Pflichtteilaufgaben zu Elemente der Kurvendiskussion

Baden-Württemberg

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

September 2016

Übungsaufgaben:

Ü1:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x-4)^2(x+3)$
Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Schaubildes von f mit den Koordinatenachsen.

Ü2:
Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = x^2 - 3x + 2$ und g mit $g(x) = 2x - 2$.
Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Schaubilder von f und g.

Ü3:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$.
Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Extrem- und Wendepunkte.

Ü4:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.
Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangente und der Normalen an den Graphen K_f von f im Punkt B(4/f(4)).

Ü5:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen K_f von f mit der Steigung 1.

Ü6:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.
Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten an den Graphen K_f von f, die durch den Punkt P(0/-1) gehen.

Ü7:
Für eine ganzrationale Funktion f zweiten Grades gilt:
H(2/3) ist Hochpunkt und P(4/-1) ein weiterer Punkt ihres Schaubildes.
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

Ü8:
Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat den Hochpunkt H(0/5) und den Wendepunkt W(2/1). Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung.

Ü9:
Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades hat den Tiefpunkt T(-2/-6) und an der Stelle 1 die Steigung 3.
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung.

Ü10:
Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades berührt die x-Achse im Punkt P(2/0), schneidet sie im Punkt Q(-4/0) und schneidet die y-Achse im Punkt R(0/2).
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

Abituraufgaben (Haupttermin)

Aufgabe 1: (Abiturprüfung 2016)

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$ besitzt einen Wendepunkt.

Zeigen Sie, dass $y = x - \frac{4}{3}$ eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt ist.

Aufgabe 2: (Abiturprüfung 2015)

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat im Ursprung einen Hochpunkt und an der Stelle x = 2 die Tangente mit der Gleichung $y = 4x - 12$.

Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

Aufgabe 3: (Abiturprüfung 2014)

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2$.

a) Beschreiben Sie, wie man den Graphen von g aus dem Graphen von f erhält.
b) Bestimmen Sie die Nullstellen von g für $0 \le x \le 4$

Aufgabe 4: (Abiturprüfung 2012)

Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x}$ und g mit $g(x) = 2x - 3$.

Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der beiden zugehörigen Graphen.
Untersuchen Sie, ob sich die beiden Graphen senkrecht schneiden.

Aufgabe 5: (Abiturprüfung 2011)

Gegeben sind die Funktion f und g mit $f(x) = e^x$ und $g(x) = -e^{-x} + 2$.

a) Beschreiben Sie, wie das Schaubild von g aus dem Schaubild von f entsteht.
b) Zeigen Sie, dass sich die Schaubilder von f und g im Punkt P(0/1) berühren.

Aufgabe 6: (Abiturprüfung 2010)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1-4x^2}{x^2}$. Ihr Schaubild ist K.

a) Geben Sie die Asymptoten von K an.
b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangente an K im Punkt P(1/f(1)) mit der x-Achse.

Aufgabe 7: (Abiturprüfung 2009)

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 3$ besitzt einen Wendepunkt.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

Aufgabe 8: (Abiturprüfung 2008)

Für eine ganzrationale Funktion h zweiten Grades gilt: T(-1/-4) ist Tiefpunkt und Q(2/5) ein weiterer Punkt ihres Schaubilds. Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von h.

Aufgabe 9: (Abiturprüfung 2007)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

a) Bestimmen Sie die Punkte des Schaubildes von f mit waagrechter Tangente.

b) Das Schaubild von f hat im Punkt $P(1/\frac{1}{2})$ die Normale n. Ermitteln Sie eine Gleichung von n.

Aufgabe 10: (Abiturprüfung 2006)

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt H(1/1) ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 11: (Abiturprüfung 2005)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=4-\frac{4}{x^2}$; $x\neq 0$.

Geben Sie die Asymptoten des Schaubilds von f an.
Skizzieren Sie damit das Schaubild von f.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Normalen im Punkt P(2/f(2)).

Aufgabe 12: (Abiturprüfung 2004)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{2}{x}+2$; $x\neq 0$.

Das Schaubild von f hat im Punkt P(1/v) die Tangente t.
Ermitteln Sie eine Gleichung von t.
Die Tangente t schneidet die x-Achse im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten von S.

