Abiturprüfung Mathematik 2013 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis A 2

Aufgabe A 2.1

Ein zunächst leerer Wassertank einer Gärtnerei wird von Regenwasser gespeist.
Nach Beginn eines Regens wird die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion r mit

$$r(t) = 10000 \cdot \left(e^{-0,5t} - e^{-t}\right) \quad ; \quad 0 \le t \le 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, r(t) in Liter pro Stunde).

a) Bestimmen Sie die maximale Zuflussrate.
In welchem Zeitraum ist diese Zuflussrate größer als 2000 Liter pro Stunde ?
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab ?
(4 VP)

b) Wie viel Wasser befinden sich drei Stunden nach Regenbeginn im Tank ?
Zu welchem Zeitpunkt sind 5000 Liter im Tank ? (3 VP)

c) Zur Bewässerung von Gewächshäusern wird nach 3 Stunden begonnen, Wasser aus dem Tank zu entnehmen. Daher wird die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Tank ab diesem Zeitpunkt durch die Funktion

$$w(t) = r(t) - 400\,; \quad 3 \le t \le 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, w(t) in Liter pro Stunde).
Wie viel Wasser wird in den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn entnommen ?
Ab welchem Zeitpunkt nimmt die Wassermenge im Tank ab ?
Bestimmen Sie die maximale Wassermenge im Tank. (4 VP)

Aufgabe A 2.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ für $0 \le x \le 1$
Der Graph von f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt A.
Berechnen Sie A exakt.

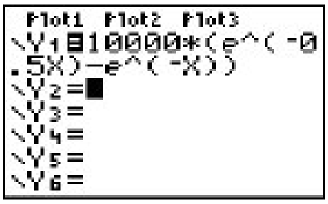
Der Graph einer ganzrationalen Funktion g zweiten Grades schneidet die x-Achse bei x = 0 und x = 1 und schließt mit der x-Achse eine Fläche ein, deren Inhalt halb so groß wie A ist.
Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von g.
(4 VP)

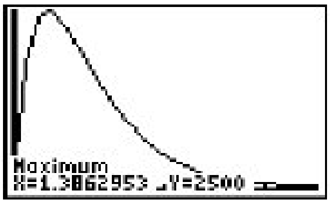
Abiturprüfung Mathematik 2013 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analysis A 2

Aufgabe A 2.1

a) Die maximale momentane Zuflussrate entspricht dem y-Wert des Hochpunktes von r(t).
Notwendige und hinreichende Bedingung: $r'(t) = 0$ und $r''(t) < 0$

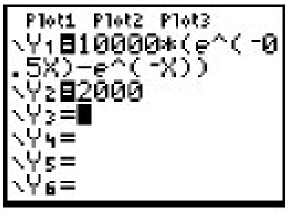
Lösung mit dem GTR:

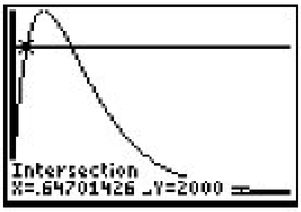


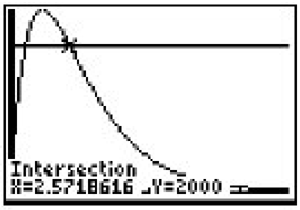


Die Zuflussrate wird t = 1,386 Stunden nach Regenbeginn maximal.
Die maximale Zuflussrate beträgt r(1,386) = 2500 Liter pro Stunde.

Die momentane Zuflussrate nimmt Werte größer als 2000 Liter pro Stunde an , wenn gilt:
$r(t) \geq 2000$
Die Lösung der Ungleichung erfolgt mit dem GTR:



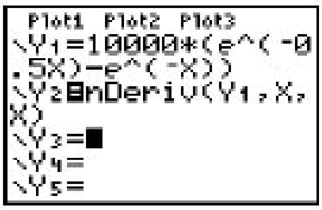


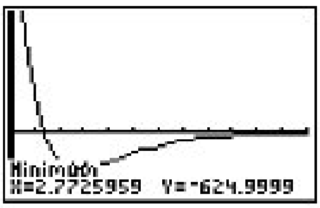


Die momentane Zuflussrate ist im Intervall $0{,}647 \leq t \leq 2{,}572$ (also von etwa 0,6 Stunden bis etwa 2,6 Stunden nach Regenbeginn) größer als 2000 Liter pro Stunde.

Die stärkste Abnahme der momentanen Zuflussrate ist zu dem Zeitpunkt, an dem die Ableitungsfunktion $r'(t)$ den kleinsten (negativen) Funktionswert annimmt.

Lösung mit dem GTR:





Die momentane Zuflussrate nimmt etwa 2,8 Stunden nach Regenbeginn am stärksten ab.

b) Berechnung der Wassermenge nach 3 Stunden:

Da die Funktion r(t) die momentane Zuflussrate beschreibt, ergibt sich die Wassermenge zu einem bestimmten Zeitpunkt über die Berechnung eines Integrals:

$$\int_0^3 r(t)dt = 6035{,}3 \text{ (GTR)}$$

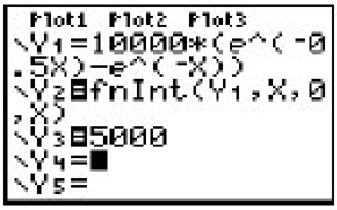
In den ersten drei Stunden nach Regenbeginn sind etwa 6035 Liter Wasser in den Tank geflossen. Da der Tank zu Beginn leer war, entspricht das folglich auch der Menge, die sich nach 3 Stunden im Tank befindet.

