Abiturprüfung Mathematik 2005 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Aufgaben Analysis I 1

Aufgabe I 1.1

Ein Supermarkt A führt eine neue Zahnpasta ein. In den ersten fünf Wochen ergeben sich folgende wöchentliche Verkaufszahlen:

Verkaufswoche	1	2	3	4	5
Verkaufte Stückzahl in dieser Woche	26	46	60	76	86

In einem Modell beschreibt die Funktion f der Form $f(x) = \frac{ax+15}{bx+15}$ die verkaufte Stückzahl f(x) innerhalb der Woche x.

a) Bestimmen Sie a und b anhand der Werte der ersten und fünften Woche.
Zeichnen Sie das Schaubild K der Funktion f für das erste Jahr.
Wie entwickeln sich nach diesem Modell die wöchentlichen Verkaufszahlen während des ersten Jahres ? Nennen Sie mögliche Gründe für diese Entwicklung.
(Teilergebnis: $f(x) = \frac{427x+15}{2x+15}$) (5 VP)

b) Bestimmen Sie näherungsweise, wie viele Tuben Zahnpasta der Supermarkt A in den ersten 52 Wochen insgesamt verkauft. Nach wie vielen Wochen sind insgesamt mehr als 1500 Tuben verkauft ? (3 VP)

c) Gleichzeitig mit dem neuen Supermarkt A bringt der Supermarkt B ein Konkurrenzprodukt auf den Markt. Seine wöchentlichen Verkaufszahlen lassen sich modellhaft durch die Funktion g mit $g(x) = 214 - 214 \cdot e^{-0{,}08x}$ beschreiben.
Zeichnen Sie das Schaubild C dieser Funktion in das Koordinatensystem von Teilaufgabe a) ein.
Mit welchen wöchentlichen Verkaufszahlen kann der Supermarkt B langfristig rechnen ?
Wann hat der Supermarkt A den größten Vorsprung an insgesamt verkauften Tuben ?
Beschreiben Sie, wie sich anhand der Schaubilder abschätzen lässt, bis zu welchem Zeitpunkt in beiden Supermärkten etwa gleich viele Tuben verkauft sind. (6 VP)

Aufgabe I 1.2

Hinweis: ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{e^x}$ mit $x \in \mathbb{R}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (x-n)}{e^x}$ für $n \geq 1$ besitzt. (4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2005 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Lösung Aufgaben Analysis I 1

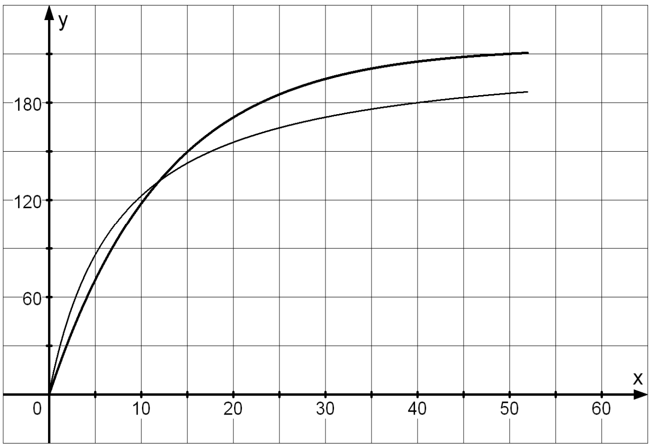
Aufgabe I 1.1

a) Es gilt $f(1) = 26 \Rightarrow \frac{a+15}{b+15} = 26 \Leftrightarrow a+15 = 26(b+15) \Leftrightarrow a - 26b = 375$ (1)

$f(5) = 86 \Rightarrow \frac{5a+15}{5b+15} = 86 \Leftrightarrow 5a+15 = 86(5b+15) \Leftrightarrow 5a - 430b = 1275$ (2)

Aus (1): $a = 375 + 26b$
Eingesetzt in (2): $5(375+26b) - 430b = 1275 \Leftrightarrow -300b = -600 \Leftrightarrow b = 2$
Daraus folgt $a = 375 + 26 \cdot 2 = 427$
$\Rightarrow f(x) = \frac{427x+15}{2x+15}$ und dies stimmt mit dem genannten Teilergebnis überein.

Schaubild für das erste Jahr (=52 Wochen)
(Das dünnere Schaubild ist K, das fettere Schaubild ist C (siehe c))



Die wöchentlichen Verkaufszahlen steigen zunächst stark an, flachen dann ab und nähern sich einer Obergrenze.
Gründe: Ein neu eingeführtes Produkt führt zu gesteigertem Kaufinteresse bei Kunden, weshalb die Zuwachsraten zu Beginn recht groß sind. Mit der Zeit hat man jedoch eine „Stammkundschaft“ aufgebaut, es kommen nur noch wenige Neukunden hinzu bzw. die Neukunden und die zur Konkurrenz wechselnden Kunden halten sich die Waage.

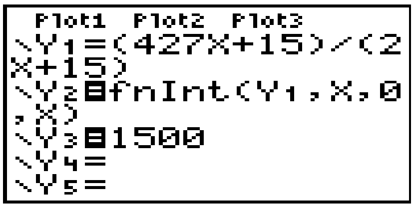
b) Die Funktion f gibt die wöchentlichen Verkaufszahlen an.

