Abiturprüfung Mathematik 2005 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Pflichtteil - Aufgaben

Aufgabe 1: (2 VP)

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$.

Aufgabe 2: (2 VP)

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{4}x^4$.

Aufgabe 3: (3 VP)

Lösen Sie die Gleichung $x^5 - 3x^3 - 4x = 0$.

Aufgabe 4: (4 VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$; $x \neq 0$.

Geben Sie die Asymptoten des Schaubilds von f an.
Skizzieren Sie damit das Schaubild von f.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Normalen im Punkt P(2/f(2)).

Aufgabe 5: (5 VP)

Gegeben sind die Schaubilder der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$, ihrer Ableitungsfunktion f', einer Stammfunktion F von f und der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

a) Begründen Sie, dass nur Bild 1 das Schaubild der Funktion f sein kann.
b) Ordnen Sie die Funktionen f', F und g den übrigen Schaubildern zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Bild 1

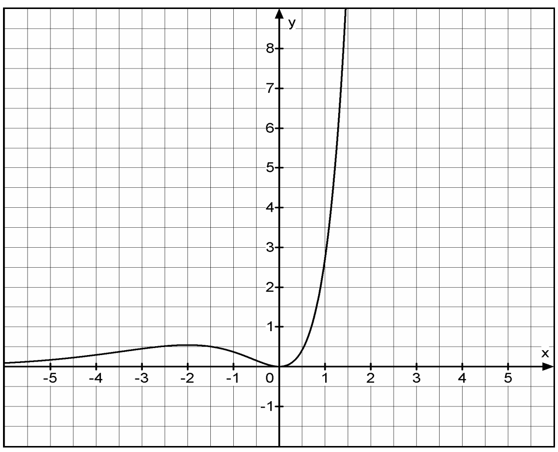


Bild 2

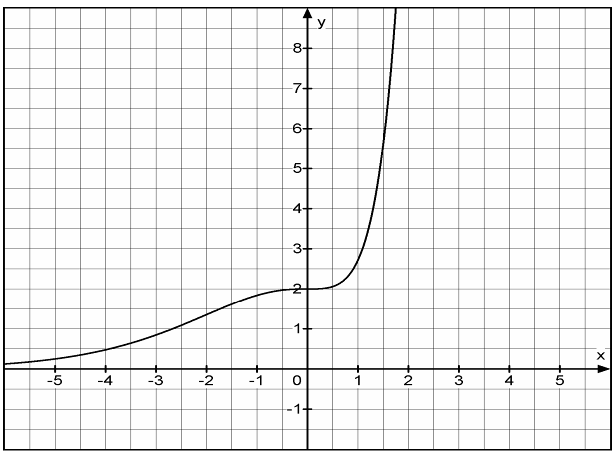


Bild 3

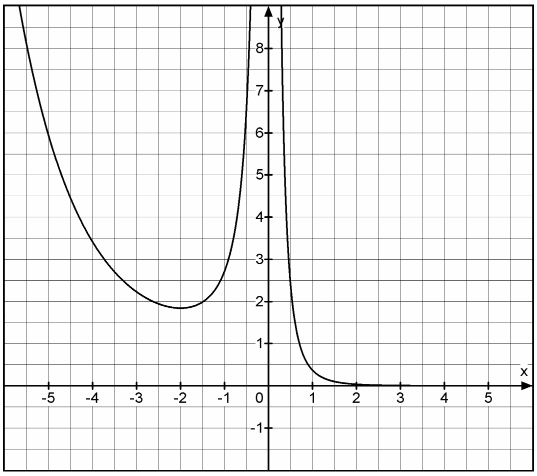
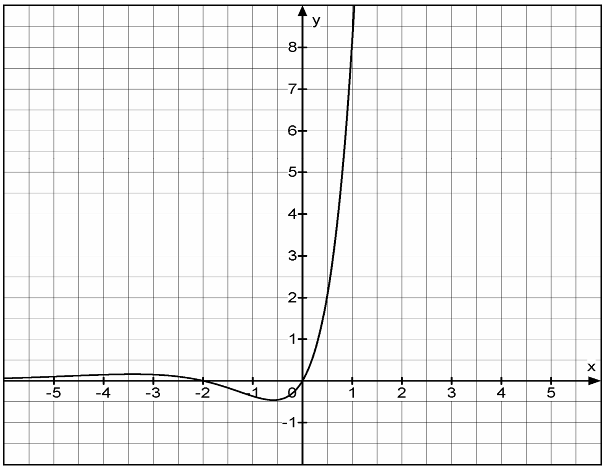


Bild 4



Aufgabe 6: (4 VP)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Wie lässt sich ein solches Gleichungssystem und seine eindeutige Lösung geometrisch deuten ?

