Abiturprüfung Mathematik 2004 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Pflichtteil - Aufgaben

Aufgabe 1: (2 VP)

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$.

Aufgabe 2: (2 VP)

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin(2x)$ an.

Aufgabe 3: (3 VP)

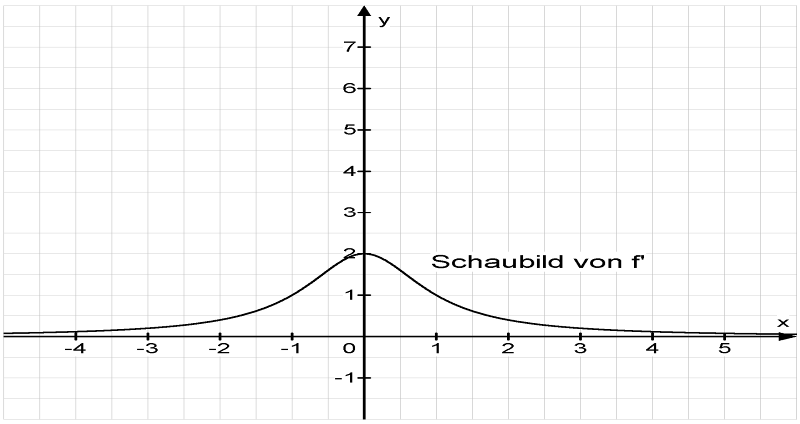
Lösen Sie die Gleichung $e^{4x} - 11e^{2x} + 18 = 0$.

Aufgabe 4: (3 VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x} + 2$; $x \neq 0$.
Das Schaubild von f hat im Punkt P(1/v) die Tangente t.
Ermitteln Sie eine Gleichung von t.
Die Tangente t schneidet die x-Achse im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Aufgabe 5: (6 VP)

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Welcher der folgenden Aussagen über die Funktion f sind wahr, falsch oder unentscheidbar ? Begründen Sie Ihre Antworten.



1. f ist streng monoton wachsend für -3 < x < 3.
2. Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendepunkt.
3. Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
4. Es gilt f(x) > 0 für alle $x \in [-3;3]$.

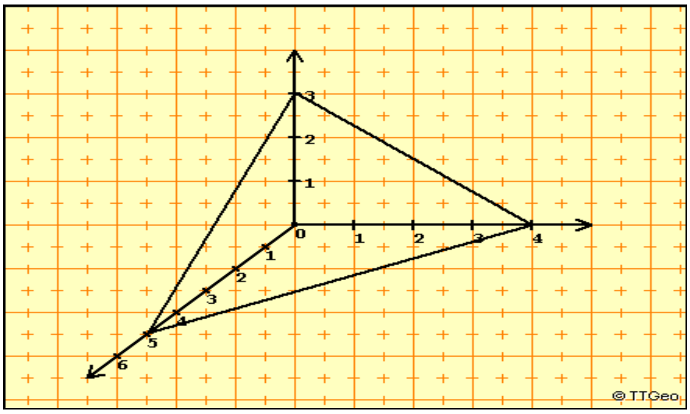
Aufgabe 6: (4 VP)

Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E durch g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

und E: $4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11$.
Prüfen Sie nach, ob der Punkt A(3/0/2) auf der Geraden g liegt.
Zeigen Sie: Die Gerade g ist orthogonal zur Ebene E.
Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes der Ebene E, welcher vom Punkt A den kleinsten Abstand hat.

Aufgabe 7: (3 VP)

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der dargestellten Ebene.



Aufgabe 8: (3 VP)

Gegeben sind im Raum eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf g liegt.
Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung des Abstandes von A zu g.

Abiturprüfung Mathematik 2004 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Pflichtteil – Lösungen

Aufgabe 1:

Die Funktion muss erst umgeschrieben werden: $f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}=x^2\cdot\left(x^2+3\right)^{-1}$

Nun kann die Funktion mit der Produktregel und der Kettenregel abgeleitet werden:

$$f(x)=x^2\cdot\left(x^2+3\right)^{-1}\Rightarrow f'(x)=2x\cdot\left(x^2+3\right)^{-1}+x^2\cdot(-1)\cdot\left(x^2+3\right)^{-2}\cdot 2x$$

$$=\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2x^3}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2+3\right)-2x^3}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{6x}{\left(x^2+3\right)^2}$$

Hinweis: Alternativ könnte die Funktion auch mit der Quotientenregel abgeleitet werden, die aber ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr im Lehrplan enthalten ist:

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2+3)-x^2\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{6x}{(x^2+3)^2}$$

Aufgabe 2:

Um die Stammfunktion zu finden, muss die Funktion umgeschrieben werden:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}+\sin(2x)=x^{-2}+\sin(2x)$$

Berechnung einer Stammfunktion: $F(x)=-x^{-1}-\frac{1}{2}\cos(2x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cos(2x)$

Aufgabe 3:

$$e^{4x}-11e^{2x}+18=0$$

Substitution: $e^{2x}=u$

Daraus folgt: $u^2-11\cdot u+18=0\Rightarrow u_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-72}}{2}=\frac{11\pm 7}{2}$ damit $u_1=9$, $u_2=2$

Rücksubstitution: $9=e^{2x}\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}\ln 9=\ln 9^{0,5}=\ln 3$

$$2=e^{2x}\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}\ln 2$$

Aufgabe 4:

Funktionsgleichung $f(x) = \frac{2}{x} + 2 = 2 \cdot x^{-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = -2 \cdot x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$.

