Hauptprüfung Abiturprüfung 2016 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Wahlteil Analysis 2

Hilfsmittel: GTR und Formelsammlung

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

April 2016

Aufgabe A 2.1:

In einem Skigebiet beträgt die Schneehöhe um 10.00 Uhr an einer Messstelle 150 cm.
Die momentane Änderungsrate dieser Schneehöhe wird beschrieben durch die Funktion s mit

$$s(t) = 16e^{-0,5t} - 14e^{-t} - 2 \quad ; \quad 0 \le t \le 12$$

(t in Stunden nach 10.00 Uhr, s(t) in Zentimeter pro Stunde).

a) Bestimmen Sie die maximale momentane Änderungsrate der Schneehöhe.
Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate der Schneehöhe größer als 2 cm pro Stunde ist.
Wie hoch liegt der Schnee um 12.00 Uhr ?
(4 VP)

b) Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm, der die Schneehöhe zum Zeitpunkt t beschreibt.
Zu welchen Uhrzeiten beträgt die Schneehöhe 153 cm ?
(3 VP)

c) Um 12.30 Uhr werden nun Schneekanonen in Betrieb genommen. Sie liefern konstant so viel Schnee, dass sich die momentane Änderungsrate der Schneehöhe an der Messstelle um 1 cm pro Stunde erhöht.
Um wie viele Stunden verlängert sich durch diese Maßnahme der Zeitraum, in dem die Schneehöhe zunimmt ?
Wie viele Zentimeter Schnee pro Stunde müssten die Schneekanonen ab 12.30 Uhr liefern, damit um 18.00 Uhr die Schneehöhe 160 cm betragen würde ?
(4 VP)

Aufgabe A 2.2:

Für jedes a > 0 ist eine Funktion g_a gegeben durch

$$g_a(x) = a \cdot \cos(a \cdot x) \quad ; \quad -\frac{\pi}{2a} \le x \le \frac{\pi}{2a}$$

Der Graph von g_a schneidet die y-Achse in einem Punkt. Die Strecke von diesem Punkt zum Ursprung ist die Diagonale einer Raute. Die beiden weiteren Eckpunkte der Raute liegen auf dem Graphen von g_a.

a) Bestimmen Sie für a = 3 die Längen der beiden Diagonalen dieser Raute. (2 VP)

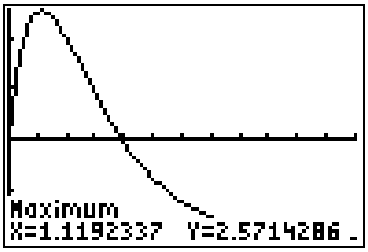
b) Bestimmen Sie den Wert von a, für den die Raute ein Quadrat ist. (2 VP)

Lösungen

Aufgabe A 2.1

a) Maximale momentane Änderungsrate:

GTR-Schaubild der Änderungsrate im Bereich $0 \le t \le 12$:

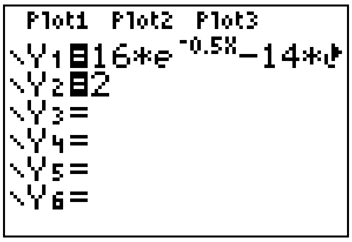


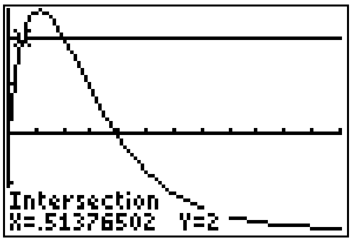
Bedingung: $s'(t) = 0$ und $s''(t) < 0$

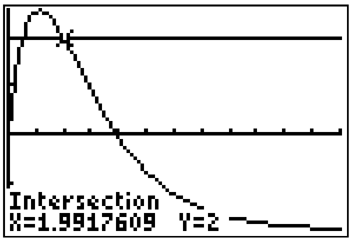
GTR: Die maximale momentane Änderungsrate wird erreicht nach t = 1,12 h und beträgt s(1,12) = 2,57 cm pro Stunde.

