Abiturprüfung Mathematik 2012 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analytische Geometrie II 1

Aufgabe II 1

Die Ebene E enthält die Punkte A(6/1/0), B(2/3/0) und P(3/0/2,5).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
Unter welchem Winkel schneidet E die x_1-Achse ?
(Teilergebnis: E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$) (4 VP)

b) Zeigen Sie, daß das Dreieck ABP gleichschenklig ist.
Das Viereck ABCD ist ein Rechteck mit Diagonalenschnittpunkt P.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte C und D.
Es gibt senkrechte Pyramiden mit Grundfläche ABCD und Höhe 12.
Berechnen Sie die Koordinaten der Spitzen dieser Pyramiden. (6 VP)

c) Welche Punkte der x_1-Achse bilden jeweils mit A und B ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse AB ?
(3 VP)

d) Gegeben ist ein senkrechter Kegel mit Grundkreismittelpunkt M(0/0/0), Grundkreisradius 4 und Spitze S(0/0/12).
Untersuchen Sie, ob der Punkt R(2/2/3) innerhalb des Kegels liegt. (3 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2012 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analytische Geometrie II 1

Aufgabe II 1

a) Im ersten Schritt wird die Ebene als Parameterform aufgestellt:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Nun wird der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ der Ebene berechnet.

Es gilt: $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix} = 0$.

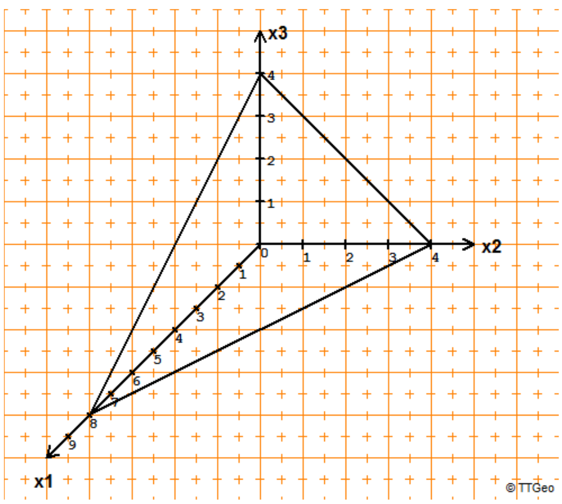
$$\begin{array}{rrrcl} -4n_1 & +2n_2 & & = & 0 \\ -3n_1 & -n_2 & +2,5n_3 & = & 0 \end{array}$$

Setze $n_1 = 1$. Daraus folgt $n_2 = 2$ und $n_3 = 2$.

Damit gilt: E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d$
Einsetzen des Punktes A(6/1/0) ergibt $6 + 2 + 0 = d \Rightarrow d = 8$

Die Koordinatengleichung von E lautet $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$.

Zur Veranschaulichung der Ebene müssen die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen bestimmt werden:
Schnittpunkt mit der x_1-Achse: $S_1(x_1 / 0 / 0) \Rightarrow S_1(8 / 0 / 0)$
Schnittpunkt mit der x_2-Achse: $S_2(0 / x_2 / 0) \Rightarrow S_2(0 / 4 / 0)$
Schnittpunkt mit der x_3-Achse: $S_3(0 / 0 / x_3) \Rightarrow S_3(0 / 0 / 4)$



Schnittwinkel von E mit der x_1 – Achse:

Die x_1-Achse besitzt den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

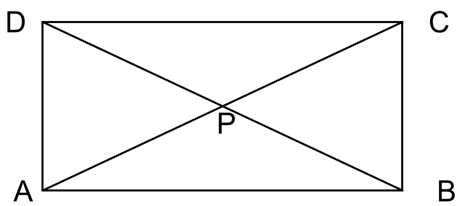
$$\sin\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 19{,}47^\circ$$

b) Um die Gleichschenkligkeit zu beweisen, werden die Längen der Dreiecksseiten berechnet:

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \qquad \overline{AP} = \left|\overrightarrow{AP}\right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+1+6{,}25} = \sqrt{16{,}25}$$

$$\overline{BP} = \left|\overrightarrow{BP}\right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+9+6{,}25} = \sqrt{16{,}25}$$

Da $\overline{AP} = \overline{BP}$ ist, ist das Dreieck ABP gleichschenklig.