Lösungen

Ü1:

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0)=(-4)^2\cdot 3=48 \Rightarrow S_y(0/48)$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x)=0 \Rightarrow x=4$ und x = -3, also $N_1(4/0)$ und $N_2(-3/0)$

Ü2:

Schnittpunkte der Schaubilder ergeben sich durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen:

$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2-3x+2=2x-2 \Rightarrow x^2-5x+4=0$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 1\cdot 4}}{2}=\frac{5\pm 3}{2} \Rightarrow x_1=4\text{ , } x_2=1$$

Es gilt $g(1)=0$ und $g(4)=6$

Die Schnittpunkte haben die Koordinaten $S_1(1/0)$ und $S_2(4/6)$.

Ü3:

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$

Ableitungen: $f'(x)=x^2+2x-3$

$f''(x)=2x+2$

$f'''(x)=2$

Hinreichende Bedingung für Extrempunkte: $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2} \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-3$

$f''(1)=4>0 \Rightarrow T(1/-\frac{2}{3})$

$f''(-3)=-4<0 \Rightarrow H(-3/10)$

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0$

$f''(x)=0 \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1$

$f'''(-1)=2\neq 0 \Rightarrow W(-1/\frac{14}{3})$

Ü4:

Allgemeine Tangentengleichung: $y=f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$ mit u = 4

f(4) = 16

Es ist $f'(x)=2x \Rightarrow f'(4)=8$

Tangentengleichung: $y=8(x-4)+16 \Rightarrow y=8x-16$

Allgemeine Normalengleichung: $y=-\frac{1}{f'(u)}(x-u)+f(u)$ mit u = 4

Nomalengleichung: $y=-\frac{1}{8}(x-4)+16 \Rightarrow y=-\frac{1}{8}x+16{,}5$

Ü5:

Es ist $f'(x) = 2x$
Gegeben ist die Steigung 1: $f'(x) = 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = 0,5$

Die Tangente berührt das Schaubild von f an der Stelle x = 0,5.

Allgemeine Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$ mit u = 0,5.
$f(0,5) = 0,25$ und $f'(0,5) = 1$

Tangentengleichung: $y = 1 \cdot (x - 0,5) + 0,25 \Rightarrow y = x - 0,25$

Ü6:
$f(x) = x^2$
Es ist $f'(x) = 2x$

Allgemeine Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$
Bekannt ist der Tangentenpunkt P(0/-1), der in die allgemeine Tangentengleichung für x und y eingesetzt wird:

$-1 = f'(u) \cdot (0 - u) + f(u)$
$\Rightarrow -1 = 2u \cdot (-u) + u^2 \Rightarrow u^2 = 1 \Rightarrow u = \pm 1$

Man kann zwei Tangenten von P aus an das Schaubild von f anlegen:

Erste Tangente (u = -1): $y = f'(-1) \cdot (x + 1) + f(-1) \Rightarrow y = -2(x + 1) + 1 \Rightarrow y = -2x - 1$
Zweite Tangente (u = 1): $y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1) \Rightarrow y = 2(x - 1) + 1 \Rightarrow y = 2x - 1$

Ü7:
Es handelt sich um eine Parabelgleichung, wobei der Scheitelpunkt gegeben ist:
Ansatz: $f(x) = a \cdot (x - 2)^2 + 3$
Bedingung: $f(4) = -1$: $-1 = a \cdot (4 - 2)^2 + 3 \Rightarrow -1 = 4a + 3 \Rightarrow a = -1$
Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = -(x - 2)^2 + 3$

Ü8:
Ansatz für die Funktionsgleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Daraus folgt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingung:
$f(0) = 5 \Rightarrow d = 5$
$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$
$f(2) = 1 \Rightarrow 8a + 4b + 5 = 1 \Rightarrow 8a + 4b = -4$ (*)
$f''(2) = 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0$ (**)

Aus (**) folgt $12a + 2b = 0 \Rightarrow b = -6a$
Einsetzen von b = -6a in (*): $8a + 4 \cdot (-6a) = -4 \Leftrightarrow -16a = -4 \Rightarrow a = 0,25$

Daraus folgt $b = -6 \cdot 0,25 = -1,5$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = 0,25x^3 - 1,5x^2 + 5$

Ü9:
Es handelt sich um eine Parabelgleichung, wobei der Scheitelpunkt gegeben ist:
Ansatz: $f(x) = a \cdot (x+2)^2 - 6$
Es gilt $f'(x) = 2a \cdot (x+2) = 2ax + 4a \quad 3 = 2a \cdot 1$
Bedingung: $f'(1) = 3 \Rightarrow 2a + 4a = 3 \Rightarrow 6a = 3 \Rightarrow a = 0,5$
Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = 0,5(x+2)^2 - 6$

