Abiturprüfung Mathematik 2006 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Pflichtteil - Aufgaben

Aufgabe 1: (2 VP)

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{8}\cdot\sin(4x^2)$.

Aufgabe 2: (2 VP)

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}x^3$ an.

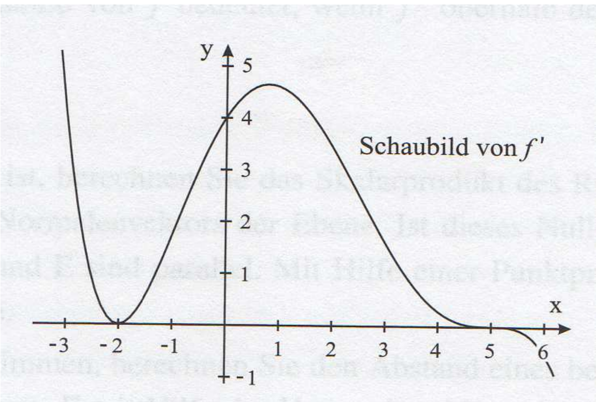
Aufgabe 3: (3 VP)
Hinweis: ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

Die Funktion f mit $f(x)=x^3-3x^2-x+3$ hat die Nullstelle $x_1=1$.
Bestimmen Sie die weiteren Nullstellen.

Aufgabe 4: (4 VP)
Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Der Punkt H(1/1) ist der Hochpunkt des Schaubilds.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabe 5: (5 VP)

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Geben Sie für jeden der folgenden Sätze an, ob er richtig, falsch oder nicht entscheidbar ist.
Begründen Sie jeweils ihre Antwort.



1. Das Schaubild von f hat bei x = -2 einen Tiefpunkt.
2. Das Schaubild von f hat für $-3\le x\le 6$ genau zwei Wendepunkte.
3. Das Schaubild von f verläuft im Schnittpunkt mit der y-Achse steiler als die erste Winkelhalbierende
4. f(0) > f(5)

Aufgabe 6: (4 VP)
Gegeben sind die Ebene E: $-2x_1 + x_2 - 2x_3 + 15 = 0$ und
die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

a) Zeigen Sie, dass g zu E parallel ist.
b) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden g von der Ebene E.

Aufgabe 7: (3 VP)

Gegeben sind die Ebenen $E_1: \; 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$ und $E_2: \; 3x_1 + 2x_2 = 6$.
Stellen Sie die beiden Ebenen in einem Koordinatensystem dar.
Zeichnen Sie die Schnittgerade der beiden Ebenen ohne weitere Rechnung ein.

Aufgabe 8: (3 VP)

Gegeben sind zwei Punkte A und B. Diese liegen bezüglich einer Ebene E symmetrisch.
Beschreiben Sie ein Verfahren zur Bestimmung einer Gleichung von E.

Abiturprüfung Mathematik 2006 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Pflichtteil – Lösungen

Aufgabe 1:

$f(x) = \frac{1}{8}\sin(4x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{8}\cos(4x^2)\cdot 8x = x\cdot\cos(4x^2)$

Aufgabe 2:

$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x^3 = 4x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^3 \Rightarrow F(x) = 8x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}x^4 = 8\cdot\sqrt{x} + \frac{1}{8}x^4$

Aufgabe 3:

Für die Nullstellenberechnung gilt: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$
Diese Gleichung wird mit Hilfe der Polynomdivision gelöst.
Eine bekannte Lösung ist x = 1.

$(x^3 - 3x^2 - x + 3) : (x-1) = x^2 - 2x - 3$

Für die weiteren Lösungen setzt man $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_{2,3} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{2\pm 4}{2}$

Somit $x_2 = 3$ und $x_3 = -1$
Also lauten die Nullstellen $N_1(1/0)$, $N_2(3/0)$, $N_3(-1/0)$

Aufgabe 4:

Ansatz für die Funktionsgleichung: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Es werden nun 4 Bedingungen benötigt, um die 4 unbekannten Parameter a,b,c,d zu bestimmen.

