Abiturprüfung Mathematik 2006 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Analytische Geometrie – Aufgabe II, 2

Aufgabe II 2.1

In einem Freizeitpark steht eine Kletteranlage in Form eines Pyramidenstumpfes mit vier unterschiedlichen Kletterwänden.
Der Pyramidenstumpf entsteht aus einer Pyramide, indem diese parallel zur Grundfläche durchgeschnitten und der obere Teil weggelassen wird.
Der Pyramidenstumpf hat als Grundfläche das Viereck ABCD mit
A(0/0/0), B(6/6/0), C(0/18/0) und D(-8/4/0)
und als Deckfläche das Viereck A*B*C*D* mit
A*(4/1/20), B*(7/4/20) und C*(4/10/20) (Koordinatenangaben in Meter)

a) Zeigen Sie, dass S(8/2/40) die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D*.
Zeichnen Sie den Pyramidenstumpf in ein Koordinatensystem ein. (5 VP)

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Wand ABB*A*.
Untersuchen Sie, ob die Wand ABB*A* nach außen überhängt. (6 VP)

Aufgabe II 2.2

Gegeben sind die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{v}$ mit $s,t \in \mathbb{R}$

Geben Sie zu jeder der folgenden Lagebeziehungen von g und h jeweils einen möglichen Vektor $\vec{v}$ an und begründen Sie ihre Antworten:

(1) g und h schneiden sich im Punkt S(-4/0/-1)
(2) g und h sind windschief
(3) g und h schneiden sich orthogonal

(5 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2006 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analytische Geometrie – Lösung II, 2

Aufgabe II 2.1

a) Die Spitze S der Pyramide ergibt sich als Schnittpunkt zweier (verlängerter) Seitenkanten des Pyramidenstumpfes.

Gerade durch AA*: $g_{AA^*}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}$; Gerade durch BB*: $g_{BB^*}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 20 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt erhält man durch Gleichsetzen:

$4r = 6 + s$

$r = 6 - 2s$ Als Lösung des Gleichungssystems folgt r = 2 und s = 2.

$20r = 20s$

Schnittpunkt S(8/2/40) was zu zeigen war.

Die Koordinaten von D* erhält man als Schnittpunkt der Geraden durch D und S mit der Ebene (Deckfläche) durch A*B*C*.

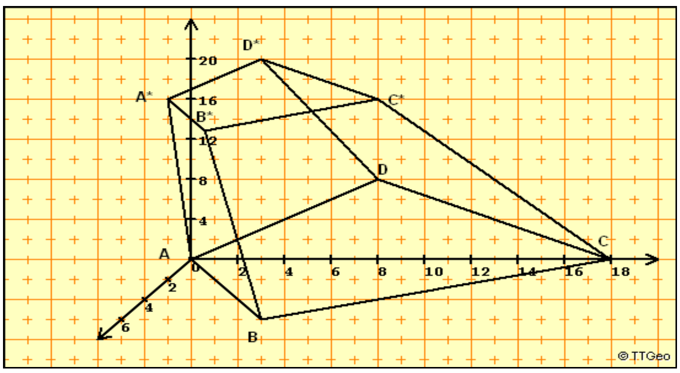
Gerade durch D und S: $g_{DS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 40 \end{pmatrix}$

Ebene durch A*B*C*: Parameterform $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

Als Koordinatengleichung ergibt sich: E: $1x_3 = 20$

Schnittpunkt der Gerade mit E: $40r = 20 \Rightarrow r = 0{,}5 \Rightarrow D^*(0/3/20)$

Zeichnung:



b) Das Viereck ABB*A* stellt ein Trapez dar, da die Seiten AB und A*B* zueinander parallel sind.

Rechnerischer Nachweis: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{A^*B^*} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind Vielfache und damit parallel.