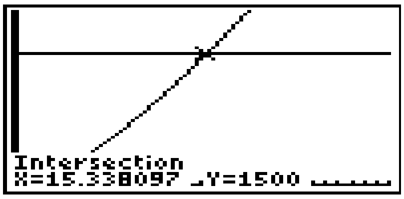
Die Gesamtmenge der Tuben in den ersten 52 Wochen wird dann berechnet mit Hilfe des folgenden Integrals: $\int_0^{52} f(x)dx = \int_0^{52} \frac{427x+15}{2x+15}dx = 7801$ (GTR)
Der Supermarkt A verkauft somit im ersten Jahr 7801 Tuben.

Nach wie vielen Wochen wurden mehr als 1500 Tuben verkauft ?

Wie gesuchte Woche u wird ermittelt durch $\int_0^u \frac{427x+15}{2x+15}\,dx = 1500$

Diese Integralgleichung kann mit dem GTR gelöst werden.





Unter Y2 wird die Integralfunktion mit unbekannter Obergrenze x eingegeben.
Der Schnittpunkt von Y2 und Y3 ergibt den obigen gesuchten Wert für u.
Somit ist u = 15,34. Nach der 16. Woche wurden somit insgesamt mehr als 1500 Tuben verkauft.

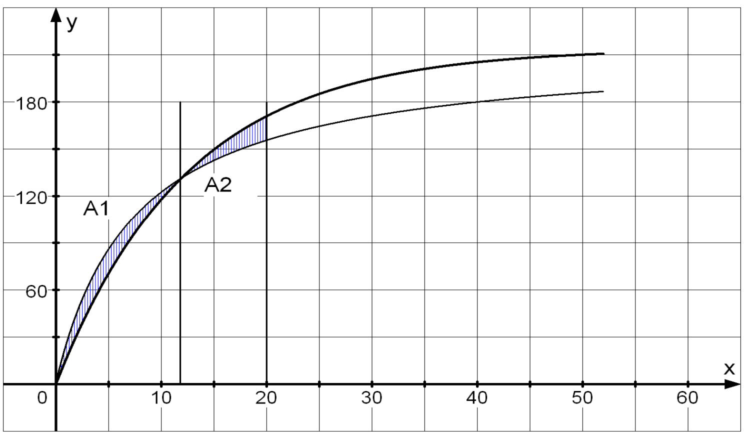
c) Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty}(214 - 214\cdot e^{-0,08x}) = 214$, also kann Supermarkt B langfristig mit 214 Tuben pro Woche rechnen.

Der Supermarkt A kann so lange seinen Vorsprung ausbauen, wie seine wöchentlichen Verkaufszahlen oberhalb derjenigen von Supermarkt B sind.
Gesucht ist somit der Schnittpunkt der beiden Schaubilder von f und g, den man rechnerisch durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen erhält:

$$\frac{427x+15}{2x+15} = 214 - 214\cdot e^{-0,08x}$$

Mit dem GTR ergibt sich: x = 11,88. Somit erreicht der Supermarkt A ungefähr nach 12 Wochen den größten Vorsprung.

Die Supermärkte A und B haben zu dem Zeitpunkt u gleich viele Tuben verkauft, wenn die folgende Gleichung gilt: $\int_0^u f(x)dx = \int_0^u g(x)dx$



Im Intervall x = 0 bis x = 11,8 ist das Schaubild von f oberhalb von g. Die Fläche A1 gibt also die Anzahl an Tuben an, die der Supermarkt A von Beginn an bis zur knapp 12.Woche mehr verkauft. Im Intervall, beginnend ab x = 11,8 ist das Schaubild von g oberhalb von f. Die Fläche A2 gibt die Anzahl der Tuben an, die der Supermarkt B ab der Woche x = 11,8 bis zur gesuchten Woche x = u verkauft. Wenn die Grenze x = u so gewählt wird, dass die Flächen A1 und A2 gleich groß sind, haben beide Supermärkte gleich viele Tuben verkauft.

Aufgabe I 1.2

Der Beweis erfolgt mit Hilfe der vollständigen Induktion:

$$f(x) = \frac{x}{e^x} = x \cdot e^{-x}$$

1.) **Induktionsanfang:**
Zeige, dass die Formel für n = 1 gültig ist:

$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(1-x)$ (Produktregel)

Formel: $f^{(1)}(x) = \frac{-1 \cdot (x-1)}{e^x} = (1-x) \cdot e^{-x}$ stimmt überein mit der Herleitung über die Produktregel, also ist die Formel für n = 1 richtig.

2,) **Induktionsschritt:**
a) **Formulierung der Induktionsvoraussetzung:**

Es gibt eine natürliche Zahl n, für die gilt, dass die Funktion $f(x) = \frac{x}{e^x}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (x-n)}{e^x}$ besitzt.

b) **Formulierung der Induktionsbehauptung:**

Die Aussage gilt für n+1, das heißt die Funktion $f(x) = \frac{x}{e^x}$ besitzt die (n+1)-te Ableitung

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(x-(n+1))}{e^x}$$

c) **Beweis des Induktionsschrittes:**

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left(\frac{(-1)^n (x-n)}{e^x}\right)' = \left((-1)^n (x-n) \cdot e^{-x}\right)' = (-1)^n \cdot \left[1 \cdot e^{-x} + (x-n) \cdot e^{-x} \cdot (-1)\right]$$

$$= (-1)^n \cdot e^{-x}(1-x+n) = (-1)^n \cdot e^{-x} \cdot (-1) \cdot (-1+x-n) = \frac{(-1)^{n+1}(x-(n+1))}{e^x}$$

Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen bewiesen.