Abiturprüfung Mathematik 2004 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Analysis – Aufgabe I, 3

Aufgabe I 3.1

Für jedes k > 0 ist eine Funktion f_k gegeben durch

$$f_k(x) = \frac{3k \cdot e^x}{e^{2x} + k} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

Ihr Schaubild sei C_k.

a) Skizzieren Sie für drei selbst gewählte Werte von k die Schaubilder C_k in ein gemeinsames Koordinatensystem.
Untersuchen Sie das Verhalten von f_k für $x \to \pm\infty$.
Stellen Sie gemeinsame Eigenschaften der skizzierten Schaubilder zusammen.
(5 VP)

b) Jedes Schaubild C_k hat genau einen Hochpunkt.
Berechnen Sie dessen Koordinaten.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte aller C_k.
Ergänzen Sie die Skizze aus Teilaufgabe a) um diese Ortskurve.
(6 VP)

c) Der Term $f_4(x)$ beschreibt für $x \geq 0$ die Zuwachsrate der von einer Bakterienkultur bedeckten Fläche zum Zeitpunkt x (x in min ab Beobachtungsbeginn, $f_4(x)$ in cm²/min).
Um wie viele Quadratzentimeter vergrößert sich die von der Kultur bedeckte Fläche in den ersten 2 Minuten ?
(3 VP)

Aufgabe I 3.2

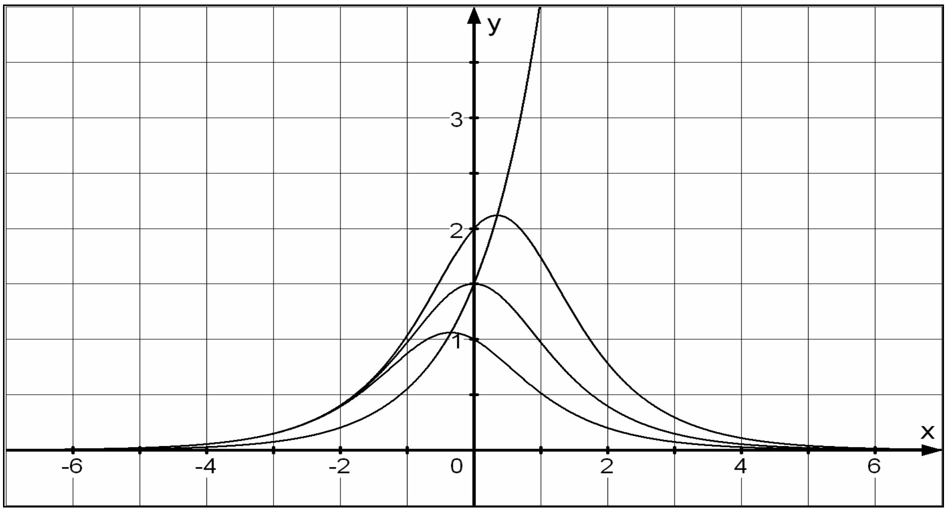
Hinweis: Ab der Abiturprüfung 2012 ist dies nicht mehr prüfungsrelevant

Die Ableitung der Funktion h_1 mit $h_1(x) = \frac{1}{x}$; $x \neq 0$ und die Produktregel werden als bekannt vorausgesetzt.
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die Funktion h_n mit $h_n(x) = \frac{1}{x^n}$; $x \neq 0$ die Ableitung $h_n{}'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ hat.
(4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2004 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Analysis – Lösung Aufgabe I, 3

Aufgabe I 3.1

a) Die skizzierten Schaubilder beziehen sich auf die Parameter k = 2, k = 1 und k = 0,5 (Schaubilder von oben nach unten betrachtet). Das Schaubild, das durch die Hochpunkte verläuft, ist die Ortskurve der Hochpunkte (siehe b)).



Es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_k(x) = 0$ für alle Parameter k > 0. Daraus folgt, dass die x-Achse y = 0 die waagrechte Asymptote ist.

