 + x_3 - a}{\sqrt{10}} = 0$

Einsetzen von S(6/6/6): $\left|\frac{3 \cdot 6 + 6 - a}{\sqrt{10}}\right| = \left|\frac{24 - a}{\sqrt{10}}\right|$

Nun soll gelten: $\left|\frac{24 - a}{\sqrt{10}}\right| = \sqrt{10}$

Um den Betrag aufzulösen, müssen zwei Fälle unterschieden werden:

Fall 1: $\frac{24 - a}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \quad \Rightarrow 24 - a = 10 \quad \Rightarrow a = 14$

Fall 2: $\frac{24 - a}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \quad \Rightarrow 24 - a = -10 \quad \Rightarrow a = 34$

Gemeinsame Punkte mit dem Würfel:
Aus der Skizze in a) ergibt sich, dass es zwei Grenzlagen für die parallele Ebenenschar gibt, in der die Ebene mit dem Würfel jeweils eine nur eine Würfelkante gemeinsam haben.
Grenzlage 1:
Die Ebene hat mit dem Würfel die Kante von O(0/0/0) bis P(6/0/0) gemeinsam.
Einsetzen der Koordinaten von O (oder P) in die Ebenenschar: $3 \cdot 0 + 0 = a \quad \Rightarrow a = 0$

Grenzlage 2:
Die Ebene hat mit dem Würfel die Kante von T(0/6/6) bis S(6/6/6) gemeinsam.
Einsetzen der Koordinaten von T (oder S) in die Ebenenschar: $3 \cdot 6 + 6 = a \quad \Rightarrow a = 24$

Das heißt, dass für alle Werte von a mit $0 \le a \le 24$ die Ebene gemeinsame Punkte mit dem Würfel besitzt.

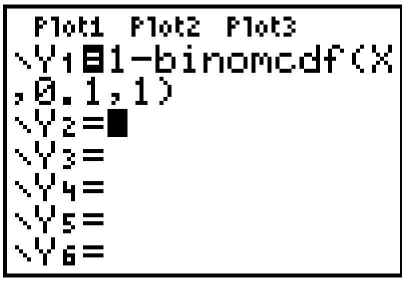
Aufgabe B 1.2

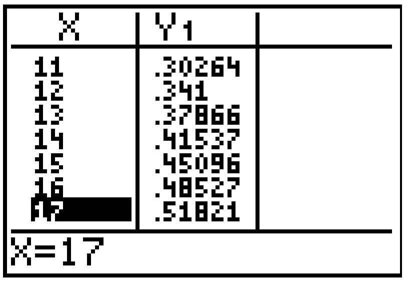
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen Gewinnlose an.
X ist binomialverteilt mit p = 0,1 und n = 3.

Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinnlose:
$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 0{,}028$ (GTR)

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter 3 Losen mindestens 2 Gewinnlose sind, beträgt 2,8%.

Nun ist wiederum p = 0,1 und der Parameter n ist gesucht.
Gegeben ist außerdem $P(X \geq 2) > 0{,}5 \quad \Rightarrow 1 - P(X \leq 1) > 0{,}5$





Mit dem GTR folgt, dass für n = 17 die Wahrscheinlichkeit > 0,5 ist.

Man muss dasher mindestens 17 Lose kaufen, damit die Wahrscheinlichkeit für zwei Gewinnlose über 50% liegt.