Berechnung von v: $f(1) = \frac{2}{1} + 2 = 4$ und daher lautet der vollständige Punkt P(1/4).

Steigung der Tangente in P: $f'(1) = -2$

Gleichung der Tangente t mit Punkt-Steigungs-Form: $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

t: $y - 4 = -2(x-1) \Rightarrow y = -2x + 6$

Hinweis:
Alternativ könnte auch die allgemeine Tangentenformel $y = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ *genutzt werden mit u = 1.*

Schnittpunkt der Tangente mit x-Achse:
Setze y = 0: $-2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$, also S(3/0)

Aufgabe 5:

1.) Die Aussage ist wahr. Grund: Die dargstellte Ableitungsfunktion verläuft oberhalb der x-Achse. Daher gilt $f'(x) > 0$ für -3 < x < 3 und daraus folgt, dass das Schaubild von f in diesem Intervall streng monoton wachsend ist.
2.) Die Aussage ist wahr. Besitzt das Schaubild von f einen Wendepunkt, dann besitzt das Schaubild von f' beim gleichen x-Wert einen Extrempunkt.. Da die Ableitungsfunktion bei x = 0 eine Extremstelle besitzt, besitzt das Schaubild von f folglich bei x = 0 einen Wendepunkt
3.) Die Aussage ist falsch. Da das Schaubild von f streng monoton wachsend ist (siehe 1.)) kann es nicht symmetrisch zur y-Achse sein.
4.) Die Aussage ist unentscheidbar. Man kann von dem Schaubild von f' nicht eindeutig auf bestimmte Punktkoordinaten des Schaubildes von f schließen (Mehrdeutigkeit der Stammfunktion, Integrationskonstante C ist frei wählbar).

Aufgabe 6:

Um zu prüfen, ob der Punkt A auf g liegt, wird eine Punktprobe durchgeführt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aus 3.Zeile: $2 = 0 + 2t \Rightarrow t = 1$
Aus 2.Zeile: $0 = 1 - t \Rightarrow t = 1$
Aus 1.Zeile: $3 = 1 + 2t \Rightarrow t = 1$

Alle 3 Zeilen liefern den gleichen Parameterwert, also liegt A(3/0/2) auf g.

g ist orthogonal zu E, wenn der Richtungsvektor von g ein Vielfaches des Normalenvektors von E ist.

Richtungsvektor von g = $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Da $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist, sind die Vektoren Vielfache zueinander und somit sind g und E zueinander orthogonal.

Der Punkt auf E, welcher vom Punkt A den kleinsten Abstand hat, ist der so genannte Lotfußpunkt auf E. Hierzu stellt man die Gleichung einer Hilfsgeraden h auf, die durch A verläuft und orthogonal auf E steht. Die Hilfsgerade entspricht bereits der angegebenen Geraden g, da g wie oben gezeigt genau diese beiden Eigenschaften besitzt.

Anschließend wird diese Hilfsgerade mit der Ebene geschnitten, damit erhält man den Lotfußpunkt.

Schnitt von g mit E: $4(1+2t) - 2(1-t) + 4 \cdot 2t = 11 \Leftrightarrow 18t = 9 \Leftrightarrow t = 0{,}5$

Einsetzung des t-Wertes in die Geradengleichung ergibt als Lotfußpunkt S(2/0,5/1).

S ist der Punkt auf E, der von A den kleinsten Abstand hat.

Aufgabe 7:

Die Durchstoßpunkte haben die Koordinaten $S_1(5/0/0)$, $S_2(0/4/0)$, $S_3(0/0/3)$.
Anhand der drei Punkte könnte man zunächst eine Parameterform aufstellen und diese in eine Koordinatengleichung umwandeln.

Da es sich hier um die Durchstoßpunkte mit den Koordinatenachsen handelt, geht es auch schneller. Der Hauptnenner der Werte 3 , 4 und 5 ist 60. Diese Zahl steht auf der rechten Seite der Koordinatengleichung.

Die Koeffizienten vor den Variablen auf der linken Seite müssen nun so gewählt werden, dass die Punktkoordinaten die Ebenengleichung erfüllen.

Daraus ergibt sich: E: $\frac{60}{5}x_1 + \frac{60}{4}x_2 + \frac{60}{3}x_3 = 60$

Gesamtergebnis: E: $12x_1 + 15x_2 + 20x_3 = 60$

Aufgabe 8:

Zunächst wird die Gleichung einer Hilfsebene E aufgestellt, die orthogonal zur Geraden g ist (Normalenvektor von E = Richtungsvektor von g) und den Punkt A enthält.
Anschließend wird der Schnittpunkt R der Geraden g und der Ebene E ermittelt.
R ist dann der Lotfußpunkt und der Abstand von A zum Lotfußpunkt R entspricht dem Abstand der Geraden zum Punkt A. Der Abstand von R zu A wird ermittelt durch $\overline{RA} = |\overrightarrow{RA}|$.