Gemeinsame Eigenschaften der skizzierten Schaubilder:
1) Alle Schaubilder besitzen einen Hochpunkt.
2) Alle Schaubilder besitzen die waagrechte Asymptote y = 0.
3) Alle Schaubilder besitzen keine Nullstellen.
4) Alle Schaubilder besitzen genau zwei Wendepunkte.
5) Alle Schaubilder sind symmetrisch bzgl. einer senkrechten Geraden.

b) Zur Berechnung der Ableitungsfunktion wird die Funktion umgeschrieben:

$$f_k(x) = \frac{3k \cdot e^x}{e^{2x} + k} = \frac{3k \cdot e^x}{e^x \cdot \left(e^x + k \cdot e^{-x}\right)} = \frac{3k}{e^x + k \cdot e^{-x}} = 3k \cdot \left(e^x + k \cdot e^{-x}\right)^{-1}$$

b)

$$f_k'(x) = -3k \cdot \left(e^x + k \cdot e^{-x}\right)^{-2} \cdot \left(e^x - ke^{-x}\right) = \frac{-3k}{\left(e^x + ke^{-x}\right)^2} \cdot \left(e^x - ke^{-x}\right)$$

Berechnung des Hochpunktes:

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - ke^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = ke^{-x} \Rightarrow x = \ln(k) - x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \ln(k)$$

Da aus der Aufgabenstellung bekannt ist, dass jedes Schaubild genau einen Hochpunkt besitzt, muss die hinreichende Bedingung für die Existenz eines Hochpunktes nicht mehr geprüft werden.

Die Existenz des Hochpunkt bei $x=\frac{1}{2}\ln(k)$ kann daher angenommen werden.

$$f(\frac{1}{2}\ln k)=\frac{3k\cdot e^{\frac{1}{2}\ln k}}{e^{2\cdot\frac{1}{2}\ln k}+k}=\frac{3k\cdot e^{\ln\sqrt{k}}}{e^{\ln k}+k}=\frac{3k\cdot\sqrt{k}}{k+k}=\frac{3}{2}\sqrt{k}\quad \text{also HP}(\frac{1}{2}\ln k\,/\,\frac{3}{2}\sqrt{k}\,)$$

Ortskurve der Hochpunkte:

$x=\frac{1}{2}\ln k$ (1) und $y=\frac{3}{2}\sqrt{k}$ (2)

Aus (1): $k=e^{2x}$ eingesetzt in (2): $y=\frac{3}{2}\sqrt{e^{2x}}=\frac{3}{2}e^{x}$

Die Ortskurve der Hochpunkte lautet $y=\frac{3}{2}e^{x}$

c) Der Bestandszuwachs ergibt sich durch Integration der Zuwachsrate:

$$\text{Zuwachs} = \int_0^2 f_4(x)dx=\int_0^2\frac{12e^{x}}{e^{2x}+4}dx=5{,}06 \quad \text{(mit GTR)}$$

Die Fläche nimmt in den ersten 2 Minuten somit um 5,06 cm² zu.

Aufgabe I 3.2

1.) **Induktionsanfang:**
Nachweis, dass die Aussage für n = 1 richtig ist:
Aus $h_1(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$ folgt $h_1'(x)=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$, was als bekannt in der Aufgabenstellung vorausgesetzt wurde.

2.) **Induktionsschritt:**

a) **Formulierung der Induktionsvoraussetzung:**
Es gibt eine natürliche Zahl n, für die die Aussage

die Funktion $h_n(x)=\frac{1}{x^n}$; $x\neq 0$ besitzt die Ableitung $h_n{}'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$

gültig ist.

b) **Formulierung der Induktionsbehauptung:**
Die Aussage gilt für n+1, das heißt die Funktion $h_{n+1}(x)=\frac{1}{x^{n+1}}$; $x\neq 0$ besitzt die Ableitung $h_{n+1}{}'(x)=-\frac{n+1}{x^{n+2}}$

b) **Beweis des Induktionsschrittes:**

$$h'_{n+1}(x) = \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^n}\right)' = \left(h_1(x)\cdot h_n(x)\right)' = h'_1(x)\cdot h_n(x) + h_1(x)\cdot h'_n(x)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^n} + \frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{n}{x^{n+1}}\right) = \frac{-1-n}{x^{n+2}} = -\frac{n+1}{x^{n+2}}$$

Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen bewiesen.