Aufgabe 7: (3 VP)

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die den Punkt A(2/-1/-2) und die Gerade

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in R$ enthält.

Aufgabe 8: (3 VP)

Gegeben sind eine Ebene E und ein Punkt P, der nicht in E liegt.
P wird an E gespiegelt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Bildpunkt P' zu bestimmen.
Fertigen Sie dazu eine Skizze an.

Abiturprüfung Mathematik 2005 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Pflichtteil – Lösungen

Aufgabe 1:

Die Ableitungsfunktion wird mit Hilfe der Produkt- und der Kettenregel ermittelt:

$$f'(x) = 3x^2 \cdot e^{2x} + x^3 \cdot e^{2x} \cdot 2 = x^2 \cdot e^{2x}(3+2x)$$

Aufgabe 2:

Eine mögliche Stammfunktion von $f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{4}x^4$ wäre

$$F(x) = 4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{20}x^5 = 8 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{20}x^5$$

Aufgabe 3:

$$x^5 - 3x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^4 - 3x^2 - 4) = 0$$

Da x ausgeklammert werden kann, gilt $x_1 = 0$.

Nun muss noch die Gleichung $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ gelöst werden. Es handelt sich dabei um eine biquadratische Gleichung, die mit Hilfe der Substitution gelöst wird:

$$x^2 = u \Rightarrow u^2 - 3u - 4 = 0$$

$u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$ und damit $u_1 = 4$ und $u_2 = -1$

Rücksubstitution: $u_1 = 4 \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$
$u_2 = -1 \Rightarrow -1 = x^2$ kann nicht gelöst werden.

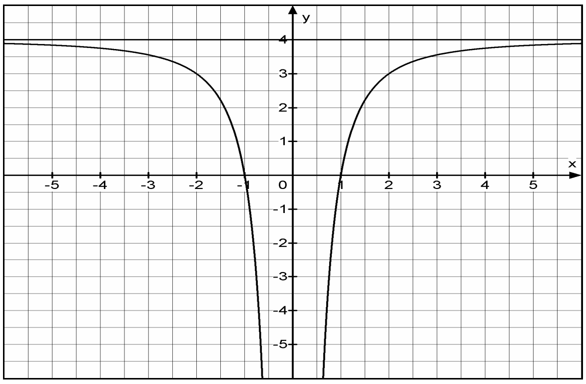
Also Lösungsmenge L = { 0; -2; 2}

Aufgabe 4:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2}$; $x \neq 0$.

Die **waagrechte Asymptote** des Schaubildes ist die Gerade y = 4, da $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 4$ gilt.

Die **senkrechte Asymptote** des Schaubildes ist die Gerade x = 0 (also die y-Achse), da bei x = 0 eine Definitionslücke vorliegt und sich beim Einsetzen von x = 0 in den Zähler des Bruches ein Wert $\neq 0$ ergibt. Da es sich um eine doppelte Nullstelle im Nenner handelt, besitzt die senkrechte Asymptote keinen Vorzeichenwechsel.



Normale im Punkt P(2/f(2)):
Die Normale ist die Senkrechte zur Tangente im Kurvenpunkt P.
y-Wert von P: $f(2) = 3$, also P(2/3).

$f(x) = 4 - 4x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 8x^{-3} = \dfrac{8}{x^3}$

Tangentensteigung in P = $f'(2) = 1 = m_{Tang.}$

Da die Normale orthogonal auf der Tangente steht gilt: $m_{Normale} \cdot m_{Tang.} = -1$; also $m_{Normale} = -1$.

Nun benutzt man die Punkt-Steigungs-Form zur Ermittlung der Normalengleichung:

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 3 = -1 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -x + 5$ dies ist die gesuchte Normalengleichung.

