Abiturprüfung Mathematik 2012 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Pflichtteil – Aufgaben

Aufgabe 1: (2 VP)

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (\sin(x) + 7)^5$.

Aufgabe 2: (2 VP)

Berechnen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = 2e^{4x} + \frac{3}{x^2}$

Aufgabe 3: (3 VP)
Lösen Sie für $0 \leq x \leq 2\pi$ die Gleichung $\sin(x) \cdot \cos(x) - 2\cos(x) = 0$.

Aufgabe 4: (4 VP)
Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x}$ und g mit $g(x) = 2x - 3$.
Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der beiden zugehörigen Graphen.
Untersuchen Sie, ob sich die beiden Graphen senkrecht schneiden.

Aufgabe 5: (5 VP)
Eine der folgenden Abbildungen zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

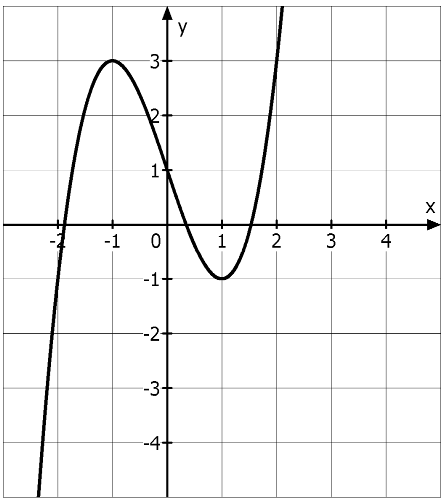

Abb. 1

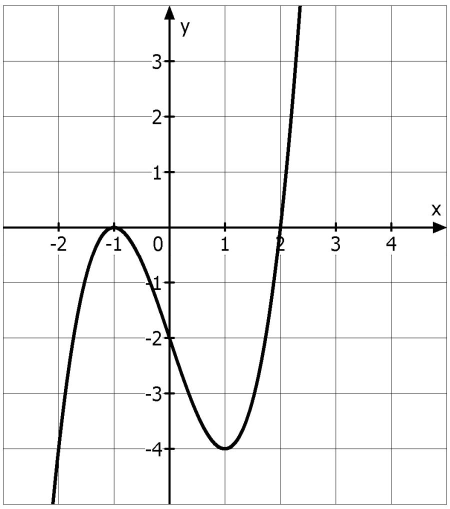

Abb. 2

 Zuletzt aktualisiert: 23.09.2016

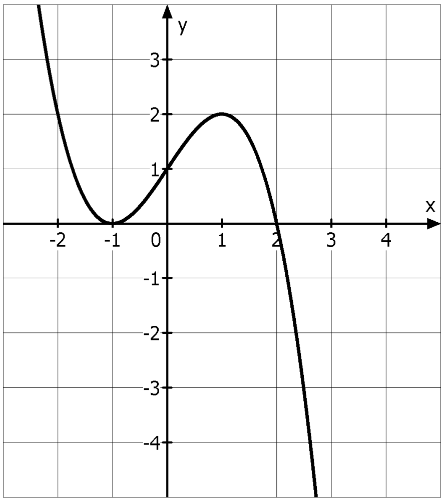

Abb. 3

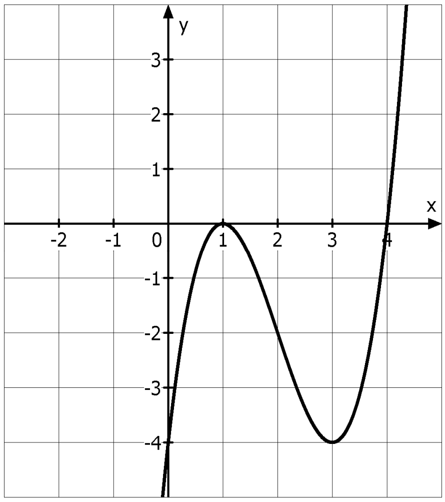

Abb. 4

a) Begründen Sie, dass die Abbildung 2 den Graphen von f zeigt.
b) Von den anderen drei Abbildungen gehört eine zur Funktion g mit $g(x) = f(x-a)$ und eine zur Funktion h mit $h(x) = b \cdot f(x)$
   Ordnen Sie diesen beiden Funktionen die zugehörigen Abbildungen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.
   Geben Sie die Werte für a und b an.
c) Die bis jetzt nicht zugeordnete Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion k.
   Geben Sie ohne Rechnung einen Funktionsterm für k an.

