# Hauptprüfung Abiturprüfung 2016 (ohne CAS)

# Baden-Württemberg

## Wahlteil Analysis 1

**Hilfsmittel: GTR und Formelsammlung**

**allgemeinbildende Gymnasien**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

April 2016

**Aufgabe A 1.1**

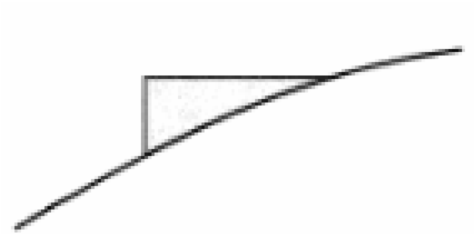
Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 + 3{,}6$ beschreibt modellhaft für $-1 \le x \le 5$ das Profil eines Geländequerschnitts.
Die positive x-Achse weist nach Osten, f(x) gibt die Höhe über dem Meeresspiegel an.
(1 Längeneinheit entspricht 100 m)

a) Auf welcher Höhe liegt der höchste Punkt des Profils ?
In dem Tal westlich dieses Punktes befindet sich ein See, der im Geländequerschnitt an einer tiefsten Stelle 10 m tief ist.
Bestimmen Sie die Breite des Sees im Geländequerschnitt.
Ab einer Hangneigung von 30° besteht die Gefahr, dass sich Lawinen lösen.
Besteht an der steilsten Stelle des Profils zwischen See und höchstem Punkt Lawinengefahr ?

(5 VP)

b)
Am Hang zwischen dem höchsten Punkt und dem westlich davon gelegenen Tal befindet sich ein in den Hang gebautes Gebäude, dessen rechteckige Seitenwand im Geländequerschnitt liegt.
Die Abbildung zeigt den sichtbaren Teil dieser Seitenwand. Die Oberkante der Wand verläuft waagrecht auf 540 m Höhe. Von dieser Kante sind 28 m sichtbar.

Untersuchen Sie, ob der Flächeninhalt des sichtbaren Wandteils größer als 130m² ist.



(3 VP)

c) Der weitere Verlauf des Profils nach Osten hin kann durch eine Parabel zweiter Ordnung modelliert werden, die sich ohne Knick an den Graphen von f anschließt. Ihr Scheitel liegt bei x = 6 und beschreibt den tiefsten Punkt eines benachbarten Tals.
Auf welcher Höhe befindet sich dieser Punkt ?

(4 VP)

**Aufgabe A 1.2**

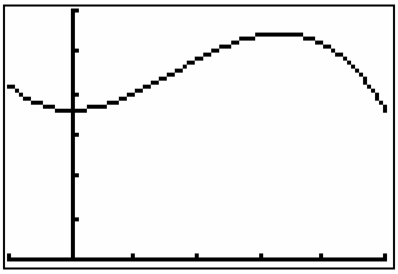
Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}$, deren Graph symmetrisch zur y-Achse ist.
Es gibt einen Kreis, der den Graphen von h in dessen Schnittpunkten mit der x-Achse berührt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts des Kreises.

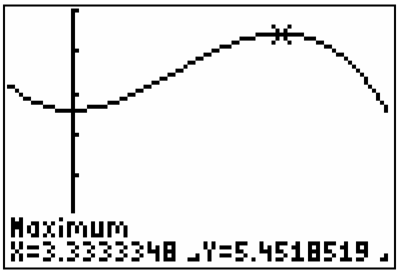
(3 VP)

## Lösungen

**Aufgabe A 1.1**

a) Skizze des Schaubildes mit dem GTR:






Der höchste Punkt des Profils entspricht dem absoluten Maximum der Funktion f(x).

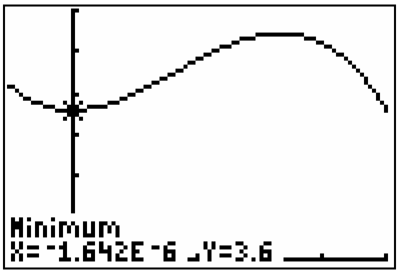
GTR: Koordinaten des Hochpunktes sind H(3,33/5,45).

