Hauptprüfung Abiturprüfung 2014 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Wahlteil Analysis 1

Hilfsmittel: GTR und Formelsammlung

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

September 2014

Aufgabe A 1.1:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 10x \cdot e^{-0,5x}$.
Ihr Graph sei K.

a) K besitzt einen Extrempunkt und einen Wendepunkt.
Geben Sie deren Koordinaten an.
Geben Sie eine Gleichung der Asymptote von K an.
Skizzieren Sie K. (4 VP)

b) Für jedes u > 0 sind O(0/0), P(u/0) und Q(u/f(u)) die Eckpunkte eines Dreiecks.
Bestimmen Sie einen Wert von u so, dass dieses Dreieck den Flächeninhalt 8 besitzt.
Für welchen Wert von u ist das Dreieck OPQ gleichschenklig ?
(4 VP)

c) Auf der x-Achse gibt es Intervalle der Länge 3, auf denen die Funktion f den Mittelwert 2,2 besitzt.
Bestimmen Sie die Grenzen eines solchen Intervalls. (3 VP)

Aufgabe A 1.2

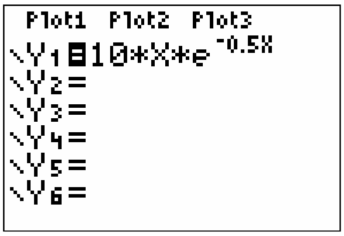
Gegeben ist für jedes t > 0 eine Funktion f_t durch $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - t^2x$.
Bestimmen Sie t so, dass die beiden Extrempunkte des Graphen von f_t den Abstand 13 voneinander haben.
(4 VP)

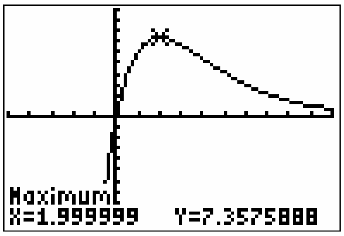
Lösungen

Aufgabe A 1.1

a) Koordinaten des Extrempunktes:
Notwendige und hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

GTR:

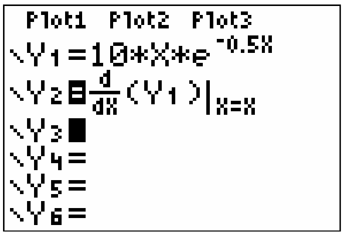


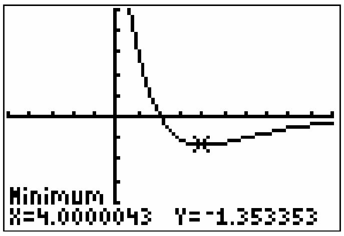


Das Schaubild besitzt den Hochpunkt H(2/7,36)

Koordinaten des Wendepunktes:
Notwendige und hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

GTR:

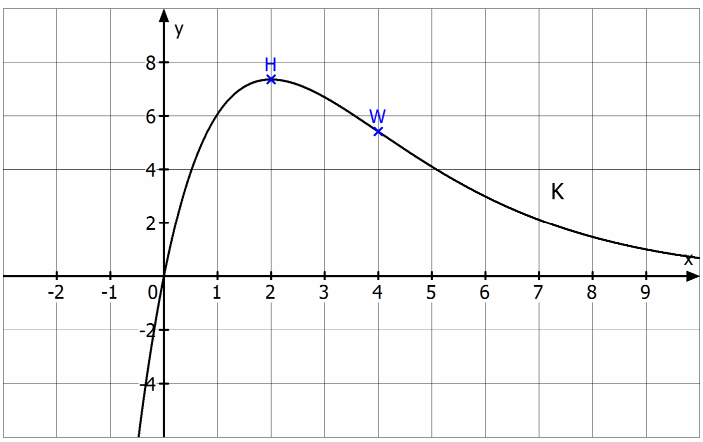




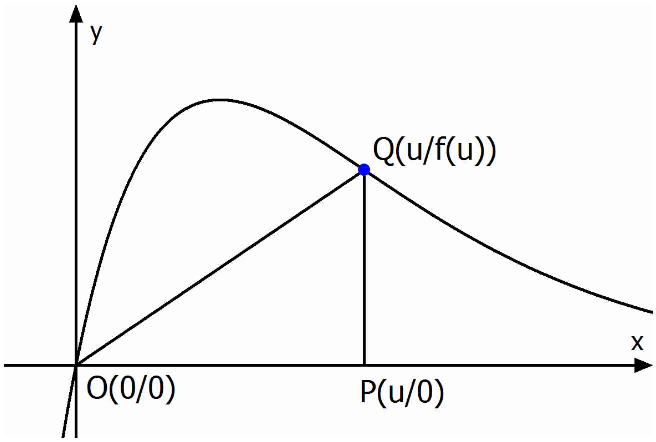
Die Ableitungsfunktion hat ihr relatives Minimum bei x = 4.
Somit besitzt K die Wendestelle x = 4. Außerdem gilt $f(4) = 5{,}41$.
Das Schaubild besitzt den Wendepunkt W(4/5,41).

Das Schaubild K besitzt für $x \to \infty$ die waagrechte Asymptote y = 0.