Aufgabe 6: (3 VP)

Gegeben sind die Ebene E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix} = 0$ und F: $x_2 + 2x_3 = 8$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden.

Aufgabe 7: (4 VP)

Gegeben sind der Punkt A(1/1/3) und die Ebene E: $x_1 - x_3 - 4 = 0$.

a) Welche besondere Lage hat E im Koordinatensystem ?
b) Der Punkt A wird an der Ebene E gespiegelt.
   Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunktes.

Aufgabe 8: (3 VP)

Gegeben sind eine Ebene E und eine Gerade g, die in E liegt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung einer Geraden h ermitteln kann, die orthogonal zu g ist und ebenfalls in E liegt.

Abiturprüfung Mathematik 2012 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Pflichtteil – Lösungen

Aufgabe 1:

Die Funktion wird mit der Kettenregel abgeleitet.

$f(x) = (\sin(x)+7)^5$

$f'(x) = 5\cdot(\sin(x)+7)^4\cdot\cos(x)$

Aufgabe 2:

Zur Berechnung einer Stammfunktion von $f(x) = 2e^{4x} + \frac{3}{x^2}$ wird die Funktionsgleichung umgeschrieben in $f(x) = 2e^{4x} + 3\cdot x^{-2}$

Die Gleichung einer Stammfunktion lautet $F(x) = \frac{2}{4}e^{4x} + \frac{3}{-1}x^{-1} = \frac{1}{2}e^{4x} - \frac{3}{x}$

Aufgabe 3:

Ausklammern von cos(x) ergibt: $\cos(x)\cdot(\sin(x)-2) = 0$

Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt: $\cos(x) = 0$ oder $\sin(x)-2 = 0$

$\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ oder $x = \frac{3}{2}\pi$

$\sin(x)-2 = 0 \Rightarrow \sin(x) = 2$ ist nicht lösbar (da sin(x) maximal 1 werden kann)

Lösungsmenge: $L = \{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\}$

Aufgabe 4:

Die gemeinsamen Punkte ergeben sich durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen:

$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{2}{x} = 2x-3 \quad | \cdot x$

$\Rightarrow 2 = 2x^2 - 3x \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3\pm 5}{4}$ und damit x = 2 oder x = -0,5.

Mit $f(2) = 1$ und $f(-0{,}5) = -4$ ergeben sich als gemeinsame Punkte P(2/1) und Q(-0,5/-4).

Bedingung für einen senkrechten Schnitt in P: $f'(2)\cdot g'(2) = -1$

Mit $f'(x) = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$ und $g'(x) = 2$ folgt $f'(2)\cdot g'(2) = -0{,}5\cdot 2 = -1$.

Somit schneiden sich die Graphen in P senkrecht.

Bedingung für einen senkrechten Schnitt in Q: $f'(-0{,}5)\cdot g'(-0{,}5) = -1$

$f'(-0{,}5)\cdot g'(-0{,}5) = -8\cdot 2 = -16$

Somit schneiden sich die Graphen in Q nicht senkrecht.

Aufgabe 5:

a) Das Schaubild der Funktion f(x) geht durch den Punkt P(0/-2).
Das Schaubild in Abb. 2 ist das einzige Schaubild, das diesen Punkt enthält.
Somit muss Abb. 2 der Graph von f sein.
(Hinweis: Diese Lösung ist nicht eindeutig. Man könnte z.B. auch den Punkt P(1/-4) verwenden oder nachweisen, dass der Graph von f einen Hochpunkt bei x = -1 besitzt).

b) Das Schaubild von $g(x) = f(x-a)$ ergibt sich anschaulich aus dem Schaubild von f(x), indem dies um a Einheiten nach rechts verschoben wird.
Das Schaubild in Abb. 4 ist das einzige, das sich durch eine Rechtsverschiebung aus Abb. 2 ergibt.
Das Schaubild in Abb. 4 ist um 2 nach rechts verschoben, somit gilt $g(x) = f(x-2)$, also a = 2.

