

Abiturprüfung Mathematik 2006 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Aufgaben Analysis I 1

- a) Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \frac{120(x-120)^2}{(x-120)^2 + 7200} + 10 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 130$$

Ihr Schaubild sei K .

Skizzieren Sie K .

Das Schaubild C einer weiteren Funktion g mit $g(x) = ax^2 + bx + c$ enthält die Punkte $P_1(0/95)$, $P_2(10/95)$ und $P_3(20/92)$. Bestimmen Sie die Koeffizienten a , b und c . Skizzieren Sie C im ersten Feld des vorhandenen Koordinatensystems.

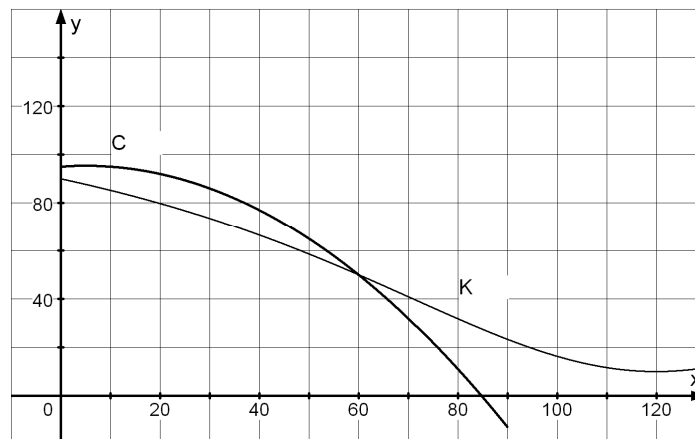
(Teilergebnis: $g(x) = -0,015x^2 + 0,15x + 95$) (5 VP)

Eine Skisprunganlage besteht aus Sprungschanze und Aufsprunghang. Das Schaubild K beschreibt das Profil des Aufsprunghanges, die Kurve C die Flugbahn des Skispringers. Der Absprung erfolgt bei $x = 0$ (alle Angaben in Meter).

- b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, an dem der Springer auf dem Aufsprunghang aufsetzt.
Wie groß ist die maximale vertikal gemessene Höhe des Springers über dem Aufsprunghang ? (5 VP)
- c) Der Wendepunkte $W(71/40)$ von K entspricht dem „kritischen Punkt“ des Aufsprunghanges.
Mögliche Flugbahnen des Skispringers werden nun durch die Schaubilder der Funktionen g_k mit $g_k(x) = -0,015x^2 + kx + 95$ beschrieben.
Welchen Wert darf der Parameter k höchstens annehmen, damit der Springer mit dieser Flugbahn nicht hinter dem kritischen Punkt landet ? (4 VP)
- d) Beim Umbau dieser Schanze soll das Profil des Aufsprunghanges verändert werden. Er soll nach dem Umbau durch die Funktion h mit
 $h(x) = 0,0001 \cdot (1,25x^3 - 225x^2 + 2150x + 900.000)$ mit $0 \leq x \leq 130$ beschrieben werden.
Muss zur Realisierung des neuen Profils insgesamt Erde weggefahren oder angeliefert werden, wenn angenommen wird, dass der Aufsprunghang überall gleich breit ist ? (4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2006 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösung Wahlteil – Aufgaben Analysis I 1

- a) Skizze für Schaubild K von f und Schaubild C von g



Berechnung der Koeffizienten a, b und c:

$$g(0) = 95 \Rightarrow c = 95$$

$$g(10) = 95 \Rightarrow 100a + 10b + 95 = 95 \Rightarrow 100a + 10b = 0$$

$$g(20) = 92 \Rightarrow 400a + 20b + 95 = 92 \Rightarrow 400a + 20b = -3$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (Additionsverfahren oder mit GTR) liefert $a = -0,015$ und $b = 0,15$ und $c = 95$

$$g(x) = -0,015x^2 + 0,15x + 95$$

- b) Der Springer setzt am Schnittpunkt von K und C auf dem Aufsprunghang auf:

$$g(x) = f(x) \Leftrightarrow -0,015x^2 + 0,15x + 95 = \frac{120(x-120)^2}{(x-120)^2 + 7200} + 10$$

Mit dem GTR ergibt sich als Lösung $x = 60$, also Schnittpunkt S(60/50).

Die maximale vertikale Höhe des Springers über dem Aufsprunghang ergibt sich aus der Ermittlung des absoluten Maximums von dem Term $h(x) = g(x) - f(x)$.

Nach dem Einzeichnen des Schaubildes von h in den GTR kann dann das absolute Maximum ermittelt werden. Es liegt bei $x = 26,1$ mit dem y-Wert $h(26,1) = 12,64$. Die maximale vertikal gemessene Höhe beträgt damit 12,64 Meter.

- c) $g_k(x) = -0,015x^2 + kx + 95$

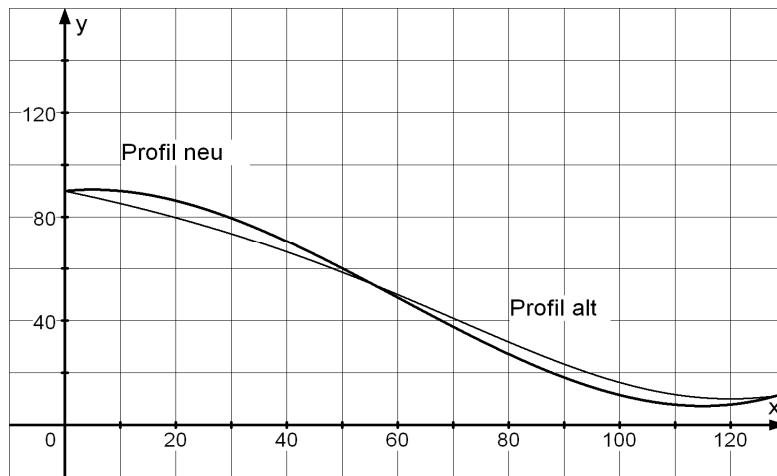
Nun ist die Bedingung, dass die Flugbahn und der Aufsprunghang sich nicht in einem Punkt schneiden, der hinter dem kritischen Punkt W(71/40) liegt.

Für $x \leq 71$ muss die Flugbahn den Aufsprunghang geschnitten haben.

$$g_k(71) = -75,615 + 71k + 95 \leq 40 \Leftrightarrow k \leq 0,29$$

Der Parameter k darf höchstens den Wert 0,29 annehmen.

- d) Zunächst muss die so genannte Querschnittsfläche der Schanze berechnet werden. Da die Schanze überall gleich breit ist, reicht die Information über die Querschnittsfläche aus, um festzustellen, ob Erde angeliefert oder weggefahren werden muss.



Die Querschnittsfläche kann mit Hilfe des Integrals ermittelt werden:

Altes Profil :

$$A_f = \int_0^{130} f(x)dx = \int_0^{130} \left(\frac{120(x-120)^2}{(x-120)^2 + 7200} + 10 \right) dx = 5978,15 \text{ (GTR)}$$

Neues Profil:

$$A_n = \int_0^{130} h(x)dx = \int_0^{130} (0,0001 \cdot (1,25x^3 - 225x^2 + 2150x + 900.000)) dx = 5964,56 \text{ (GTR)}$$

Da das neue Profil eine geringere Querschnittsfläche besitzt, muss Erde weggefahren werden.