Pflichtteilaufgaben zu Stochastik (Pfadregeln, Erwartungswert, Binomialverteilung)

Baden-Württemberg

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

September 2016

Übungsaufgaben:

Ü1:
In einer Urne befinden sich 5 weiße und 2 schwarze Kugeln.
Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

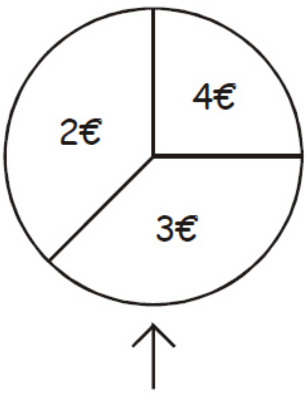
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens eine gezogene Kugel schwarz ?

b) Wie viele schwarze Kugeln müssten sich in der Urne befinden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 96% mindestens eine der gezogenen Kugeln schwarz wäre ?

Ü2:
In einer Urne befinden sich 7 Kugeln mit den Zahlen 1 bis 7.
Es wird solange ohne Zurücklegen gezogen, bis eine ungerade Zahl gezogen wird.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst im dritten Zug eine ungerade Zahl gezogen wird ?
b) Berechne den Erwartungswert der Versuchsanzahl.

Ü3:
In einer Urne befinden sich 3 schwarze und 3 weiße Kugeln.
Es wird solange ohne Zurücklegen gezogen, bis eine weiße Kugel gezogen wird.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst im dritten Zug eine weiße Kugel gezogen wird ?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man höchstens dreimal zieht ?

Ü4:
Bei einem Glücksspiel wird ein Glücksrad benutzt. Als Einsatz zahlt man 3 €. Das Glücksrad wird einmal gedreht. Man erhält den Betrag ausgezahlt, dessen Sektor über dem Pfeil zu stehen kommt.
Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Gewinn.



Ü5:
Ein Rummelplatzbesucher sieht ein Glücksrad und stellt folgende Rechnung auf:
$1€ \cdot \frac{1}{3} - 3€ \cdot \frac{1}{2} + 4€ \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}€$
Was bedeutet diese Rechnung vermutlich ?
Wie könnte das zugehörige Glücksrad aussehen und die Gewinnregel lauten ?

Ü6:
Ein Skat - Kartenspiel enthält 32 Karten mit vier Farben zu je acht Werten.
Die Karten werden gemischt.

a) Nacheinander werden drei Karten gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Die drei gezogenen Karten sind von gleicher Farbe.
B: Die drei gezogenen Karten haben den gleichen Wert (z.B. drei Asse)

b) Das Kartenspiel wird zu einem Glücksspiel benutzt. Hierbei muss der Spieler nur eine Karte ziehen.
Der Spieler setzt vor dem Ziehen einer Karte als Einsatz 1 €.
Zieht der Spieler einen König, gewinnt er 4€.
Zieht er ein Herz-Ass, gewinnt er 8€
Bei allen anderen Spielausgängen bekommt er nichts.
Ist das Spiel fair ?
Wie muss man den Gewinn bei der Ziehung des Herz-Ass ändern, damit das Spiel fair ist ?

Ü7:
In einer Kiste befinden sich 10 beschriftete Kugeln.
Sechs von ihnen tragen die Aufschrift 1€, drei die Aufschrift 2€ und eine die Aufschrift 5€.

a) Ein Spieler zahlt 2€ Einsatz, zieht verdeckt eine Kugel und bekommt den Betrag ausgezahlt, der auf der Kugel steht. Ist das Spiel fair ?

b) Der Spielbetreiber ändert die Spielregel folgendermaßen ab:
Der Spieler zahlt weiterhin 2€ Einsatz, zieht aber hintereinander zwei Kugeln und bekommt den höchsten, der auf einer der Kugeln steht, ausgezahlt.
Wie stark hat sich die Gewinnaussicht des Spielers verbessert ?

Ü8:
Sabine wird von einer Mitschülerin zu einem Glücksspiel aufgefordert.
Es sollen zwei Münzen geworfen werden und ihr Einsatz soll 2€ betragen.
Nachdem sie die Gewinnregel erfahren hat, rechnet sie:
$-2€ \cdot 0{,}5 + 1€ \cdot 0{,}25 + 2€ \cdot 0{,}25 = -0{,}25€$
Was hat sie gerechnet und welchen Schluss wird sie daraus ziehen ?
Wie könnte die vorgeschlagene Gewinnregel aussehen ?