Skizze von K:



b) Skizze des Dreiecks:

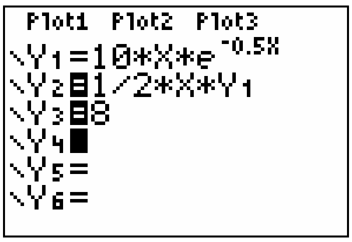


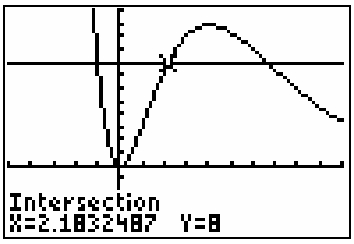
Die Fläche des Dreiecks OPQ berechnet sich mit $A = \frac{1}{2}\overline{OP} \cdot \overline{PQ}$

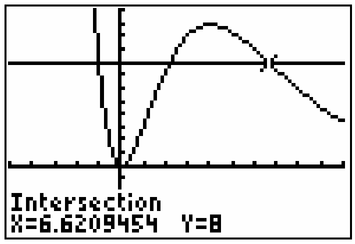
Mit $\overline{OP} = u$ und $\overline{PQ} = f(u)$ ergibt sich als Fläche der Term $A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u)$.

Nun soll gelten: $\frac{1}{2}u \cdot f(u) = 8$ für u > 0.

Die Gleichung wird mit dem GTR gelöst:



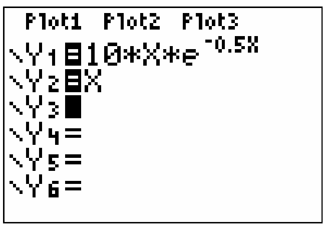


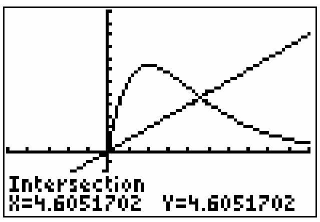


Es gibt zwei Werte für u, für die die Dreiecksfläche den Inhalt 8 besitzt:
u = 2,18 oder u = 6,62.

Das Dreieck OPQ ist gleichschenklig, wenn die Seiten $\overline{OP}$ und $\overline{PQ}$ gleich lang sind.
Da das Dreieck rechtwinklig ist bei P und $\overline{OQ}$ die längste Dreiecksseite darstellt,. gibt es keine andere Möglichkeit.
Bedingung für Gleichschenkligkeit: $\overline{OP} = \overline{PQ} \Leftrightarrow u = f(u)$ für u > 0

Die Gleichung wird mit dem GTR gelöst:



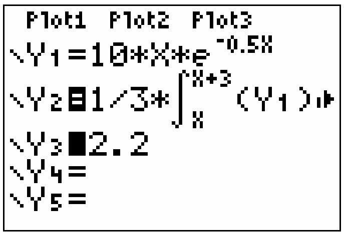


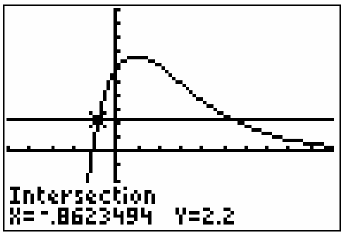
Für u = 4,61 ist das Dreieck OPQ gleichschenklig.

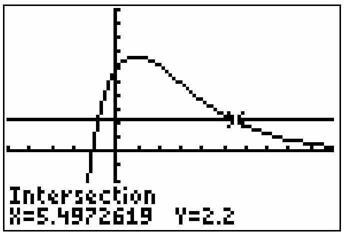
c) Das gesuchte Intervall mit der Länge 3 hat die Gestalt [u ; u+3].

Ansatz für den Mittelwert: $\frac{1}{3} \cdot \int_{u}^{u+3} f(x)dx = 2,2$

Berechnung mit dem GTR:







Es existieren zwei Lösungen: x = -0,862 und x = 5,5.
Die möglichen Intervalle lauten [-0,862 ; 2,138] und [5,5 ; 8,5].

Aufgabe A 1.2

Berechnung der Ableitungsfunktionen:

$f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - t^2x \qquad f_t'(x) = x^2 - t^2 \qquad f_t''(x) = 2x$

Notwendige und hinreichende Bedingung für Extrempunkte: $f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) \neq 0$

$f_t'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - t^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm t$

$f_t''(t) = 2t > 0 \Rightarrow$ relatives Minimum ;

Da $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^3 = -\frac{2}{3}t^3$ ergibt sich als Tiefpunkt $T(t \,/\, -\frac{2}{3}t^3)$

$f_t''(-t) = -2t < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum ;

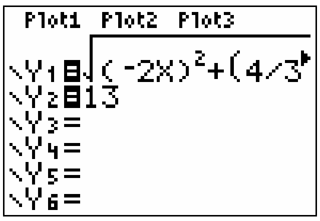
Da $f(-t) = \frac{1}{3}(-t)^3 - (-t)^3 = \frac{2}{3}t^3$ ergibt sich als Hochpunkt $H(-t \,/\, \frac{2}{3}t^3)$

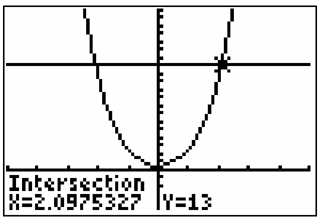
Abstand der Extrempunkte: $d = \sqrt{(x_H - x_T)^2 + (y_H - y_T)^2} = \sqrt{(-t-t)^2 + (\frac{2}{3}t^3 - (-\frac{2}{3}t^3))^2}$

$d(t) = \sqrt{(-2t)^2 + (\frac{4}{3}t^3)^2}$

Bedingung: $d(t) = 13$ für t > 0

Lösung mit GTR:





Für t = 2,1 haben die beiden Extrempunkte den Abstand 13 voneinander.