Hauptprüfung Abiturprüfung 2014 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Wahlteil Analytische Geometrie / Stochastik 1

Hilfsmittel: GTR und Formelsammlung

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

März 2014

Aufgabe B 1.1:

Gegeben sind die Punkte A(5/-5/0), B(5/5/0), C(-5/5/0) und D(-5/-5/0).
Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S(0/0/12).

a) Die Seitenfläche BCS liegt in der Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Berechnen Sie den Winkel, der von der Seitenfläche BCS und der Grundfläche der Pyramide eingeschlossen wird.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCS.
(4 VP)

b) Betrachtet werden nun Quader, die jeweils vier Eckpunkte auf den Pyramidenkanten und vier Eckpunkte in der Grundfläche der Pyramide haben.
Einer dieser Quader hat den Eckpunkt Q(2,5/2,5/0).
Berechnen Sie sein Volumen.
Bei einem anderen dieser Quader handelt es sich um einen Würfel.
Welche Koordinaten hat dessen Eckpunkt auf der Kante BS ?
(4 VP)

Aufgabe B 1.2

In einem Gefäß G1 sind 6 schwarze und 4 weiße Kugeln.
In einem Gefäß G2 sind 3 schwarze und 7 weiße Kugeln.

a) Aus Gefäß G1 wird 20 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 12 Mal eine schwarze Kugel gezogen wird.
Aus Gefäß G2 wird 8 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 schwarze Kugeln gezogen werden, und zwar bei direkt aufeinander folgenden Zügen.
(4 VP)

b) Nun werden aus G1 zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in das Gefäß G2 gelegt. Anschließend wird eine Kugel aus G2 gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel schwarz ?
(3 VP)

Lösungen

Aufgabe B 1.1:

a) Koordinatengleichung von E:

Die Parametergleichung der Ebene, in der die Punkte B, C und S liegen, ist

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Nun wird der Normalenvektor von E berechnet.

Mit dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren ergibt sich $\vec{n} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 50 \end{pmatrix}$

Als Normalenvektor kann $\overrightarrow{n^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ gewählt werden.

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $12x_2 + 5x_3 = d$
Einsetzen des Ebenenpunktes B(5/5/0) ergibt $12 \cdot 5 + 5 \cdot 0 = 60 = d$
Koordinatengleichung von E: $12x_2 + 5x_3 = 60$

Gesucht ist der Schnittwinkel der Ebene E und der x_1x_2-Ebene (Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

$$\cos\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{144+25} \cdot \sqrt{1}} = \frac{5}{13}\ ; \quad \text{Es ist } \alpha = 67{,}4°.$$

Flächeninhalt des Dreiecks BCS:

Die Fläche des Dreiecks kann mit der Formel $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS}\right|$ berechnet werden.

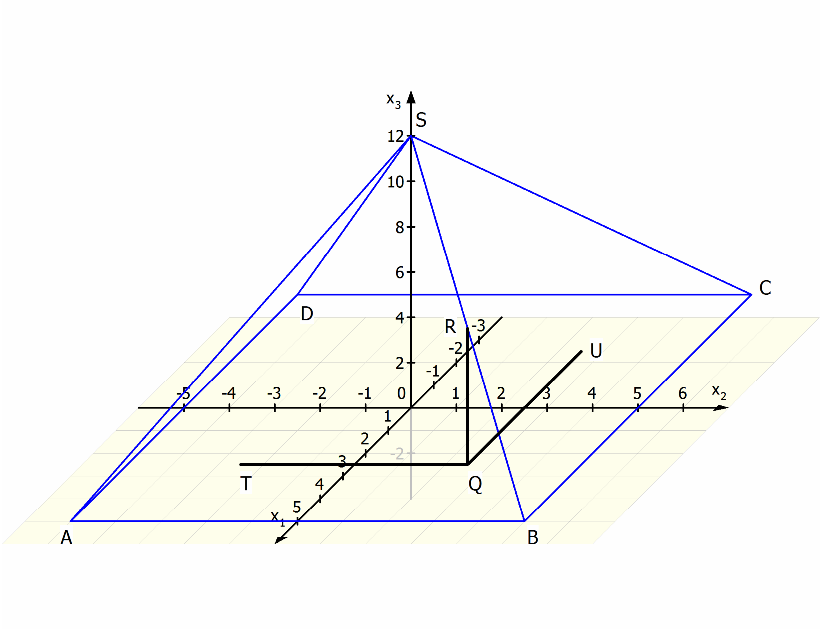
Es ist $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 50 \end{pmatrix}$ (siehe Rechnung oben) und

$$\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS}\right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 50 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{14400 + 2500} = 130.$$