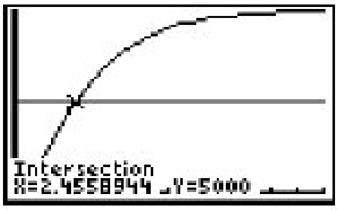
Der Zeitpunkt, zu dem sich 5000 Liter im Tank befinden, seit t = u.

Ansatz: $\int_0^u r(t)dt = 5000$

Gesucht ist die obere Grenze u des Integrals, so dass sich im Ergebnis 5000 ergibt.

Auch dies kann mit dem GTR gelöst werden.
In den Funktionseditor muss eine Integralfunktion eingegeben werden mit unterer Grenze 0 und oberer Grenze x.



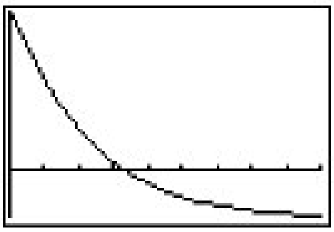
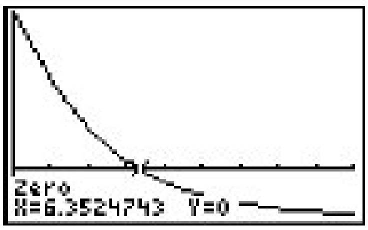


Als Lösung mit dem GTR ergibt sich u = 2,456.
Nach etwa 2,5 Stunden befinden sich 5000 Liter Wasser im Tank.

c) Für die Lösung dieser Aufgabe muss die neue Funktion w(t) interpretiert werden.
Der Term r(t) gibt an, dass der Zufluss genau so wie bisher erfolgt.
Der Term -400 gibt an, dass pro Stunde eine konstante Menge von 400 Liter entnommen wird.

In den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn werden $9 \cdot 400 = 3600$ Liter Wasser entnommen (in den ersten 3 Stunden nach Regenbeginn wird noch kein Wasser entnommen !)

Skizze des Schaubildes von w(t) (ab $t \geq 3$)

Interpretation:
Wenn sich das Schaubild von w(t) oberhalb der t-Achse befindet, ist die momentane Zuflussrate positiv, das heißt, dass die Wassermenge im Tank zunimmt.
Es ist w(t) = 0 für t = 6,352 Stunden. Zu diesem Zeitpunkt ist die Wassermenge im Tank maximal. Für t > 6,352 nimmt die Wassermenge im Tank ab, da sich das Schaubild von w(t) unterhalb der t-Achse befindet und die Zuflussrate negativ ist.

Berechnung der maximalen Wassermenge:

$$\int_3^{6,352} w(t)dt = 1806{,}3 \text{ Liter (GTR)}$$

Vom Zeitpunkt t = 3 bis t = 6,352 fließen 1806,3 Liter in den Tank.
Da zum Zeitpunkt t = 3 bereits 6035,3 Liter im Tank gewesen sind (siehe Aufgabe b)) beträgt die maximale Wassermenge nach 6,352 Stunden 1806,3 + 6035,3 = 7841,6 Liter.

Aufgabe A 2.2

Berechnung der Fläche:

$$A = \int_0^1 \sin(\pi \cdot x)dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi \cdot x)\right]_0^1 = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi) + \frac{1}{\pi}\cos(0) = -\frac{1}{\pi}\cdot(-1) + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Ansatz für die Funktionsgleichung von g(x):
Da die Nullstellen x = 0 und x = 1 von g(x) bekannt sind, kann die Funktion durch $g(x) = a \cdot x \cdot (x-1)$ aufgestellt werden.

Der Parameter a muss nun so gewählt werden, dass sich die gleiche Fläche ergibt, die oben berechnet wurde:

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 a \cdot x \cdot (x-1)dx = a \cdot \int_0^1 x \cdot (x-1)dx = a \cdot (-\frac{1}{6}) \quad \text{(Integralberechnung mit dem GTR)}$$

Nun soll gelten: $a \cdot (-\frac{1}{6}) = \frac{1}{\pi}$ und damit $a = -\frac{6}{\pi} \approx -1{,}91$ und damit $g(x) = -1{,}91 \cdot x \cdot (x-1)$

Eine weitere Lösungsmöglichkeit wäre, dass $a \cdot (-\frac{1}{6}) = -\frac{1}{\pi}$ gilt, denn das Ergebnis des Integrals könnte ja auch negativ sein, wenn sich die Fläche unterhalb der x-Achse befindet.
In dem Fall wäre $a = \frac{6}{\pi} \approx 1{,}91$ und die Funktionsgleichung lautet $g(x) = 1{,}91 \cdot x \cdot (x-1)$.