Ü10:
Da von dem Schaubild von alle Nullstellen bekannt sind, kann der Ansatz der Funktionsgleichung so erfolgen:
$f(x) = a \cdot (x-2)^2 \cdot (x+4)$ (aufgrund der Berührung existiert bei x = 2 eine doppelte Nullstelle)

Einsetzen des Punktes R: $f(0) = 2 \Rightarrow a \cdot (0-2)^2 \cdot (0+4) = 2 \Rightarrow 16a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x-2)^2 \cdot (x+4)$

Aufgabe 1:

Berechnung der Wendestelle der Funktion $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$

Es gilt $f'(x) = -0,5x^2 + 2x - 1$ und $f''(x) = -x + 2$

Notwendige Bedingung für eine Wendestelle: $f''(x) = 0$
$\Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Da gemäß Aufgabenstellung vorgegeben ist, dass die Funktion f einen Wendepunkt besitzt, kann die hinreichende Bedingung weggelassen werden.

Gleichung der Tangente an der Stelle x = 2: $y = f'(2) \cdot (x-2) + f(2)$

Es gilt $f(2) = -\frac{1}{6} \cdot 8 + 4 - 2 = \frac{2}{3}$ und $f'(2) = -0,5 \cdot 4 + 4 - 1 = 1$

Einsetzen in die Tangentengleichung: $y = 1 \cdot (x-2) + \frac{2}{3} \Rightarrow y = x - \frac{4}{3}$

Die Tangentengleichung entspricht der in der Aufgabenstellung angegebenen Gerade.

Aufgabe 2:

Ansatz für die Funktionsgleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Aufstellen der Bedingungen:
Ursprung liegt auf Schaubild: $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$
Hochpunkt bei x = 0: $f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Steigung der Tangente an der Stelle x = 2 ist 4: $f'(2) = 4 \Rightarrow 12a + 4b + c = 4 \quad (*)$

Einsetzen von x = 2 in die Tangentengleichung ergibt $y = 4 \cdot 2 - 12 = -4$
Bedingung: $f(2) = -4 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = -4 \quad (**)$

Einsetzen von d = 0 und c = 0 in (*) und (**) ergibt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrl} 12a & +4b & = & 4 & (1) \\ 8a & +4b & = & -4 & (2) \end{array}$$

(1) - (2) ergibt $4a = 8 \Rightarrow a = 2$
Einsetzen von a = 2 in (2): $16 + 4b = -4 \Rightarrow 4b = -20 \Rightarrow b = -5$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = 2x^3 - 5x^2$

Aufgabe 3:

a) Der Graph von f wird mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt.
Anschließend wird er mit dem Faktor $\frac{2}{\pi}$ in x-Richtung gestaucht.
Danach wird er um 2 Längeneinheiten nach unten verschoben.

b) Nullstellen von g: $g(x) = 0$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$$

Die Funktion $y = \cos(x)$ nimmt an den Stellen x = 0, 2π, $4\pi, \ldots$ den Wert 1 an.

$$\frac{\pi}{2}x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{\pi}{2}x = 2\pi \Rightarrow x_2 = 4$$

Im gegebenen Intervall gibt es daher zwei Nullstellen x = 0 und x = 4.

Aufgabe 4:

Die gemeinsamen Punkte ergeben sich durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{2}{x} = 2x - 3 \quad | \cdot x$$

$$\Rightarrow 2 = 2x^2 - 3x \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$ und damit x = 2 oder x = -0,5.

Mit $f(2)=1$ und $f(-0,5)=-4$ ergeben sich als gemeinsame Punkte P(2/1) und Q(-0,5/-4).

Bedingung für einen senkrechten Schnitt in P: $f'(2)\cdot g'(2)=-1$

Mit $f'(x)=-2x^{-2}=-\frac{2}{x^2}$ und $g'(x)=2$ folgt $f'(2)\cdot g'(2)=-0,5\cdot 2=-1$.
Somit schneiden sich die Graphen in P senkrecht.

Bedingung für einen senkrechten Schnitt in Q: $f'(-0,5)\cdot g'(-0,5)=-1$
$f'(-0,5)\cdot g'(-0,5)=-8\cdot 2=-16$
Somit schneiden sich die Graphen in Q nicht senkrecht.

