Abiturprüfung Mathematik 2009 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis I 2

Aufgabe I 2.1:

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 2 \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2$.

Ihr Schaubild sei K.

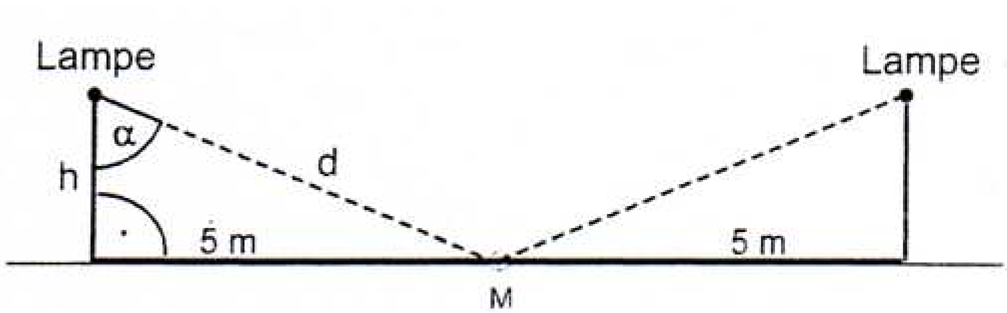
a) Skizzieren Sie K im Intervall [0;4].
Geben Sie die Periode von f an.
Geben Sie alle Hoch- und Tiefpunkte von K auf ganz $\mathbb{R}$ an.
Für welche Werte von x nimmt f im Intervall [0;2] den Wert 1 an ? (5 VP)

b) Die Funktion f kann auch in der Form $f(x) = a - \cos(bx)$ dargestellt werden.
Bestimme a und b.
K und die x-Achse begrenzen zwischen benachbarten Nullstellen jeweils eine Fläche.
Berechnen Sie den Inhalt einer solchen Fläche exakt. (4 VP)

c) Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades hat in P(1/2) einen Hochpunkt und in Q(2/0) einen Tiefpunkt.
Bestimmen Sie einen Funktionsterm für g.
An welchen Stellen im Intervall [1;2] weichen die Funktionswerte von f und g am stärksten voneinander ab ? (5 VP)

Aufgabe I 2.2:

Zwei in gleicher Höhe h ($h \leq 5$) befestigte Lampen sollen einen 10 m langen Abschnitt eines ebenen Spazierwegs beleuchten (siehe Skizze).



Für die Maßzahl H der Helligkeit in der Mitte M gilt $H = 100 \cdot \frac{\cos(\alpha)}{d^2}$ (d in Meter).

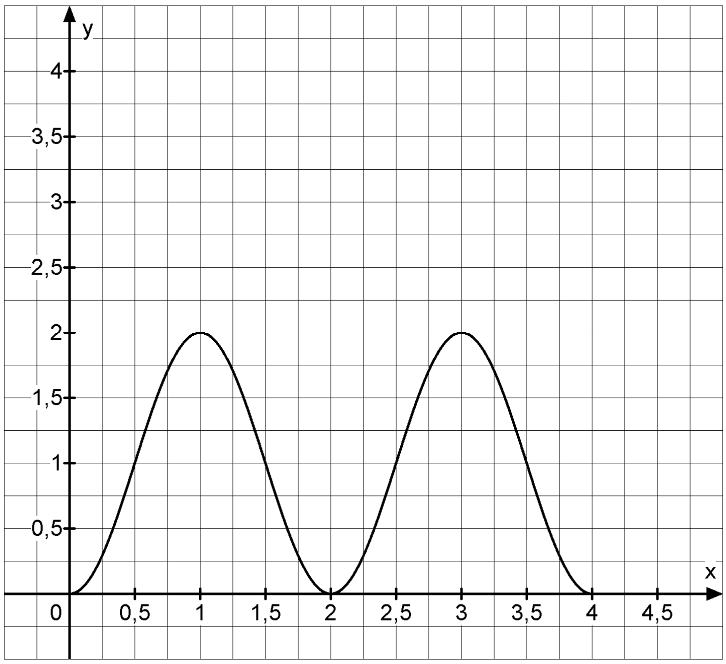
In welcher Höhe müssen die Lampen befestigt werden, damit der Weg bei M möglichst hell beleuchtet wird ?

(4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2009 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analysis I 2

Aufgabe I 2.1:

a) Skizze von Schaubild K:



Die Periode ist p = 2 (aus dem Schaubild ablesbar).

Koordinaten der Hochpunkte: Die x-Werte sind alle ungeraden Zahlen, der y-Wert ist 2.
allgemein: HP(2k+1/2) für $k \in \mathbb{Z}$

Koordinaten der Hochpunkte: Die x-Werte sind alle geraden Zahlen, der y-Wert ist 0.
allgemein: TP(2k/0) für $k \in \mathbb{Z}$

Der Funktionswert 1 wird im Intervall [0;2] angenommen für x = 0,5 und x = 1,5 (aus dem Schaubild ablesbar).

b) Bei der Funktionsgleichung $f(x) = a - \cos(bx)$ entspricht a der Verschiebung von K gegenüber der Grundfunktion cos(x) nach oben bzw. nach unten.
Da laut der Skizze das Schaubild um 1 nach oben verschoben ist, gilt a = 1.

Oder: Da O(0/0) auf K liegt muss gelten $f(0) = 0 \Leftrightarrow a - \cos(0) = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Der Parameter b kann mit Hilfe der Periode p ermittelt werden: $p = \frac{2\pi}{b}$

$2 = \frac{2\pi}{b} \Leftrightarrow b = \pi$

Die Funktion lautet $f(x) = 1 - \cos(\pi \cdot x)$.

