Hauptprüfung Abiturprüfung 2014 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Wahlteil Analysis 2

Hilfsmittel: GTR und Formelsammlung

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

März 2014

Aufgabe A 2.1:

Die Anzahl ankommender Fahrzeuge vor einem Grenzübergang soll modelliert werden. Dabei wird die momentane Ankunftsrate beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{1300000 \cdot t}{t^4 + 30000} \quad ; \quad 0 \le t \le 30$$

(t in Stunden nach Beobachtungsbeginn ; f(t) in Fahrzeuge pro Stunde).

Anfangs befinden sich keine Fahrzeuge vor dem Grenzübergang.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f.
Wann ist die momentane Ankunftsrate maximal ?
Bestimmen Sie die Anzahl der Fahrzeuge, die in den ersten 6 Stunden ankommen.
(4 VP)

b) Am Grenzübergang werden die Fahrzeuge möglichst schnell abgefertigt, jedoch ist die momentane Abfertigungsrate durch 110 Fahrzeuge pro Stunde begrenzt.
Wann beginnen sich die Fahrzeuge vor dem Grenzübergang zu stauen ?
Wie viele Fahrzeuge stauen sich maximal vor dem Grenzübergang ?
Welches Ergebnis erhielte man, wenn die momentane Abfertigungsrate 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn auf konstant 220 Fahrzeuge pro Stunde erhöht würde ?
(6 VP)

Aufgabe A 2.2

Für jedes a > 0 ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = a \cdot \cos(x) - a^2 \quad ; \quad -\pi < x < \pi$$

Der Graph von f_a ist G_a.

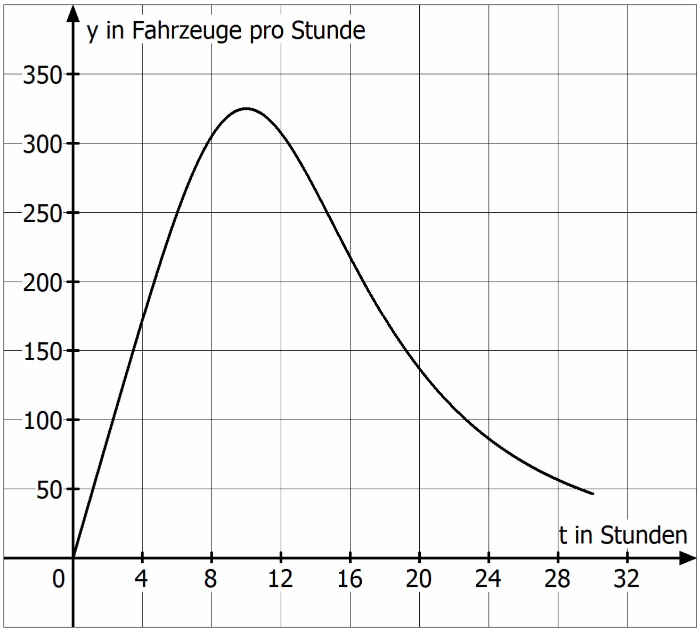
a) G_a besitzt einen Extrempunkt.
Bestimmen Sie dessen Koordinaten. (2 VP)

b) Durch welche Punkte der y-Achse verläuft kein Graph G_a ? (3 VP)

Lösungen

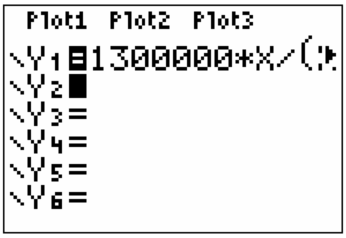
Aufgabe A 2.1

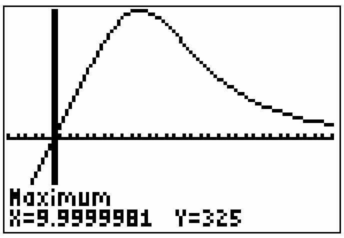
a) Skizze des Graphen von f:



Zeitpunkt maximaler Ankunftsrate:
Notwendige und hinreichende Bedingung: $f'(t)=0$ und $f''(t)\neq 0$

Berechnung mit dem GTR:





Die Ankunftsrate ist maximal für t = 10.
10 Stunden nach Beobachtungsbeginn ist die momentane Ankunftsrate maximal.

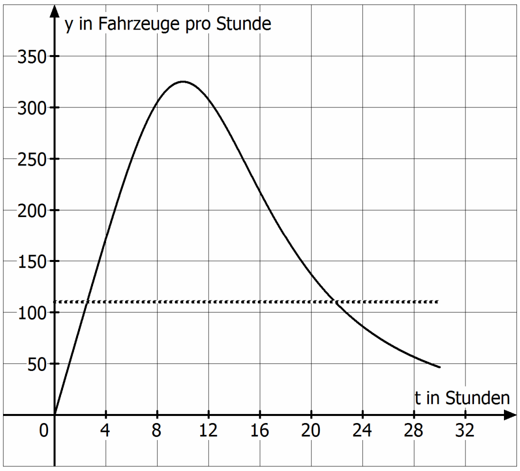
Anzahl der Fahrzeuge, die in den ersten 6 Stunden ankommen:

Da es sich bei f(t) um die momentane Ankunftsratenfunktion handelt, ergibt sich die Anzahl der Fahrzeuge durch die Berechnung eines Integrals:

$$\int_0^6 f(t)dt \approx 769{,}05 \quad \text{(GTR).}$$

In den ersten 6 Stunden kommen etwa 770 Fahrzeuge an.

b)



Die Gerade y = 110 stellt die Abfertigungsrate dar.
Die Fahrzeuge beginnen sich zu stauen, wenn die Ankunftsrate f(t) oberhalb der Abfertigungsrate liegt.