Ü9:
Bei einem Sportfest kann man mit Pfeil und Bogen auf eine Scheibe schießen .
Ein Spieler trifft die Scheibe mit 70% Wahrscheinlichkeit.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er bei zwei Würfen zweimal ?
b) Beschreiben Sie ein Ereignis A und ein Ereignis B, so dass gilt:

$$P(A) = 0{,}3^8 \quad ; \quad P(B) = \binom{30}{20} \cdot 0{,}7^{20} \cdot 0{,}3^{10}$$

Ü10:
Ein Arbeitnehmer passiert auf seiner Fahrt zur Arbeit eine Kreuzung mit Ampel.
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% muss er dort anhalten.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss er an drei aufeinander folgenden Tagen nicht an der Ampel anhalten ?

b) Beschreiben Sie ein Ereignis A und ein Ereignis B, so dass gilt:

$$P(A) = 0{,}3^3 \quad ; \quad P(B) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^3$$

Ü11:
Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,6.

a) Welche der Abbildungen zeigt die Verteilung von X ?
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise $P(4 < X < 7)$ und $P(X \neq 5)$.

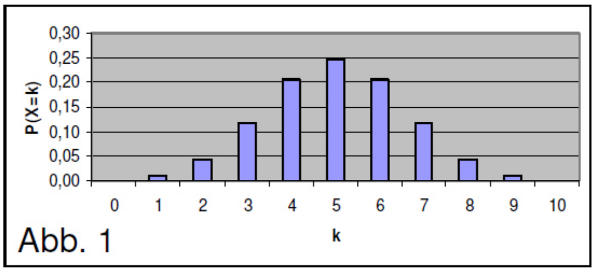


Abb. 1

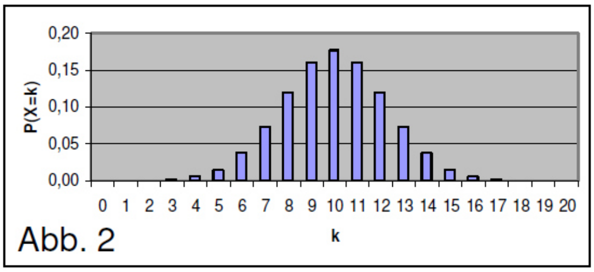


Abb. 2

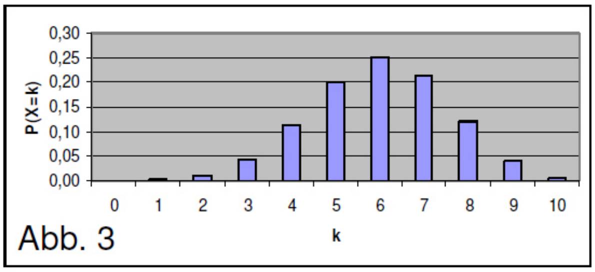


Abb. 3

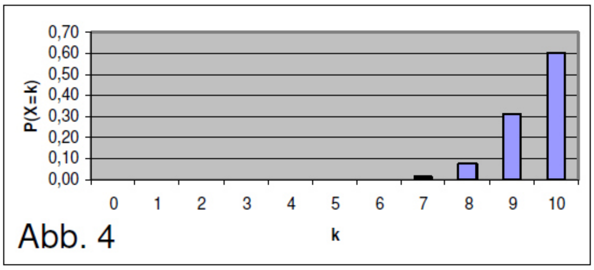


Abb. 4

Abituraufgaben (Haupttermin)

Aufgabe 1: (Abiturprüfung 2016)
Bei einem Glücksrad werden die Zahlen 1, 2, 3 und 4 bei einmaligem Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt:

Zahl	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,1	0,3	0,2

a) Das Glücksrad wird einmal gedreht.
Geben Sie zwei verschiedene Ereignisse an, deren Wahrscheinlichkeit jeweils 0,7 beträgt.
b) An dem Glücksrad sollen nur die Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2 so verändert werden, dass das folgende Spiel fair ist:
Für einen Einsatz von 2,50 € darf man einmal am Glücksrad drehen.
Die angezeigte Zahl gibt den Auszahlungsbetrag in Euro an.
Bestimmen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2.

Aufgabe 2: (Abiturprüfung 2015)
Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden:

Rot: 20% Grün: 30% Blau: 50%

Das Glücksrad wird n-mal gedreht.
Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.
a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.

Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
P(X=k)	0,01	0,06	0,14	0,21	0,22	0,17	0,11	0,05	...

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens dreimal Rot angezeigt wird.

c) Entscheiden Sie , welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann:
20, 25 oder 30
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 3: (Abiturprüfung 2014)
An einem Spielautomaten verliert man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele.
a) Formulieren Sie ein Ereignis A, für das gilt:

$$P(A) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

b) Jemand spielt vier Spiele an dem Automaten.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er dabei genau zwei Mal ?

Aufgabe 4: (Abiturprüfung 2013)

Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch.

a) Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch.
B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch.

b) Die neun Spielkarten werden gemischt und erneut verdeckt ausgelegt. Laura dreht nun so lange Karten um und lässt sie aufgedeckt auf dem Tisch liegen, bis ein Ass erscheint.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an.
Welche Werte kann X annehmen ?
Berechnen Sie $P(X \leq 2)$.

Lösungen

Ü1:

a) P(mindestens eine schwarze Kugel) = 1 - P(zwei weiße Kugeln)

$$=1-\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7}=1-\frac{25}{49}=\frac{24}{49}$$

b) In der Urne befinden sich 5 weiße und x schwarze Kugeln.
Es soll gelten: P(mindestens eine schwarze Kugel) 1 - P(zwei weiße Kugeln) = 0,96

$$\Rightarrow 1-\frac{5}{n+5}\cdot\frac{5}{n+5}=0{,}96\Rightarrow\frac{25}{(n+5)^2}=0{,}04\Rightarrow(n+5)^2=625$$
$$\Rightarrow n+5=25\Rightarrow n=20$$

In der Kugel befinden sich 20 schwarze Kugeln.

Ü2:

a) P(erst im dritten Zug eine ungerade Zahl) =

P(gerade, gerade, ungerade) $=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{35}$

b) Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Versuche.
Sie kann die Werte 1, 2, 3 oder 4 annehmen.

Es gilt: $P(X=1)=\frac{4}{7}$ $P(X=2)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{7}$ $P(X=3)=\frac{4}{35}$ (siehe a))

$$P(X=4)=1-\frac{4}{7}-\frac{2}{7}-\frac{4}{35}=\frac{1}{35}$$

$$E(X)=1\cdot\frac{4}{7}+2\cdot\frac{2}{7}+3\cdot\frac{4}{35}+4\cdot\frac{1}{35}=\frac{8}{5}=1{,}6$$

Die erwartete Versuchsanzahl liegt bei 1,6.

Ü3:

a) P(erst im dritten Zug eine weiße Kugel) = P(ssw) = $\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$

b) P(höchstens dreimal Ziehen) = P(w) + P(sw) + P(ssw) $=\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{20}=\frac{19}{20}$

Ü4:

Die Zufallsvariable X gibt den Auszahlungsbetrag an.

Anhand der Feldeinteilung kann die Wahrscheinlichkeit für die Auszahlungsbeträge ermittelt werden:

$P(X=4€)=\frac{1}{4}$ $P(X=2€)=P(X=3€)=\frac{3}{8}$

Erwartete Auszahlung: $E(X) = 4€ \cdot \frac{1}{4} + 2€ \cdot \frac{3}{8} + 3€ \cdot \frac{3}{8} = \frac{23}{8}€$

Der erwartete Gewinn beträgt $\frac{23}{8}€ - 3€ = -\frac{1}{8}€$

Man muss also durchschnittlich mit einem Verlust rechnen.

Ü5:

Die Rechnung gibt den erwarteten Gewinn des Besuchers an.
Da dieser negativ ist, muss der Spieler durchschnittlich 50 Cent Verlust in Kauf nehmen.

Das Glücksrad ist in 3 Felder eingeteilt.
Der Einsatz beträgt 3€.

Bei Feld 1 werden 4€ ausbezahlt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ (Mittelpunktswinkel 120°)

Bei Feld 2 werden 0€ ausbezahlt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ (Mittelpunktswinkel 180°)

Bei Feld 3 werden 7 € ausbezahlt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ (Mittelpunktswinkel 60°)

Ü6:

a) $P(A) = 1 \cdot \frac{7}{31} \cdot \frac{6}{30} = \frac{7}{155}$ (die erste Karte spielt keine Rolle, nur die zweite und dritte Karte müssen dieselbe Farbe wie die erste Karte haben)

$P(B) = 1 \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{2}{30} = \frac{1}{155}$ (die erste Karte spielt keine Rolle, nur die zweite und dritte Karte müssen denselben Wert wie die erste Karte haben)

b) Die Zufallsvariable X sei der Auszahlungsbetrag an den Spieler.