Zeitraum, in dem momentane Änderungsrate größer als 2 cm pro Stunde ist:

Bedingung: $s(t) > 2$







GTR: Es ist s(t) = 2 für $t \approx 0{,}5\text{h}$ und $t \approx 2\text{h}$.
Die momentane Änderungsrate ist im Zeitraum 10.30 Uhr bis 12 Uhr größer als 2 cm pro Stunde.

Schneehöhe um 12 Uhr:

$$h = 150 + \int_0^2 s(t)dt = 150 + 4{,}12 = 154{,}12 \text{ cm} \quad \text{(GTR)}$$

b) Die Schneehöhe zum Zeitpunkt t lässt sich durch eine Stammfunktion von s(t) beschreiben.

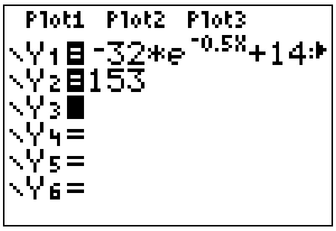
$$h(t) = \frac{1}{-0{,}5} \cdot 16e^{-0{,}5t} - \frac{1}{-1} \cdot 14e^{-t} - 2t + C = -32e^{-0{,}5t} + 14e^{-t} - 2t + C$$

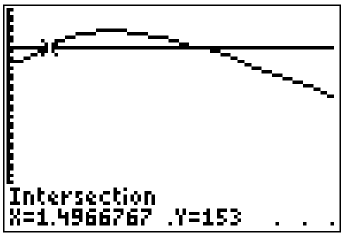
C wird berechnet mit der Bedingung $h(0) = 150$

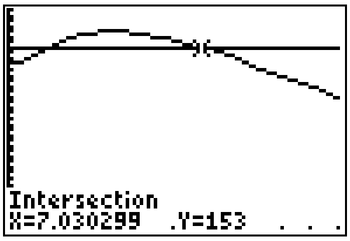
$$h(0) = -32 + 14 + C = 150 \Rightarrow C = 168$$

Der gesuchte Funktionsterm lautet $h(t) = -32e^{-0{,}5t} + 14e^{-t} - 2t + 168$

Uhrzeiten mit Schneehöhe 153 cm:
Bedingung: h(t) = 153







GTR: Es gilt t = 1,5 und t = 7 (GTR)
Um ca. 11.30 Uhr und um ca. 17 Uhr beträgt die Schneehöhe 153 cm.

c) Wenn sich die momentane Änderungsrate um 1 cm pro Stunde erhöht, gilt für die neue Änderungsratenfunktion $s^*(t) = s(t) + 1 = 16e^{-0,5t} - 14e^{-t} - 1$

Die Schneehöhe nimmt zu, wenn das Schaubild von s(t) bzw. s*(t) oberhalb der t-Achse liegt.

Nullstelle der alten Änderungsrate: $s(t) = 0$ liefert t = 3,89. (GTR)
Nullstelle der neuen Änderungsrate: $s^*(t) = 0$ liefert t = 5,43 (GTR).

Durch den Einsatz von Schneekanonen verlängert sich der Zeitraum um $5,43 - 3,89 = 1,54$ Stunden.

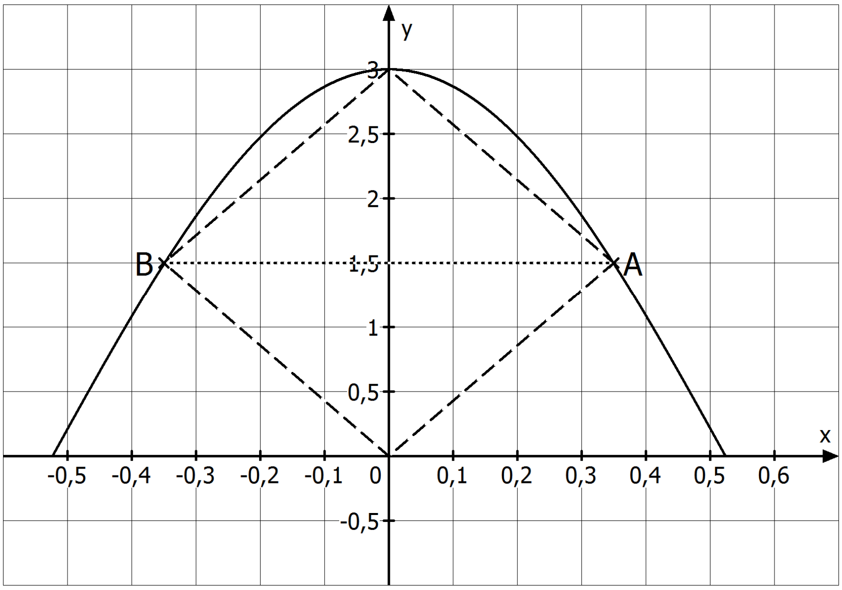
Ohne Schneekanonen beträgt die Schneehöhe um 18 Uhr $h(8) = 151,42$ cm.