Punktbedingungen:
$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$
$f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + d = 1$ (*)
Steigungsbedingungen:
$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ (Berührung der x-Achse im Ursprung bedeutet gleiche Steigung wie die x-Achse)
$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$ (**)

Aus (*): $a + b = 1$
Aus (**): $3a + 2b = 0$
Mit Hilfe des Additionsverfahrens erhält man daraus b = 3 und a = -2

Funktionsgleichung: $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Aufgabe 5:

1.) Diese Aussage ist falsch. An der Stelle x = -2 befindet sich beim Schaubild von f zwar ein Punkt mit waagrechter Tangente, allerdings ohne Vorzeichenwechsel, so dass es sich an der Stelle x = -2 um einen Sattelpunkt handelt.
2.) Ein Wendepunkt beim Schaubild von f ist gleichbedeutend mit einem Extrempunkt beim Schaubild von f'. Da das Schaubild von f' zwei Extrempunkte in dem besagten Intervall besitzt, ist die Aussage wahr.
3.) Im Schnittpunkt mit der y-Achse (also an der Stelle x = 0) gilt $f'(0) = 4$, also ist die Steigung der Tangente 4. Die Steigung der ersten Winkelhalbierenden (y = x) ist 1, also ist das Schaubild von f bei x = 0 steiler. Die Aussage ist wahr.
4.) Im Intervall [0;5] ist das Schaubild von f' immer positiv, somit ist das Schaubild von f in diesem Intervall streng monton wachsend. Es gilt somit f(0) < f(5), also ist die Aussage falsch.

Aufgabe 6:

a) Berechnung des Schnittpunktes von g mit E:

$$-2(2+t)+(-16+4t)-2(2+t)+15=0 \Leftrightarrow -4-2t-16+4t-4-2t+15=0$$
$$\Leftrightarrow -9=0$$

Es handelt sich um einen Widerspruch, also besitzt die Gerade g und die Ebene E keine gemeinsamen Punkte. Somit müssen sie parallel sein.

(Eine andere Möglichkeit wäre, die Orthogonalität des Normalenvektors von E und des Richtungsvektors von g nachzuweisen. Anschließend müsste noch gezeigt werden, dass die Gerade g nicht in der Ebene E enthalten sein kann, z.B. durch Prüfung, dass der Geradenpunkt P(2/-16/2) nicht in E enthalten ist).

b) Der Abstand der Geraden g von E kann dadurch berechnet werden, dass man einen beliebigen Punkt P der Gerade g wählt und dessen Abstand zur Ebene E ermittelt.
Der Punkt sei P(2/-16/2) (Ortsvektor von g).

Berechnung der Hesse'sche Normalenform von E: $-2x_1+x_2-2x_3+15=0$

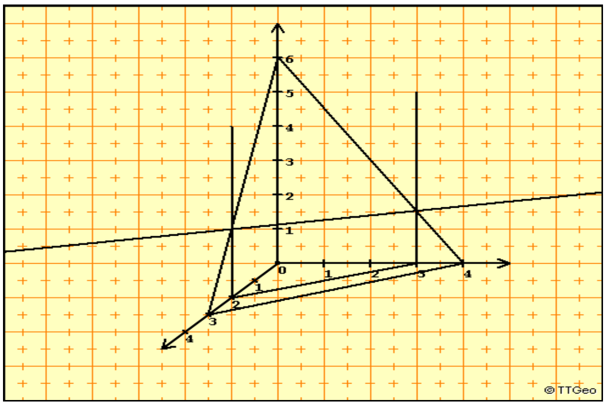
Es gilt $|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$. HNF von E: $\frac{-2x_1+x_2-2x_3+15}{3}=0$

$$d(P,E)=\left|\frac{-2\cdot 2+(-16)-2\cdot 2+15}{3}\right|=3$$

Der Abstand von P zu E und damit auch von g zu E beträgt 3 Längeneinheiten.

Aufgabe 7:

Um die Ebenen zu zeichnen, sind die Durchstoßpunkte (Spurpunkte) mit den Koordinatenachsen erforderlich.
Die Durchstoßpunkte von E_1 haben die Koordinaten $S_1(3/0/0)$, $S_2(0/4/0)$, $S_3(0/0/6)$.
Die Durchstoßpunkte von E_2 haben die Koordinaten $S_1(2/0/0)$, $S_2(0/3/0)$.
Der Schnittpunkt mit der x_3-Achse existiert nicht, die Ebene ist parallel zu dieser Achse.



Aufgabe 8:

Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ steht senkrecht auf dieser Ebene E, also ist dies der Normalenvektor.

Außerdem liegt der Mittelpunkt M von A und B ebenfalls auf E.

Die Ebenengleichung kann in Normalenform geschrieben werden:

E: $[\vec{x} - \vec{m}] \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, wobei $\vec{m}$ der Ortsvektor des Mittelpunktes M ist.