$P(X = 4€) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ $\quad P(X = 8€) = \frac{1}{32}$ $\quad P(X = 0€) = \frac{27}{32}$

Erwartete Auszahlung: $E(X) = 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{32} = 0{,}75€$

Der Spieler hat einen erwarteten Verlust von $0{,}75€ - 1€ = -0{,}25€$
Das Spiel ist nicht fair.

Damit das Spiel fair ist, müsste gelten: $E(X) = 1€$.
Der Auszahlungsbetrag für das Herz-Ass sei a.

$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{8} + a \cdot \frac{1}{32} = 1 \Rightarrow \frac{1}{32}a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 16€$

Der Spieler müsste bei fairem Spiel bei einem Herz-Ass eine Auszahlung von 16€ erhalten.

Ü7:

a) Die Zufallsvariable X sei der Auszahlungsbetrag an den Spieler.

$P(X=1€)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ $P(X=2€)=\frac{3}{10}$ $P(X=5€)=\frac{1}{10}$

Erwartete Auszahlung: $E(X)=1€\cdot\frac{3}{5}+2€\cdot\frac{3}{10}+5€\cdot\frac{1}{10}=1{,}7€$

Der erwartete Verlust des Spielers beträgt 1,70 € - 2€ = -0,30 €.
Das Spiel ist nicht fair.

b) Die Zufallsvariable X sei der Auszahlungsbetrag an den Spieler.

P(X = 1€) = P(zwei Kugeln mit "1€") = $\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$

P(X = 5€) = 1 - P(keine Kugel mit "5€") = $1-\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$

$P(X=2€)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{7}{15}$

Erwartete Auszahlung: $E(X)=1€\cdot\frac{1}{3}+2€\cdot\frac{7}{15}+5€\cdot\frac{1}{5}=\frac{34}{15}€$

Der erwartete Gewinn des Spielers beträgt $\frac{34}{15}€-2€=\frac{4}{15}€$

Der Spieler gewinnt auf lange Sicht.

Ü8:

Sabine hat den erwarteten Gewinn berechnet.
Das Ergebnis sagt aus, dass Sabine im Durchschnitt mit einem Verlust von 25 Cent pro Spiel rechnen muss.

Eine mögliche Gewinnregel lautet:
Wird zweimal Wappen geworfen, erhält Sabine eine Auszahlung von 3€.
Wird zweimal Zahl geworfen, erhält Sabine eine Auszahlung von 4€.
Ansonsten wird nichts ausgezahlt.

Ü9:

a) P(zwei Treffer) = $0{,}7\cdot 0{,}7=0{,}49$

b) Ereignis A: Der Spieler schießt achtmal und trifft nie.
Ereignis B: Der Spieler schießt 30mal und trifft genau 20mal.

Ü10:

a) P(dreimal hintereinander nicht an der Ampel anhalten) = $0{,}7^3$

b) Ereignis A: Der Autofahrer muss dreimal hintereinander anhalten.
Ereignis B: Der Autofahrer muss an fünf Tagen genau zweimal an der Ampel anhalten.

Ü11:

a) Die Abbildung 2 kommt nicht in Frage, da mehr als 10 Treffer möglich sind.
Aus n = 10 und p = 0,6 folgt $E(X) = n \cdot p = 6$

Die höchsten Wahrscheinlichkeiten der Zufallsvariable liegen in der Umgebung von 6 Treffern. Daher kommt nur Abbildung 3 in Frage.

b) $P(4 < X < 7) = P(X = 5) + P(X = 6) = 0{,}2 + 0{,}25 = 0{,}45$
$P(X \neq 5) = 1 - P(X = 5) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

Aufgabe 1:

a) Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0,7:
A: "Es werden die Zahlen 1 oder 2 oder 4 gedreht" (bzw. "Es wird keine 3 gedreht")
B: "Es werden die Zahlen 1 oder 3 gedreht" (bzw. "Es wird eine ungerade Zahl gedreht")

b) Für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten gelten nun: P("1") = p
Da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss, ergibt sich daraus
P("2") = 1 - p - 0,3 - 0,2 = 0,5 - p

Die Zufallsvariable X sei die Auszahlung an den Spieler in Euro.
Das Spiel ist dann fair, wenn gilt: E(X) = 2,50 Euro.