Trapezfläche = $\frac{\overline{AB}+\overline{A^*B^*}}{2}\cdot h_{Trapez}$

Hierbei gilt $\overline{AB}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}=6\cdot\sqrt{2}$ und $\overline{A^*B^*}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\cdot\sqrt{2}$

Die Höhe des Trapezes entspricht dem Abstand des Punktes A* von der Geraden durch A und B $g_{AB}:\vec{x}=s\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}$

Zunächst benötigt man eine Hilfsebene H senkrecht zur Geraden durch A*(4/1/20):

H: $6x_1+6x_2=30\Rightarrow x_1+x_2=5$

Schnittpunkt L der Geraden mit H: $6s+6s=5\Rightarrow s=\frac{5}{12}$ und somit $L(\frac{5}{2}/\frac{5}{2}/0)$

Abstand A* von Gerade = $\overline{A^*L}=\left|\begin{pmatrix}-1{,}5\\1{,}5\\-20\end{pmatrix}\right|=\sqrt{2{,}25+2{,}25+400}=\sqrt{404{,}5}\approx 20{,}11\,LE$

Trapezfläche $=\frac{6\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{404{,}5}=128\,FE$

Der Flächeninhalt der Wand ABB*A* beträgt etwa 128 Flächeneinheiten.

Damit die Wand ABB*A* überhängt, müssen die Punkte A' und B', die sich durch Projektion der gegebenen Punkte A* und B* auf die x_1-x_2-Ebene ergeben, außerhalb des Grundflächenvierecks ABCD liegen.

Es gilt: A'(4/1/0) und B'(7/4/0).

Anhand der Koordinaten kann man schon anschaulich erkennen, dass A' und B' außerhalb des Vierecks ABCD liegen.

Rechnerischer Nachweis:

Das Viereck wird aufgespannt von den beiden Vektoren $\overrightarrow{OB}$ und $\overrightarrow{OD}$.

Nun wird der Vektor $\overrightarrow{OA'}$ als Linearkombination der beiden Vektoren dargestellt:

$\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-8\\4\\0\end{pmatrix}$ Daraus ergibt sich $r=\frac{1}{3}$ und $s=-\frac{1}{4}$.

Da s < 0 ist, liegt der Punkt A' außerhalb des Vierecks ABCD.

Nun wird der Vektor $\overrightarrow{OB'}$ als Linearkombination der beiden Vektoren dargestellt:

$\begin{pmatrix}7\\4\\0\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-8\\4\\0\end{pmatrix}$ Daraus ergibt sich $r=\frac{5}{6}$ und $s=-\frac{1}{4}$.

Da s < 0 ist, liegt der Punkt B' außerhalb des Vierecks ABCD.

Somit hängt die Wand ABB*A* nach außen über.

Aufgabe II 2.2

(1) Der Richtungsvektor von h muss so gewählt werden, das der Punkt S(-4/0/-1) darauf liegt. Der Punkt S liegt auf h, wenn für irgendein Parameterwert t der Punkt entsteht.

Sei zum Beispiel t = 1: $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Daraus folgt $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) Der Richtungsvektor von h muss linear unabhängig vom Richtungsvektor von g sein.

Sei zum Beispiel $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gleichzeitig dürfen die beiden Geraden nun keinen Schnittpunkt mehr besitzen.
Prüfung durch Gleichsetzen ergibt:

$s = 2 + 0$
$0 = 2$ Aus der 2.Zeile ergibt sich ein Widerspruch, also ist g und h windschief.
$3 + s = t$

(3) Damit sich die Geraden orthogonal schneiden, sind zwei Bedingungen erforderlich.

1.Bedingung: Richtungsvektoren stehen orthogonal zueinander

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow v_1 + v_3 = 0 \Leftrightarrow v_1 = -v_3$$

2.Bedingung: Geraden schneiden sich in einem Punkt

Gleichsetzen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{aligned} s &= 2 + t \cdot v_1 \\ 0 &= 2 + t \cdot v_2 \\ 3 + s &= -t \cdot v_1 \end{aligned}$

Addition der 1. und 3.Zeile: $3 + 2s = 2 \Rightarrow s = -0{,}5$
Also lautet der gemeinsame Punkt F(-0,5/0/2,5)

Nun muss der Richtungsvektor so bestimmt werden, dass F auf der Geraden h liegt:

$\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ Wähle z.B. $t = 1$ und damit $v_1 = -2{,}5$ und $v_2 = -2$ und

damit $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$