Die Schneekanone muss daher in einem Zeitraum von 5,5 Stunden eine zusätzliche Schneehöhe 160 cm - 151,42 cm = 8,58 cm liefern.

Hierzu muss sie pro Stunde eine Leistung von $\frac{8,58\text{cm}}{5,5\text{h}} = 1,56\frac{\text{cm}}{\text{h}}$ liefern.

Aufgabe A 2.2

Skizze:

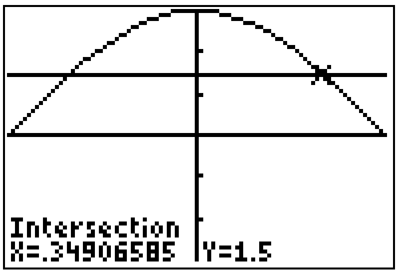


a) Die Funktion lautet $g_3(x) = 3 \cdot \cos(3x)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $g_3(0) = 3 \Rightarrow S_y(0/3)$

Bei einer Raute schneiden sich die Diagonalen orthogonal in ihren Mittelpunkten.
Da die eine Diagonale der Raute auf der y-Achse liegt und die Länge 3 besitzt, muss die zweite Diagonale waagrecht auf der Höhe y = 1,5 liegen.

Gesucht sind die Punkte A und B, die sich aus der Bedingung $g_3(x) = 1{,}5$ ergeben.



Der Punkt A besitzt den x-Wert x = 0,35, also A(0,35/1,5).
Aus Symmetriegründen ergibt sich B(-0,35/1,5).

Länge der beiden Diagonalen:
Die senkrechte Diagonale besitzt die Länge 3 LE:
Die waagrechte Diagonale besitzt die Länge $2 \cdot 0{,}35 = 0{,}7$ LE.

b) In einem Quadrat sind die Diagonalen gleich lang.

Schnittpunkt des Schaubildes von g_a mit der y-Achse: $S_y(0 / a)$.

Länge der senkrechten Diagonale: a

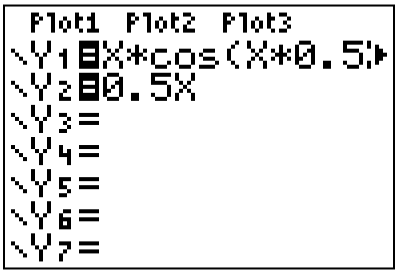
Daher muss die waagrechte Diagonale ebenfalls die Länge a besitzen.

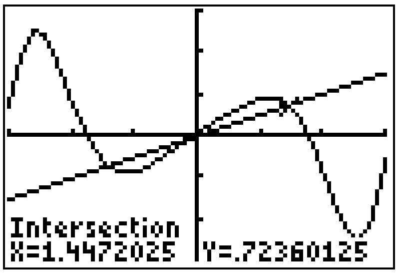
Der Punkt A, der sich bei einer Raute auf halber Höhe $y = 0{,}5a$ befinden muss (siehe Teilaufgabe a)) muss daher den x-Wert $0{,}5a$ besitzen.

Bedingung: $g_a(0{,}5a) = 0{,}5a$

$\Rightarrow a \cdot \cos(a \cdot 0{,}5a) = 0{,}5a$

Lösung mit GTR:





Da a > 0 sein soll, ergibt sich als einzige mögliche Lösung a = 1,45.