Es gilt: $E(X) = 1 \cdot p + 2 \cdot (0{,}5 - p) + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 = -p + 2{,}7$

Bedingung: $-p + 2{,}7 = 2{,}5 \Rightarrow p = 0{,}2$

Daraus folgt: P("1") = 0,2 und P("2") = 0,5-0,2 = 0,3

Aufgabe 2:

a) X ist binomialverteilt, da es für jeden der n Versuche nur zwei Ausgänge gibt:
"Rot" (Treffer) und "Nicht Rot" (kein Treffer)
Außerdem ist die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer stets p = 0,2.

b) P(mindestens dreimal rot) =
$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (0{,}01 + 0{,}06 + 0{,}14) = 1 - 0{,}21 = 0{,}79$

c) Bei n = 20 würde $E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}2 = 4$ gelten.
Bei n = 25 wäre E(X) = 5 und bei n = 30 wäre E(X) = 6.
Da gemäß Tabelle die größte Wahrscheinlichkeit bei 4 Treffern liegt, muss der Erwartungswert auch ungefähr 4 sein. Daher kommt nur n = 20 in Frage.

Aufgabe 3:

a) Die dargestellte Formel ergibt sich aus der Formel der Binomialverteilung:

$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

Die Formel P(A) setzt sich aus drei Summanden zusammen:

1.Summand = $\binom{10}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2$ entspricht der obigen Formel mit n = 10, k = 8, $p=\frac{2}{3}$

Dieser stellt die Wahrscheinlichkeit dar, mit der man bei 10 Spielen am Automaten bei einer Verlustwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ genau 8 Spiele verliert.

2.Summand = $10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^9\cdot\frac{1}{3}$ entspricht der obigen Formel mit n = 10, k = 9, $p=\frac{2}{3}$

Hinweis: Der 2.Summand lautet ausführlich $\binom{10}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^9\cdot\frac{1}{3}$, da $\binom{10}{9}=10$ ist

Dieser stellt die Wahrscheinlichkeit dar, mit der man bei 10 Spielen am Automaten bei einer Verlustwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ genau 9 Spiele verliert.

3.Summand = $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$ entspricht der obigen Formel mit n = 10, k = 10, $p=\frac{2}{3}$

Hinweis: Der 3.Summand lautet ausführlich $\binom{10}{10}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0$, da $\binom{10}{10}=1$ und $\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$

Dieser stellt die Wahrscheinlichkeit dar, mit der man bei 10 Spielen am Automaten bei einer Verlustwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ genau 10 Spiele verliert.

Fazit: Ereignis A heißt, dass man bei 10 Spielen am Automaten bei einer Verlustwahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ mindestens 8 verliert.

b) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der verlorenen Spiele am Automaten an.

X ist binomialverteilt mit n = 4 und $p=\frac{2}{3}$.

Es ist $P(X=2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}=6\cdot\frac{4}{81}=\frac{8}{27}$

Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{27}$ verliert der Spieler genau zwei von vier Spielen.

Aufgabe 4:

a) Es handelt sich um eine Ziehung ohne Zurücklegen:

$$P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$$

Erklärung: Die Spielkarten müssen nur unterschieden werden in Asse und „Nicht-Asse“) Bei der ersten Ziehung sind 5 von 9 Karten „Nicht-Asse“, bei der zweiten Ziehung sind 4 von 8 Karten „Nicht-Asse“)
Zur Veranschaulichung könnte man auch ein Baumdiagramm heranziehen.

$$P(B) = P(\text{erst Dame dann Ass}) + P(\text{erst Ass dann Dame}) \quad = \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{9}$$

b) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an.
X kann die Werte von 1, 2, 3, 4, 5, 6 annehmen.
Begründung: Wenn gleich beim ersten Mal ein Ass aufgedeckt wird, ist X = 1.
Da spätestens die sechste Karte ein Ass sein muss (davor können die drei Könige und die zwei Damen aufgedeckt werden) kann X maximal den Wert 6 annehmen.

$$P(X \le 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{13}{18}$$

Begründung für P(X=2): zunächst muss ein Nicht-Ass gezogen werden und dann ein Ass.