Berechnung der gesuchten Fläche:

$$A=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (1-\cos(\pi\cdot x))dx=\left[x-\frac{1}{\pi}\cdot\sin(\pi\cdot x)\right]_0^2=2-\frac{1}{\pi}\cdot\sin(2\pi)-(0-\frac{1}{\pi}\cdot\sin(0))=2$$

Zur Berechnung des Integrals wurde die Funktionsgleichung aus Teilaufgabe b) benutzt, da von der ursprünglichen Funktionsgleichung $f(x)=2\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2$ keine Stammfunktion berechnet werden kann.

c) Ansatz für ganzrationale Funktion 3.Grades: $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Bedingung: P(1/2) liegt auf g, also g(1) = 2
Hochpunkt in P, also $g'(1)=0$
Q(2/0) liegt auf g, also g(2) = 0
Tiefpunkt in Q, also $g'(2)=0$

Anhand dieser 4 Bedingungen können nun 4 Gleichungen aufgestellt werden:

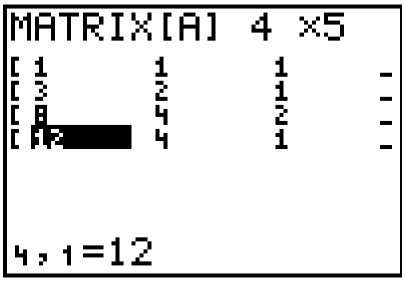
Es gilt $g'(x)=3ax^2+2bx+c$

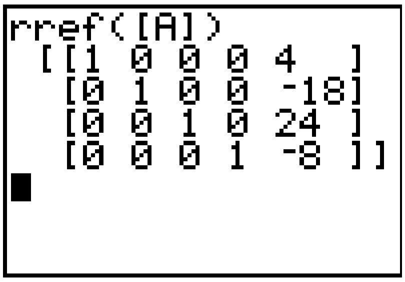
$g(1)=2\Rightarrow a+b+c+d=2$

$g'(1)=0\Rightarrow 3a+2b+c=0$

$g(2)=0\Rightarrow 8a+4b+2c+d=0$

$g'(2)=0\Rightarrow 12a+4b+c=0$



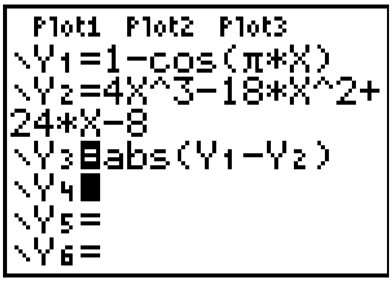


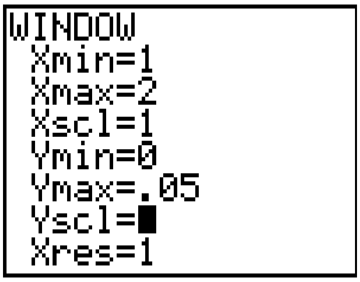
Mit dem GTR ergibt sich als Lösung a = 4, b = -18 , c = 24 und d = -8

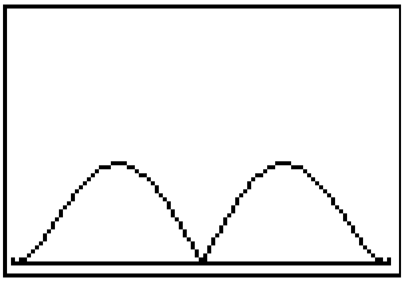
Also $g(x)=4x^3-18x^2+24x-8$

Für die Abweichung zwischen f und g gilt $d(x)=|f(x)-g(x)|$

Gesucht ist der x-Wert, für den die Funktion d(x) einen maximalen Wert annimmt.







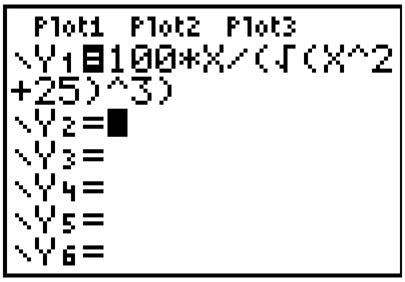
Ein Maximum liegt bei x = 1,28 und x = 1,72 vor mit $d_{max} = 0{,}02$.
Die Funktionswerte von f und g weichen bei x = 1,28 und x = 1,72 am meisten voneinander ab, und zwar um 0,02.

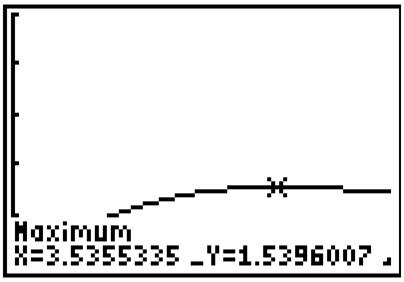
Aufgabe I 2.2:

Damit die Höhe bestimmt werden kann, für die die Funktion H ein Maximum liefert, müssen die Variablen d und α, die momentan noch in der Funktionsgleichung von H auftreten, durch Terme mit h ersetzt werden.

Es gilt: $\cos\alpha = \frac{h}{d}$ und es gilt $d^2 = h^2 + 25 \Rightarrow d = \sqrt{h^2 + 25}$

Nun folgt: $H = 100 \cdot \frac{\cos(\alpha)}{d^2} = 100 \cdot \frac{h}{d^3} = 100 \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2+25}^3}$





Im Intervall [0;5] (h soll maximal 5 Meter sein) wird die Maßzahl H maximal für h = 3,54 m .
Die Lampen müssen daher in der Höhe von 3,54 m befestigt werden.