Aufgabe 5:

a) $e^x \to e^{-x} \to -e^{-x} \to -e^{-x}+2$

Zunächst erfolgt eine Spiegelung an der y-Achse. Als nächstes erfolgt eine Spiegelung an der x-Achse. Zum Schluss wird das Schaubild noch um 2 Einheiten nach oben verschoben.
Fazit: g entsteht aus f durch Spiegelung an beiden Koordinatenachsen und Verschiebung um 2 Einheiten nach oben.

b) Eine Berührung an der Stellle x liegt vor, wenn $f(x)=g(x)$ und $f'(x)=g'(x)$ gilt.
$f(0)=e^0=1$ und $g(0)=-e^0+2=1$, also $f(0)=g(0)=1$.
$f'(x)=e^x \Rightarrow f'(0)=1$ und $g'(x)=e^{-x}\Rightarrow g'(0)=1$ also $f'(0)=g'(0)=1$
Damit ist gezeigt, dass sich die Schaubilder von f und g im Punkt P(0/1) berühren.

Aufgabe 6:

a) Das Schaubild von $f(x)=\frac{1-4x^2}{x^2}$ besitzt eine Defintionslücke bei x = 0.
Für $x\to 0$ strebt $f(x)\to +\infty$ (egal, ob man sich von links oder rechts der 0 annähert).
Somit liegt bei x = 0 eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel vor und damit ist **x = 0 eine senkrechte Asymptote.**

Verhalten für $x\to\pm\infty$:

Es gilt $f(x)=\frac{1-4x^2}{x^2}=\frac{x^2\cdot(\frac{1}{x^2}-4)}{x^2}=\frac{1}{x^2}-4$

Für $x\to\pm\infty$ strebt der Bruch $\frac{1}{x^2}\to 0$.

Daher gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-4$.

Das Schaubild K besitzt die **waagrechte Asymptote y = -4.**

b) Um den Schnittpunkt zu bestimmen, muss zunächst die Tangentengleichung in P aufgestellt werden.
Berechnung der Koordinaten von P: $f(1)=\frac{1-4}{1}=-3$ und damit P(1/-3).

Mit $f(x)=\frac{1}{x^2}-4=x^{-2}-4$ (siehe a)) folgt $f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$.

Tangentensteigung in P: $f'(1)=-2$

Einsetzen von P und m in die Punkt-Steigungs-Form:
$y-(-3)=-2\cdot(x-1)\Rightarrow y=-2x-1$ ist die Gleichung der Tangente in P

Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse:
Setze die Tangentengleichung = 0: $0=-2x-1\Rightarrow x=-0{,}5$
Der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse lautet S(-0,5/0).

Aufgabe 7:

$f(x)=-x^3+3x^2-x-3\Rightarrow f'(x)=-3x^2+6x-1\Rightarrow f''(x)=-6x+6\Rightarrow f'''(x)=-6$

Berechnung des Wendpunktes: $f''(x)=0\Leftrightarrow -6x+6=0\Leftrightarrow x=1$
Da $f'''(1)=-6\neq 0$ existiert bei x = 1 eine Wendestelle.
Mit $f(1)=-2$ folgt WP(1/-2).
Die Steigung der Tangente im Wendepunkt beträgt $f'(1)=2$.
Aufstellen der Tangentengleichung mit $y=f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$ mit u = 1:
$y=f'(1)\cdot(x-1)+f(1)\Rightarrow y=2(x-1)+(-2)\Rightarrow y=2x-4$

Aufgabe 8:
Die Funktion kann mit zwei unterschiedlichen Ansätzen aufgestellt werden.

1.Möglichkeit:
Bei der Funktion handelt es sich um eine Parabel mit Scheitelpunkt T(-1/-4).
Somit kann die Parabel in der so genannten Scheitelform aufgestellt werden (lernt man in der Mittelstufe): $h(x)=a\cdot(x+1)^2-4$
Den Wert von a erhält man mit dem Punkt Q(2/5): $5=a\cdot(2+1)^2-4\Rightarrow a=1$
Daraus folgt: $h(x)=(x+1)^2-4=x^2+2x-3$

2.Möglichkeit:
Allgemeiner Ansatz für ganzrationale Funktion 2.Grades: $h(x)=ax^2+bx+c$
mit $h'(x)=2ax+b$
Bedingungen:
Punkt T(-1/-4) liegt auf dem Schaubild: $h(-1)=-4\Rightarrow a-b+c=-4$
An der Stelle x = -1 ist die Steigung 0: $h'(-1)=0\Rightarrow -2a+b=0$
Punkt Q(2/5) liegt auf dem Schaubild: $h(2)=5\Rightarrow 4a+2b+c=5$
Die Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt a = 1, b = 2, c = -3.
Damit gilt: $h(x)=x^2+2x-3$.