Die Fläche des Dreiecks beträgt $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 130 = 65$ Flächeneinheiten.

Hinweis: Man hätte die Dreiecksfläche auch mit Hilfe der Eigenschaft der Gleichschenkligkeit des Dreiecks berechnen können.

b)



Aufgrund der Skizze ergeben sich neben Q(2,5/2,5/0) als weitere Quadereckpunkte T(2,5/-2,5/0) und U(-2,5/2,5/0).
Die Länge und die Breite des Quaders sind jeweils 5 LE.

Für die Höhe des Quaders benötigt man die Koordinaten des Punktes R(2,5/2,5/?), der auf der Geraden durch B und S liegt.

Gleichung der Gerade durch B und S: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$

Punktprobe mit R: $\begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ daraus folgt s = 0,5 und $x_3 = 6$

Mit R(2,5/2,5/6) ist die Höhe des Quaders h = 6.
$V_{Quader} = 5 \cdot 5 \cdot 6 = 150\text{ VE}$

Der Quader ist dann ein Würfel, wenn der Eckpunkt R die Koordinaten R(x/x/2x) besitzt.

Einsetzen von R in die Gerade durch B und S: $\begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}$

3.Zeile: $2x = 12s \Leftrightarrow x = 6s$

2.Zeile: $6s = 5 - 5s \Leftrightarrow s = \frac{5}{11}$ und damit $x = \frac{30}{11}$

Der gesuchte Eckpunkt R des Würfels hat die Koordinaten $R(\frac{30}{11} / \frac{30}{11} / \frac{60}{11})$.

Aufgabe B 1.2:

a) Wahrscheinlichkeit für das Ziehen aus G1:

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln.
X ist binomialverteilt mit n = 20 und p = 0,6.

Es gilt: $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11) = 0{,}596$ (GTR)

Wahrscheinlichkeit für das Ziehen aus G2:

Diese Wahrscheinlichkeit kann nicht mit der Binomialverteilung berechnet werden, da vorgegeben ist, an welchen möglichen Stellen die 2 schwarzen Kugeln zu ziehen sind (nämlich hintereinander):

Angenommen, die beiden schwarzen Kugeln werden gleich am Anfang gezogen:
Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit $0{,}3^2 \cdot 0{,}7^6$
Da die beiden schwarzen Kugeln aber auch während der Ziehung oder am Ende der Ziehung gezogen werden können, muss man berechnen, wie viele Möglichkeiten es gibt, die beiden schwarzen Kugeln auf der 8 Stellen zu verteilen.
Es gibt hierfür 7 Möglichkeiten.

Daher gilt: P(genau 2 schwarze Kugeln direkt hintereinander) = $7 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^6 = 0{,}074$

b) Folgende Fälle müssen betrachtet werden:

A) Aus G1 werden 2 schwarze Kugeln gezogen mit Wk $\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

B) Aus G1 wird 1 schwarze und 1 weiße Kugel gezogen mit Wk $\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}$

C) Aus G1 werden 2 weiße Kugeln gezogen mit Wk $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$

Im Fall A) sind 5 schwarze Kugeln in G2: P(schwarze Kugel) = $\frac{5}{12}$

Im Fall B) sind 4 schwarze Kugeln in G2: P(schwarze Kugel) = $\frac{4}{12}$

Im Fall C) sind 3 schwarze Kugeln in G2: P(schwarze Kugel) = $\frac{3}{12}$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt:
P(schwarze Kugel aus G2) = $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} + \frac{8}{15} \cdot \frac{4}{12} + \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{12} = 0{,}35$