Am Rand des Schaubildes existiert kein höherer Funktionswert: f(-1) = 4,2 und f(5) = 3,6.

Der höchste Punkt liegt auf einer Höhe von 545 m.

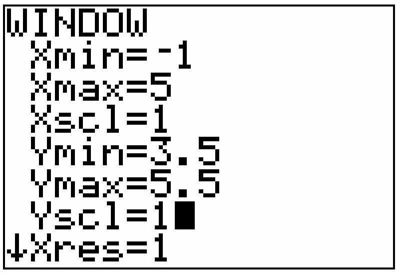
Der Tiefpunkt des Schaubildes entspricht dem Talpunkt.

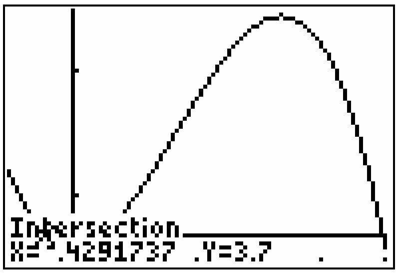
GTR:




Der Talpunkt hat die Koordinaten T(0/3,6). Dieser Punkt ist die tiefste Stelle des Sees.
Die Wasseroberfläche befindet sich daher auf einer Höhe von 3,6 + 0,1 = 3,7 = 370 m.

Gesucht sind die Stellen, an denen die Wasseroberfläche den Geländequerschnitt schneidet: $f(x) = 3{,}7$



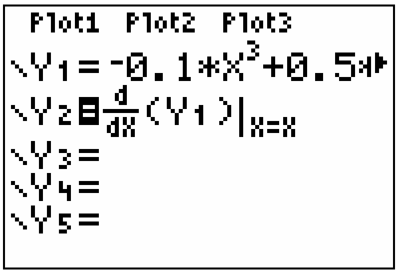



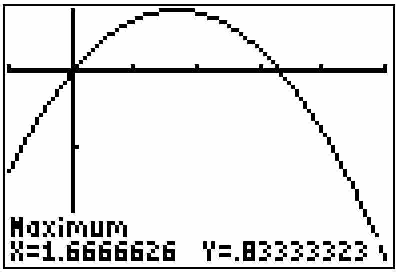

Die Lösungen sind $x_1 \approx -0{,}43$ und $x_2 \approx 0{,}47$

Breite des Sees: $0{,}47 + 0{,}43 = 0{,}9$ = 90 m

Berechnung der steilsten Stelle des Profils:

Um die steilste Stelle zu berechnen, benötigt man das Maximum der Ableitungsfunktion $f'$:



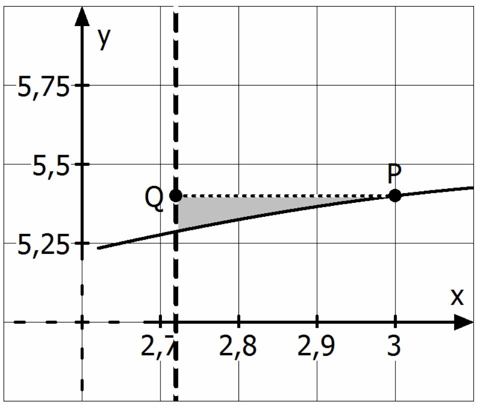




GTR: Die Ableitungsfunktion wird maximal für x = 1,67.
Die maximale Steigung beträgt $f'(1{,}67) = 0{,}83$

Berechnung des Steigungswinkels an der steilsten Stelle:
$\tan\alpha = 0{,}83 \Rightarrow \alpha = 39{,}7°$

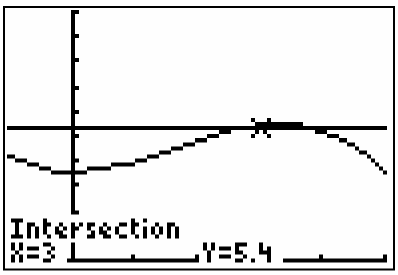
Da der Steigungswinkel über 30° beträgt, besteht an der steilsten Stelle Lawinengefahr.

b)




Zunächst wird berechnet, an welcher Stelle die Gebäudeoberkante das Schaubild schneidet: $f(x) = 5{,}4$

GTR:




Schnittpunkt P(3/5,4)

Da von der oberen Kante 28 m sichtbar sind, hat der linke obere Punkt die Koordinaten Q(2,72/5,4).

