Abiturprüfung Mathematik 2010 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis I 3

Aufgabe I 3:

Ein Segelboot gleitet mit der konstanten Geschwindigkeit 160 $\frac{m}{min}$ an einem ruhenden Motorboot vorbei. Das Motorboot nimmt zu diesem Zeitpunkt Fahrt auf und fährt dem Segelboot hinterher.
Die Geschwindigkeit v(t) des Motorbootes ist für t > 0 stets positiv und wird durch

$$v(t) = 960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t} \; ; \; t \geq 0$$

beschrieben (Zeit t in min seit der Vorbeifahrt, Geschwindigkeit v(t) in $\frac{m}{min}$).

a) Skizzieren Sie das Zeit-Geschwindigkeit-Schaubild des Motorbootes für die ersten fünf Minuten.
Bestimmen Sie die höchste Geschwindigkeit des Motorbootes in diesem Zeitraum.
Wann nimmt die Geschwindigkeit des Motorbootes in diesem Zeitraum am stärksten ab ?
Welche mittlere Geschwindigkeit hat das Motorboot in den ersten fünf Minuten ?
Wie lange fährt das Motorboot in diesem Zeitraum schneller als das Segelboot ?
(6 VP)

b) Wie weit ist das Motorboot nach zwei Minuten gefahren ?
Bestimmen Sie einen Term der Funktion, die den vom Motorboot zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Legt das Motorboot nach diesem Modell mehr als 500 m zurück ?
Zu welchem Zeitpunkt überholt das Motorboot das Segelboot ? (6 VP)

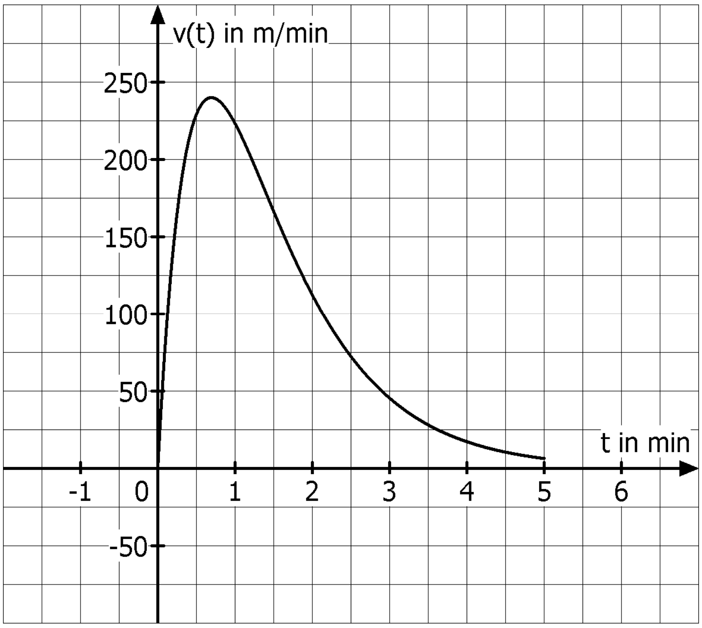
c) Zum Zeitpunkt $t_0 = 2{,}55$ holt das Segelboot das Motorboot wieder ein.
Beide Boote verringern ab diesem Moment ihre Geschwindigkeit.
Ab dem Zeitpunkt t_0 wird die Geschwindigkeit des Motorbootes durch die Tangente an das Schaubild der Funktion v an der Stelle t_0 beschrieben.
Wann kommt das Motorboot zum Stillstand ?

Die Geschwindigkeit des Segelbootes kann ab dem Zeitpunkt t_0 ebenfalls durch eine Gerade beschrieben werden. Das Segelboot kommt am gleichen Ort wie das Motorboot zum Stillstand. Wann kommt das Boot zum Stillstand ? (6 VP)

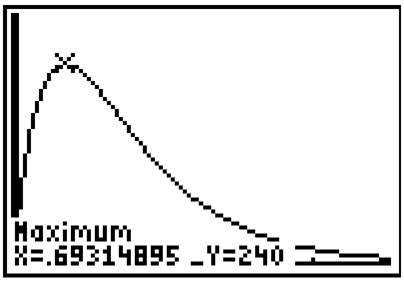
Abiturprüfung Mathematik 2010 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analysis I 3

Aufgabe I 3:

a) Skizze:

