Abiturprüfung Mathematik 2006 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Analytische Geometrie – Aufgabe II, 1

Aufgabe II 1.1

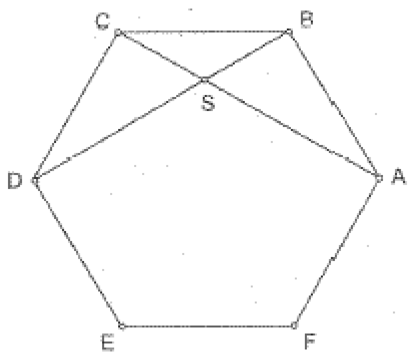
Die Punkte A(3/5/-4), B(4/1/4) und D(-4/9/0) legen eine Ebene E fest.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD gleichschenklig, aber nicht gleichseitig ist.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C so, dass das Viereck ABCD eine Raute ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes M dieser Raute.
(Teilergebnisse: E: $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 29$; M(0/5/2)). (5 VP)

b) Gegeben ist ein weiterer Punkt S(8/15/6).
Die Raute ABCD bildet zusammen mit dem Punkt S eine Pyramide.
Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide.
Der Pyramide wird ein Kreiskegel mit Spitze S einbeschrieben, dessen Grundfläche in der Ebene E liegt.
Berechnen Sie das Volumen des Kreiskegels. (7 VP)

Aufgabe II 1.2
Hinweis: ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

Gegeben ist das regelmäßige Sechseck ABCDEF.
Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem sich die Strecken AC und BD teilen. (4 VP)



Abiturprüfung Mathematik 2006 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösung Wahlteil – Analytische Geometrie – Lösung II, 1

Aufgabe II 1.1

a) Parameterform von E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

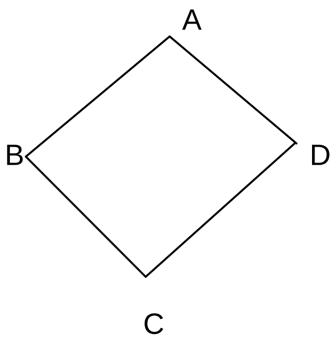
Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ -24 \end{pmatrix}$ bzw. gekürzt $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung: $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 29$
(Den Wert 29 auf der rechten Seite erhält man durch Einsetzen eines bekannten Ebenenpunktes – z.B. A(3/5/-4) – in die Koordinatengleichung).

Für die Gleichschenkligkeit müssen zwei der drei Dreiecksseiten gleich lang sein.

$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{81} = 9$; $\overline{AD} = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{81} = 9$

$\overline{BD} = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{144} = 12$ somit ist das Dreieck gleichschenklig, aber nicht gleichseitig.



Koordinaten von C erhält man mit Hilfe eines Vektorzuges:

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ und somit C(-3/5/8).

Der Diagonalenschnittpunkt M entspricht dem Mittelpunkt der Strecke BD bzw. der Strecke AC. Somit gilt M(0/5/2).

b) Das Volumen der Pyramide wird berechnet mit der Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyramide}$

Die Grundfläche entspricht der Rautenfläche: $A_{Raute} = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}$

Es gilt $\overline{AC} = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36+144} = \sqrt{180}$ und $\overline{BD} = 12$, also

$A_{Raute} = \frac{\sqrt{180} \cdot 12}{2} = 6 \cdot \sqrt{180}$

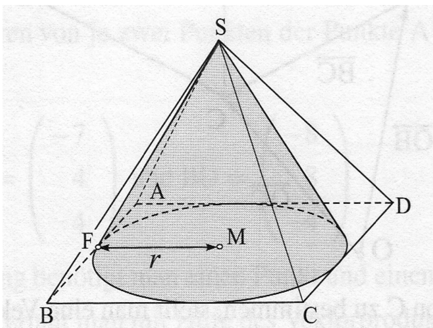
Die Höhe der Pyramide entspricht dem Abstand des Punktes S von der Grundflächenebene $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 29$.

Für die Abstandsberechnung wird die Hesse'sche Normalenform benötigt:

HNF von E: $\frac{4x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 29}{\sqrt{45}} = 0$

$h_{Pyramide} = d(S,E) = \left|\frac{4 \cdot 8 + 5 \cdot 15 + 2 \cdot 6 - 29}{\sqrt{45}}\right| = \frac{90}{\sqrt{45}}$

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \sqrt{180} \cdot \frac{90}{\sqrt{45}} = 360$ Volumeneinheiten



Das Volumen des einbeschriebenen Kegels lautet $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h_{Kegel}$

Es gilt $h_{Kegel} = h_{Pyramide} = \frac{90}{\sqrt{45}}$.

Der Radius des Kegels entspricht dem Abstand des Mittelpunktes M von der Geraden durch A und B. Da es sich bei der Grundfläche um kein Quadrat handelt, entspricht der in der Abbildung vorhandene Punkt F nicht dem Mittelpunkt der Seite AB.

Gerade durch AB: $g_{AB} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Aufstellen einer Hilfsebene H, die orthogonal zur Geraden ist und durch M verläuft:

H: $x_1 - 4x_2 + 8x_3 = -4$

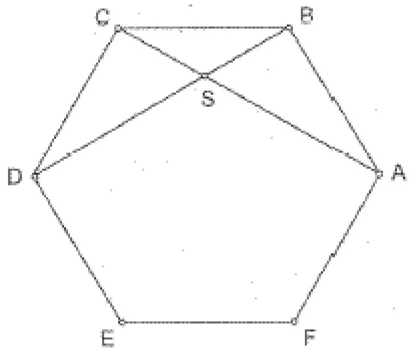
Schnittpunkt der Gerade mit H: $(3+r) - 4(5-4r) + 8(-4+8r) = -4 \Leftrightarrow 81r = 45 \Leftrightarrow r = \frac{5}{9}$

Also Schnittpunkt $F\left(\frac{32}{9} / \frac{25}{9} / \frac{4}{9}\right)$

Nun gilt: $r_{Kegel} = \left|\overrightarrow{MF}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{32}{9} \\ -\frac{20}{9} \\ -\frac{14}{9} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{1620}{81}} = \sqrt{20}$

Also folgt: $V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi \cdot 20 \cdot \frac{90}{\sqrt{45}} \approx 281$ Volumeneinheiten

Aufgabe II 1.2



1.Schritt: Einführung von 2 linear unabhängigen Vektoren:
$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$

2.Schritt: Aufstellen einer geschlossenen Vektorkette mit Knick in S:
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{SA} = \vec{0}$

3.Schritt: Vektorkette umschreiben so dass nur die definierten Vektoren des 1.Schrittes vorkommen.

$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$

$\overrightarrow{DS} = r \cdot \overrightarrow{DB} = r \cdot (-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = r \cdot (-\vec{b} + \vec{a})$

$\overrightarrow{SA} = s \cdot \overrightarrow{CA} = s \cdot (-0{,}5 \cdot \vec{b} - \vec{a})$

Vektorkette: $\vec{b} + r \cdot (-\vec{b} + \vec{a}) + s \cdot (-0{,}5 \cdot \vec{b} - \vec{a}) = \vec{0}$

$\vec{a} \cdot (r - s) + \vec{b} \cdot (1 - r - 0{,}5s) = 0$

4.Schritt: Da die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, müssen die Ausdrücke in den Klammern jeweils 0 ergeben.

r-s = 0 und 1-r-0,5s = 0 $\Rightarrow r = \frac{2}{3}$ und $s = \frac{2}{3}$

Die Strecken AC und BD verteilen sich im Verhältnis 2:1.