Inhalt der gesuchten Fläche: $A = \int_{2,72}^{3} (5,4 - f(x))dx = 0,0145$ (GTR).

Der Flächeninhalt des sichtbaren Wandteils beträgt $0,0145 \cdot 10.000m^2 = 145m^2$
Der Inhalt ist damit größer als 130 m².

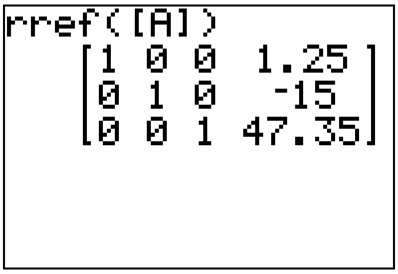
c) Die gesuchte Parabelgleichung hat den Funktionsansatz $g(x) = ax^2 + bx + c$
Weiterhin gilt $g'(x) = 2ax + b$

Es werden 3 Bedingungen benötigt:
Knickfreier Übergang an der Stelle x = 5: $g(5) = f(5) = 3,6$
$g'(5) = f'(5) = -2,5$

Scheitelpunkt an der Stelle x = 6: $g'(6) = 0$

Die Bedingungen führen auf folgendes Gleichungssystem:

$g(5) = 3,6 \Rightarrow 25a + 5b + c = 3,6$
$g'(5) = 10a + b = -2,5$
$g'(6) = 12a + b = 0$

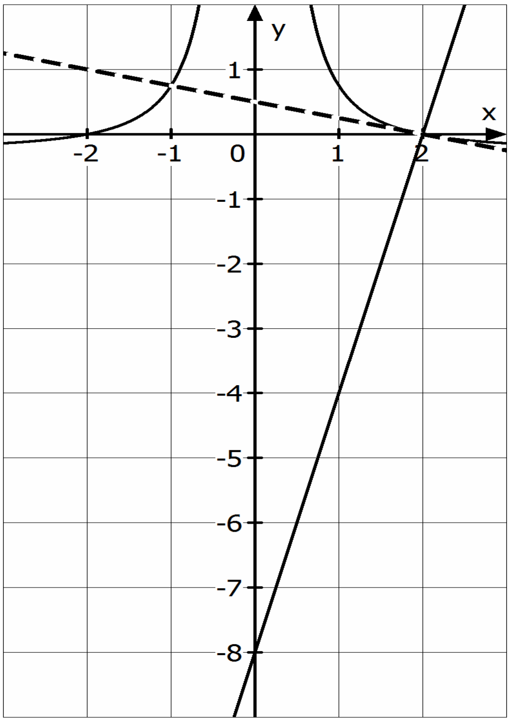



GTR: Es ist a = 1,25 und b = -15 und c = 47,35.

Die Parabelgleichung lautet $g(x) = 1,25x^2 - 15x + 47,35$.

Es gilt $g(6) = 2,35$
Der tiefste Punkt des östlichen Tals befindet sich auf einer Höhe von 235m.

**Aufgabe A 1.2**




Bedingung für Nullstellen von h(x): $h(x) = 0$

GTR: x = -2 und x = 2

Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der y-Achse, da das Schaubild von h(x) symmetrisch zur y-Achse ist.

Die Tangente an das Schaubild von h(x) an der Stelle x = 2 entspricht einer Kreistangente.
Die Verbindungsstrecke vom Mittelpunkt des Kreises zum Berührpunkt N(2/0) steht senkrecht zur Tangente.
Somit liegt die Verbindungsstrecke auf der Normalen an h(x) an der Stelle x = 2.

Ansatz für Normalengleichung: $y = -\frac{1}{h'(2)} \cdot (x-2) + h(2)$

Es gilt h(2) = 0 und $h'(2) = -0{,}25$

Einsetzen der Werte: $y = -\frac{1}{-0{,}25}(x-2) + 0 \Rightarrow y = 4x - 8$

Die Normale schneidet die y-Achse im Punkt M(0/-8) und dies entspricht dem Mittelpunkt des Kreises.