Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis I 3

Aufgabe I 3.1:

Ein Behälter hat ein Fassungsvermögen von 1200 Liter. Die enthaltene Flüssigkeitsmenge zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 1000 - 800 \cdot e^{-0{,}01t} \;;\; t \geq 0 \quad \text{(t in Minuten, f(t) in Liter)}$$

a) Zu welchem Zeitpunkt ist der Behälter zur Hälfte gefüllt ?
Zeigen Sie, dass die Flüssigkeitsmenge im Behälter stets zunimmt.
Bestimmen Sie die mittlere Flüssigkeitsmenge während der ersten Stunde.
Aus Sicherheitsgründen darf die Flüssigkeitsmenge höchstens 85% des Fassungsvermögens betragen. Wird diese Vorschrift zu jeder Zeit eingehalten ?
Begründen Sie Ihre Antwort. (6 VP)

b) In einem anderen Behälter mit einem Zufluss und einem Abfluss befinden sich zu Beginn ebenfalls 200 Liter Flüssigkeit. Einerseits fließen pro Minute 10 Liter zu, andererseits beträgt die momentane Abflussrate 1% des jeweiligen Inhalts pro Minute.
Dieser Vorgang wird durch die Differenzialgleichung $B'(t) = a - b \cdot B(t)$ beschrieben.
Geben Sie a und b an.
Zeigen Sie, dass f eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist. (3 VP)

c) Der Vorgang in b) wird nun so geändert, dass pro Minute 12 Liter zufließen und die momentane Abflussrate 2% des Inhalts pro Minute beträgt. Die anfängliche Flüssigkeitsmenge ist wiederum 200 Liter.
Ermitteln Sie einen Funktionsterm, der diesen Vorgang beschreibt. Welche Flüssigkeitsmenge ist nach einer Stunde aus diesem Behälter abgeflossen ?
(5 VP)

Aufgabe I 3.2:

Hinweis: ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

Die Folge (a_n) ist gegeben durch $a_0 = 5$, $a_{n+1} = 10 + 0{,}8 \cdot a_n$ für $n \in \mathbb{N}$.
50 ist eine obere Schranke dieser Folge. Zeigen Sie damit, dass die Folge monoton wachsend ist.
Begründen Sie, dass die Folge konvergiert.
Berechnen Sie den Grenzwert exakt. (4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analysis I 3

Aufgabe I 3.1

a) Zeitpunkt, bei dem 600 Liter im Behälter sind:

$600 = 1000 - 800 \cdot e^{-0,01t} \Rightarrow 0,5 = e^{-0,01t} \Rightarrow t = -100 \cdot \ln 0,5 = 69,3\,\text{min}$

Nach 69,3 Minuten ist der Behälter zur Hälfte gefüllt.

Um zu zeigen, dass die Flüssigkeitsmenge im Behälter stets zunimmt, ist nachzuweisen, dass das Schaubild von f streng monoton wachsend ist.

$f'(t) = 8 \cdot e^{-0,01t} > 0$ für alle $t \geq 0$
Damit ist das Schaubild von f streng monoton wachsend.

Mittlere Flüssigkeitsmenge in den ersten 60 Minuten: $\frac{1}{60-0} \cdot \int_0^{60} f(t)dt = 398,4$ Liter (GTR)

85% von 1200 Liter entspricht 1020 Liter.

Da $f(t) \leq 1000$ ist für alle $t \geq 0$, wird die Vorschrift zu jeder Zeit eingehalten.

b) Es gilt: $B'(t) = 10 - 0,01 \cdot B(t)$, damit ist a = 10 und b = 0,01.

Um zu zeigen, dass f die Differenzialgleichung löst, wird f eingesetzt.

$\Rightarrow 8 \cdot e^{-0,01t} = 10 - 0,01 \cdot \left(1000 - 800 \cdot e^{-0,01t}\right) \Rightarrow 8 \cdot e^{-0,01t} = 10 - 10 + 8 \cdot e^{-0,01t}$
Da nach dem Einsetzen in die Differenzialgleichung auf beiden Seiten derselbe Ausdruck steht, löst f die Differenzialgleichung.

c) Es gilt: $B'(t) = 12 - 0,02 \cdot B(t)$.
Umformung der Differenzialgleichung: $B'(t) = 0,02 \cdot (600 - B(t))$.
Damit handelt es sich um ein beschränktes Wachstum mit S = 600.
Die Lösung der Differenzialgleichung lautet: $B(t) = 600 - a \cdot e^{-0,02t}$
Mit B(0) = 200 folgt $B(0) = 600 - a = 200 \Rightarrow a = 400$
Funktionsterm: $B(t) = 600 - 400 \cdot e^{-0,02t}$

Flüssigkeitsmenge nach 1 Stunde: $B(60) = 600 - 400 \cdot e^{-0,02 \cdot 60} = 479,5$ Liter.

Nach 1 Stunde sind $60 \cdot 12 = 720$ Liter zugelaufen.
Ohne Abfluss wären dann 200 + 720 = 920 Liter im Behälter.

Die Differenz zur tatsächlichen Menge stellt die Abflussmenge in einer Stunde dar:
920 – 479,5 = **440,5 Liter**

Aufgabe I 3.2

Die Folge ist monoton wachsend, wenn $a_{n+1} - a_n \geq 0$ ist.

$a_{n+1} - a_n = 10 + 0{,}8 \cdot a_n - a_n = 10 - 0{,}2 \cdot a_n \geq 10 - 0{,}2 \cdot 50 = 0$

Bei der Ungleichung wurde die Information aus der Aufgabenstellung genutzt, dass $a_n \leq 50$ ist.

Die Folge ist monoton wachsend und beschränkt (50 ist laut Aufgabenstellung die obere Schranke, da sie monoton wachsend ist, ist $a_0 = 5$ die untere Schranke).

Jede Folge, die monoton wachsend und beschränkt ist, konvergiert.

Der Grenzwert der Folge sei g.
Der Grenzwert der rekursiven Folge kann dadurch ermittelt werden, dass die Folgeglieder a_{n+1} und a_n in der rekursiven Vorschrift durch g ersetzt werden.

$\Rightarrow g = 10 + 0{,}8 \cdot g \Rightarrow 0{,}2g = 10 \Rightarrow g = 50$

Der Grenzwert ist g = 50 und entspricht hier der oberen Schranke.