Aufgabe 9:

Umschreiben der Funktion: $f(x)=\frac{x^2}{x+1}=x^2\cdot\left(x+1\right)^{-1}$

Ableitung mit Produkt- und Kettenregel:

$$f'(x)=2x\cdot\left(x+1\right)^{-1}+x^2\cdot(-1)(x+1)^{-2}=\frac{2x}{x+1}-\frac{x^2}{(x+1)^2}=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

a) Punkte mit waagrechter Tangente:

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow$ x = 0 oder x = -2.

A(0/0) und B(-2/-4) besitzen eine waagrechte Tangente.

b) Gleichung der Normalen n im Punkt $P(1/\frac{1}{2})$:

Allgemeine Normalengleichung: $y = -\frac{1}{f'(u)}(x-u) + f(u)$
Setze u = 1 in die Normalengleichung ein.
Es gilt $f'(1) = 0,75$ und f(1) = 0,5.
Normalengleichung: $y = -\frac{1}{0,75}(x-1) + 0,5 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{6}$

Aufgabe 10:

Ansatz für die Funktionsgleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Es werden nun 4 Bedingungen benötigt, um die 4 unbekannten Parameter a,b,c,d zu bestimmen.

Punktbedingungen:
$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$
$f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 1$ (*)

Steigungsbedingungen:
$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ (Berührung der x-Achse im Ursprung bedeutet gleiche Steigung wie die x-Achse)
$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$ (**)

Aus (*): $a + b = 1$
Aus (**): $3a + 2b = 0$

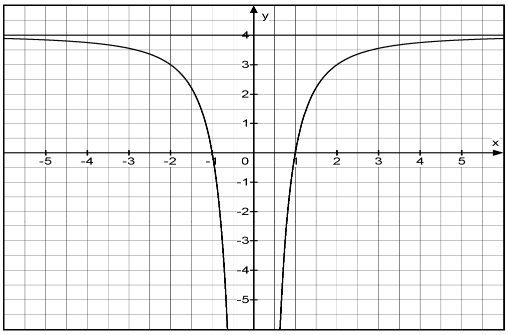
Mit Hilfe des Additionsverfahrens erhält man daraus b = 3 und a = -2

Funktionsgleichung: $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Aufgabe 11:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$; $x \neq 0$.
Die **waagrechte Asymptote** des Schaubildes ist die Gerade y = 4, da $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 4$ gilt.

Die **senkrechte Asymptote** des Schaubildes ist die Gerade x = 0 (also die y-Achse), da bei x = 0 eine Definitionslücke vorliegt und sich beim Einsetzen von x = 0 in den Zähler des Bruches ein Wert $\neq 0$ ergibt. Da es sich um eine doppelte Nullstelle im Nenner handelt, besitzt die senkrechte Asymptote keinen Vorzeichenwechsel.



Normale im Punkt P(2/f(2)):

Ansatz: $y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u)$ mit u = 2

Die Normale ist die Senkrechte zur Tangente im Kurvenpunkt P.
y-Wert von P: $f(2) = 3$, also P(2/3).

$f(x) = 4 - 4x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 8x^{-3} = \frac{8}{x^3}$

Es gilt f(2) = 3 und $f'(2) = 1$

$y = -\frac{1}{1}(x-2) + 3 \Rightarrow y = -x + 5$

Aufgabe 12:

Funktionsgleichung $f(x) = \frac{2}{x} + 2 = 2 \cdot x^{-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = -2 \cdot x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$.

Berechnung von v: $f(1) = \frac{2}{1} + 2 = 4$ und daher lautet der vollständige Punkt P(1/4).

Allgemeine Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$ mit u = 1.

Es ist $f'(1) = -2$

Tangentengleichung: $y = -2(x-1) + 4 \Rightarrow y = -2x + 6$

Schnittpunkt der Tangente mit x-Achse:
Setze y = 0: $-2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$, also S(3/0)