Berechnung von C: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ also C(0/-1/5)

Berechnung von D: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + 2 \cdot \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ also D(4/-3/5)

Die Spitzen S und S* der Pyramiden liegen senkrecht über bzw. unter dem Mittepunkt P der Grundfläche ABCD mit dem Abstand 12.

Zur Berechnung der Koordinaten der Pyramidenspitzen wird der Normalenvektor von E $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzw. der zugehörige Normaleneinheitsvektor $\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ benötigt.

Es gilt: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + 12 \cdot \overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10{,}5 \end{pmatrix}$ also S(7/8/10,5)

$\overrightarrow{OS^*} = \overrightarrow{OP} - 12 \cdot \overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}$ also S*(-1/-8/-5,5)

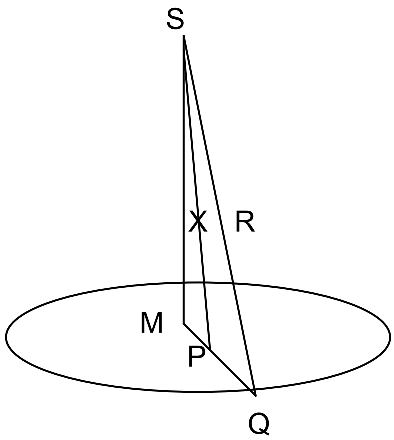
c) Ein allgemeiner Punkt auf der x_1-Achse besitzt die Koordinaten $W(w / 0 / 0)$.
Wenn AB die Hypotenuse darstellt, muß im Punkt W der rechte Winkel vorliegen.

Bedingung für den rechten Winkel in W: $\overrightarrow{AW} \cdot \overrightarrow{BW} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} w-6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w-2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow (w-6)(w-2) + 3 = 0 \Rightarrow w^2 - 8w + 15 = 0 \Rightarrow w_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$

Daraus folgt w = 5 oder w = 3.
Es gibt zwei Punkte: W(5/0/0) oder W(3/0/0).

d)



Da der x_3-Wert von R zwischen 0 und 12 liegt, könnte er innerhalb des Kegels liegen.
Ob er tatsächlich innerhalb liegt, wird nun folgendermaßen geprüft:

Der Grundkreis liegt in der $x_1 - x_2$-Ebene (dies ist daran erkennbar, dass der Ursprung M den Mittelpunkt darstellt und die Strecke von M nach S senkrecht zum Grundkreis verläuft).

Nun wird die Gleichung der Gerade g aufgestellt, die R und S enthält:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Nun wird der Schnittpunkt von g mit der $x_1 - x_2$-Ebene berechnet (in der Skizze als P dargestellt)

Liegt P innerhalb des Grundkreises (gemäß der Skizze), dann liegt R auch innerhalb des Kegels.
Liegt P auf dem Grundkreis, würde R auf dem Kegelmantel liegen.
Liegt P außerhalb des Grundkreises, liegt R auch außerhalb des Kegels.

Schnitt von g mit der $x_1 - x_2$-Ebene:

Setze $x_3 = 0 \Rightarrow 12 - 9t = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{3}$

Einsetzen des t-Wertes in die Gerade ergibt den Schnittpunkt $P(\frac{8}{3} / \frac{8}{3} / 0)$.

Der Abstand von P zum Mittelpunkt M(0/0/0) beträgt $\overline{PM} = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{64}{9}} \approx 3{,}77 < 4$

Damit liegt P innerhalb des Grundkreises und folglich der Punkt R auch innerhalb des Kegels.