Hinweis: Man hätte die Normalengleichung auch mit der Normalenformel $y = -\dfrac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$ *mit u = 2 bestimmen können.*

Aufgabe 5:
Hier sind mehrere Lösungsmöglichkeiten denkbar.

a) Die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x$ besitzt eine Nullstelle bei N(0/0), also kann nur Bild 1 oder 4 überhaupt in Frage kommen.
Mögliche Begründungen, dass es nur Bild 1 sein kann:
1.) Durch den Faktor x^2 erkennt man, dass es sich um eine doppelte Nullstelle, also um einen Extrempunkt handeln muss, also kommt nur Bild 1 in Frage.
2.) In Bild 4 existiert eine weitere Nullstelle bei x = -2, aber es gilt $f(-2) \neq 0$. Somit kann nur Bild 1 in Frage kommen.
3.) Es ist $f(x) = x^2 \cdot e^x \geq 0$, somit kann das Schaubild von f nicht unterhalb der x-Achse liegen. Damit scheidet Bild 4 aus und es kommt nur Bild 1 in Frage.

b) $f'(x)$ gibt als erste Ableitung die Steigung an jeder Stelle x der Funktion f(x) an. Da an der Stelle x = 0 ein Extrempunkt (mit Steigungszahl 0) bei f vorliegt, gilt $f'(0) = 0$.
$f'(x)$ kann also nur Bild 4 sein.

$\frac{1}{f(x)}$ hat dort eine Definitionslücke, wo f(x) = 0 ist, also bei x = 0.
Folglich kommt nur Bild 3 in Frage.

Für die Stammfunktion $F(x)$ bleibt nur Bild 2 übrig.
Als eigene Begründung wäre möglich, dass F(x) streng monoton wachsend sein muss, da F(x) die Fläche zwischen einer unteren Grenze u und der oberen Grenze x beschreibt und da das Schaubild von f(x) (Bild 1) immer oberhalb der x-Achse liegt, nimmt F(x) mit wachsendem x zu.

Eine weitere eigene Begründung wäre: Da $F'(x) = f(x)$ gilt, kann $f(x)$ somit als erste Ableitungsfunktion von F(x) interpretiert werden. Da bei f(x) (als Ableitung interpretiert) ein Extrempunkt bei x = 0 vorliegt, muss bei F(x) ein Wendepunkt bei x = 0 vorliegen, was bei Bild 2 auch tatsächlich der Fall ist.

Aufgabe 6:

$$\begin{array}{ll} x_1 + 4x_2 + x_3 = 10 \mid \cdot(-1) & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 & \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_2 = -2 \\ -3x_2 - 2x_3 = -7 \end{array}$$

Aus der 2. Zeile erhält man $x_2 = 1$. Aus der 3. Zeile ergibt sich dann $x_3 = 2$ und das ganze in die 1.Zeile eingesetzt ergibt $x_1 = 4$, also L = { (4/1/2) }

Geometrische Interpretation: Die drei Gleichungen können als Koordinatengleichungen dreier Ebenen im Raum interpretiert werden. Die Lösung des LGS bedeutet anschaulich, dass sich diese drei Ebenen im Punkt P(4/1/2) schneiden.

Aufgabe 7:

Da die Gerade in der Ebene E liegt, kann sowohl der Ortsvektor als auch der Richtungsvektor der Geradengleichung für die Ebene übernommen werden.
Der zweite Richtungsvektor der Ebene ergibt sich aus dem Verbindungsvektor des Punktes A(2/-1/-2) und des Geradenpunktes B(3/3/1), also $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Umwandlung in Koordinatenform:

Berechnung des Normalenvektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ mit $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Daraus ergibt sich das LGS:

$$n_1 + 4n_2 + 3n_3 = 0$$
$$3n_1 + \quad + 1n_3 = 0$$

Das LGS besitzt unendlich viele Lösungen, es genügt, eine Lösung zu finden.

Setze hierzu z.B. $n_1 = 1$, dann ergibt sich $n_3 = -3$ und $n_2 = 2$, also $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Der Ansatz für die Ebenengleichung lautet E: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = c$
Den Wert von c erhält man, wenn man den gegeben Punkt B(3/3/1) in die Ebene einsetzt:
$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 6$, also E: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$

Aufgabe 8:

In folgenden Schritten erhält man den Spiegelpunkt P' von P bei der Spiegelung an E:

1.Schritt:
Aufstellen einer Hilfsgerade h, die senkrecht zur Ebene steht und durch den Punkt P verläuft (d.h. der Richtungsvektor von g entspricht dem Normalenvektor von E)

2.Schritt:
Berechnung des Schnittpunktes von der Hilfsgerade h mit der Ebene E. Hiermit erhält man den Lotfußpunkt L.

3.Schritt:
Vektorzugverfahren: $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{PL}$
Die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{OP'}$ entsprechen den Punktkoordinaten des Punktes P'.