Berechnung des linken Schnittpunktes der Schaubilder: $f(t) = 110$
Mit dem GTR ergibt sich als Schnittstelle t = 2,54.

Die Fahrzeuge beginnen sich etwa 2,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn zu stauen.

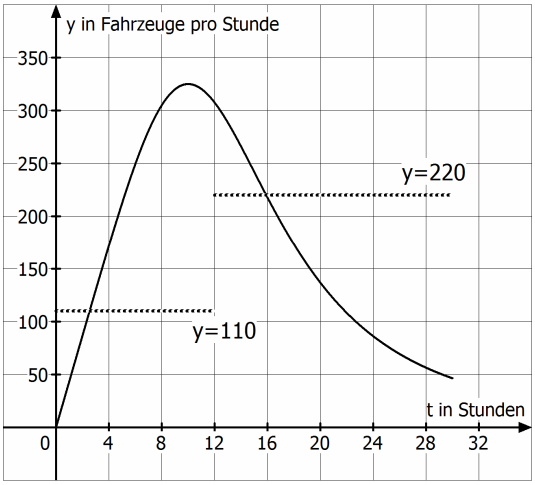
Die Anzahl der Fahrzeuge, die sich stauen entsprechen der Fläche, die das Schaubild von f(t) und die waagrechte Gerade einschließt.

Die rechte Schnittstelle der Schaubilder ist bei t = 21,86 Stunden.
Bis zu diesem Zeitpunkt liegt die Ankunftsrate oberhalb der Abfertigungsrate, das heißt der Stau nimmt zu. Erst für t > 21,86 Stunden baut sich der Stau wieder ab.

Die maximale Anzahl der Fahrzeuge, die sich stauen, berechnen sich folglich mit dem Integral $\int_{2,54}^{21,86} (f(t) - 110)dt = 2324,97$ (GTR)

Es befinden sich maximal etwa 2325 Fahrzeuge vor der Grenze.

Wenn die Abfertigungsrate nach 12 Stunden auf 220 Fahrzeuge pro Stunde erhöht wird, ergibt sich folgendes Bild:



Die Fahrzeuge beginnen sich auch hier nach t = 2,54 Stunden (linke Schnittstelle) zu stauen.
Die rechte Schnittstelle ändert sich nun:
Ansatz: $f(t) = 220$
Die Lösung mit dem GTR lautet t = 15,9 Stunden.

Bis zu diesem Zeitpunkt liegt die Ankunftsrate oberhalb der Abfertigungsrate, das heißt der Stau nimmt zu. Erst für t > 15,9 Stunden baut sich der Stau wieder ab.

Die maximale Anzahl der Fahrzeuge, die sich stauen, berechnen sich folglich mit dem Integral $\int_{2,54}^{12}(f(t)-110)dt + \int_{12}^{15,9}(f(t)-220)dt = 1422,6 + 179,8 = 1602,4$ (GTR)

Es befinden sich maximal etwa 1600 Fahrzeuge vor der Grenze.

Aufgabe 2.2

a) Koordinaten des Extrempunktes:

Gegenüber der üblichen Vorgehensweise bei der Extrempunktberechnung ($f_a'(x) = 0$ und $f_a''(x) \neq 0$) ist es hier einfacher, auf Basis der bekannten Extrempunkte der Funktion y = cos(x) die Extrempunkte von $f_a(x)$ herzuleiten.

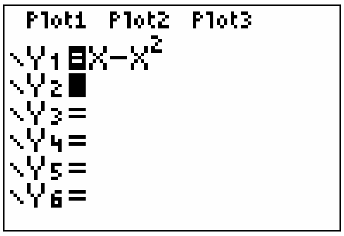
Im Intervall $-\pi < x < \pi$ besitzt das Schaubild y = cos(x) nur den Hochpunkt H(0/1).
Im ersten Schritt wird y = cos(x) mit dem Faktor a in y-Richtung gestreckt, dies ergibt $y = a \cdot \cos(x)$.
Dadurch ändert sich nur der y-Wert des Hochpunktes zu $H(0 / 1 \cdot a)$.

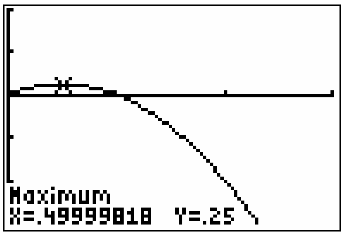
Im zweiten Schritt wird $y = a \cdot \cos(x)$ um a^2 nach unten verschoben.
Dies ergibt $f_a(x) = a\cos(x) - a^2$.
Dadurch ändert sich nur der y-Wert des Hochpunktes zu $H(0 / a - a^2)$ und dies ist der gesuchte Extrempunkt.

b) Das Schaubild G_a schneidet die y-Achse im in a) berechneten Hochpunkt $H(0 / a - a^2)$ für a > 0.

Nun ist gefragt, welche Werte von dem Term $a - a^2$ für a > 0 angenommen werden können.

Einzeichnen der Funktion $h(a) = a - a^2$ für a > 0 in den GTR:





Die Funktion h(a) hat ihr Maximum für a = 0,5 mit h(0,5) = 0,25.

Der Term $a - a^2$ kann für a > 0 alle Werte annehmen, die kleiner oder gleich 0,25 sind.

Das heißt, dass der y-Wert von H keine Werte oberhalb von 0,25 annehmen kann.

Daher verläuft durch keinen Punkt P(0/y) mit y > 0,25 ein Graph G_a .