Das Schaubild von $h(x) = b \cdot f(x)$ ergibt sich anschaulich aus dem Schaubild von f(x), indem dies mit dem Faktor b in y-Richtung gestreckt wird.
Da f(-1) = 0 ist, gilt auch $h(-1) = b \cdot f(-1) = b \cdot 0 = 0$, egal wie b gewählt wird.
Somit muss das Schaubild von h(x) den Punkt Q(-1/0) besitzen.
Folglich kann nur das Schaubild in Abb. 3 das Schaubild von h(x) sein.
Ermittlung des Wertes von b:
Das Schaubild in Abb. 3 geht durch R(0/1), also gilt h(0) = 1.
Es gilt $f(0) = -2 \Rightarrow h(0) = b \cdot f(0) \Rightarrow 1 = b \cdot (-2) \Rightarrow b = -0{,}5$

c) Übrig bleibt als Schaubild noch die Abb. 1
Das Schaubild in Abb. 1 ergibt sich aus dem Schaubild aus Abb. 2 durch eine Verschiebung um 3 Einheiten nach oben.
Folglich gilt $k(x) = f(x) + 3 = x^3 - 3x + 1$

Aufgabe 6:
Zur Ermittlung der Schnittgeraden wird die Ebene E als Koordinatengleichung geschrieben.

E: $4x_1 - x_2 + 2x_3 = d$
Einsetzen von P(1/2/1) ergibt $4 - 2 + 2 = 4 = d$
Daraus folgt: E: $4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$

Berechnung der Schnittgeraden der beiden Ebenen:

Hierzu löst man folgendes Gleichungssystem:
$$\begin{array}{rrrcl} 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ & x_2 & +2x_3 & = & 8 \end{array}$$

Setze $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$
Aus der 2.Zeile folgt: $x_2 + 2t = 8 \Rightarrow x_2 = -2t + 8$
Aus der 1.Zeile folgt: $4x_1 - (-2t + 8) + 2t = 4 \Rightarrow 4x_1 = 12 - 4t \Rightarrow x_1 = 3 - t$

Mit den Lösungen kann man nun die Gleichung der Schnittgerade g aufstellen:
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3-t \\ -2t+8 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7:

a) Der Normalenvektor der Ebene E lautet $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die zweite Koordinate des Normalenvektors (und damit das „Fehlen“ der Variable x_2 in der Koordinatengleichung zeigt, dass die Ebene E parallel zur x_2-Achse ist.
Da zum Beispiel der Punkt P(0/1/0) nicht auf E liegt, wie man durch eine Punktprobe zeigen kann, liegt die x_2-Achse nicht in der Ebene E, sondern ist „echt parallel“ zu ihr.

b) Zur Ermittlung des Bildpunktes wird eine Hilfsgerade h aufgestellt, die senkrecht zu E (Richtungsvektor von h ist Normalenvektor von E) und durch den Punkt A verläuft:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Schnitt der Gerade h mit der Ebene E ergibt den Lotfußpunkt L:
$1 + r - (3 - r) - 4 = 0 \Rightarrow -6 + 2r = 0 \Rightarrow r = 3$
Einsetzen von r = 3 in die Geradengleichung ergibt L(4/1/0).

Berechnung des Bildpunktes A*: $\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AL} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die Koordinaten des Bildpunktes lauten A*(7/1/-3).

Aufgabe 8:
Da in der Aufgabenstellung nicht vorgegeben ist, in welchem Gleichungstyp die Ebene vorgegeben ist, wird diese nun als Normalenform vorausgesetzt: $\left[\vec{x} - \vec{p}\right] \cdot \vec{n} = 0$.

Die Gerade g habe die Parameterform $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$

Gesucht ist nun die Gleichung der Geraden h in der Parameterform $\vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$

1.Schritt: Da die Gerade h in der Ebene E liegt und g orthogonal schneiden soll, kann der Ortsvektor von g auch für h übernommen werden. Es gilt also $\vec{q} = \vec{p}$

2.Schritt: Der Richtungsvektor von h ist orthogonal zum Richtungsvektor von g.
Somit muss gelten $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ (1)
Da die Gerade h in der Ebene E liegt, ist der Richtungsvektor von h auch orthogonal zum Normalenvektor von E.
Somit muss gelten: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ (2)

Aus (1) und (2) ergibt sich ein Gleichungssystem (2 Gleichungen, 3 Unbekannte) mit unendlich vielen Lösungen für $\vec{v}$. Eine beliebige Lösung mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist ein möglicher Richtungsvektor von h.

(Alternativ könnte man auch das Vektorprodukt nutzen: $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{n}$)