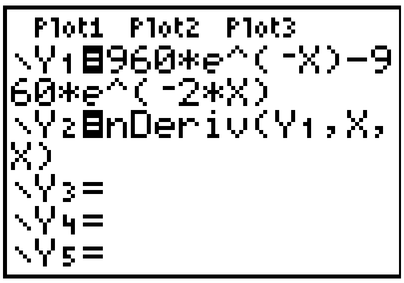


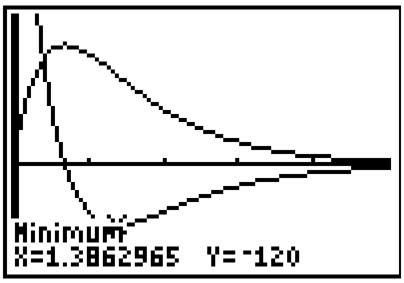
Höchste Geschwindigkeit:



Mit dem GTR ergibt sich, dass nach $t = 0{,}69$ min die maximale Geschwindigkeit $v = 240$ m/min beträgt.

Stärkste Geschwindigkeitsabnahme:
Die Geschwindigkeit nimmt am stärksten ab, wenn $v'(t)$ minimal wird.
Mit dem GTR wird der Tiefpunkt des Schaubildes von $v'(t)$ ermittelt:





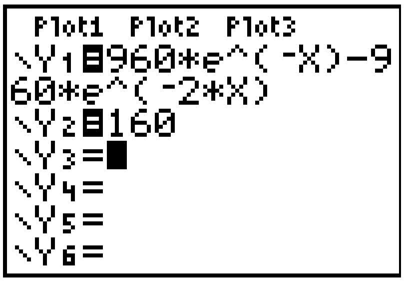
Nach t = 1,39 min nimmt die Geschwindigkeit des Motorbootes am stärksten ab mit einer Verzögerung (negative Beschleunigung) von a = - 120 m/min².
(wobei nach dem Verzögerungswert a nicht gefragt war)

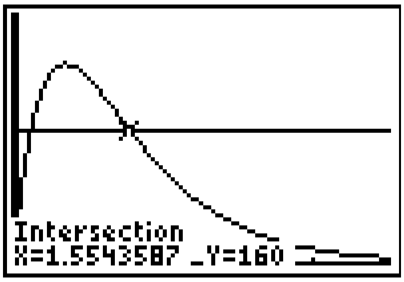
Mittlere Geschwindigkeit:

Es gilt $\overline{v} = \frac{1}{5-0}\int_0^5 v(t)dt \approx 94{,}7$ m/min (GTR).

Die mittlere Geschwindigkeit (Durchschnittsgeschwindigkeit) in den ersten fünf Minuten ist etwa 95 m/min.

Zeitraum, in dem das Motorboot schneller ist:
Skizze der Geschwindigkeitsfunktionen des Motorbootes und des Segelbootes mit dem GTR:





Die Geschwindigkeitsfunktionen der beiden Boote schneiden sich bei t = 0,237 min und t = 1,554 min. Innerhalb dieses Intervalls fährt das Motorboot schneller, da sich sein Schaubild oberhalb der waagrechten Geraden befindet.
Das Motorboot fährt 1,554 – 0,237 = 1,317 min lang schneller als das Segelboot.

b) Fahrstrecke des Motorbootes in den ersten zwei Minuten:

$$\int_0^2 v(t)dt = 358{,}9$$

Das Motorboot ist nach zwei Minuten ca. 359 Meter weit gefahren.

Funktionsterm für den vom Motorboot zurückgelegten Weg:
Der zurückgelegte Weg s(t) wird mit Hilfe einer Stammfunktion von v(t) dargestellt.

Ermittlung einer (allgemeinen) Stammfunktion s(t) von v(t):

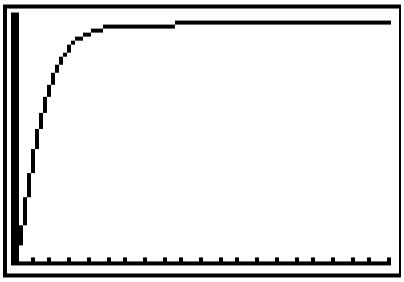
$$s(t) = \frac{960}{-1}\cdot e^{-t} - \frac{960}{-2}\cdot e^{-2t} + C = -960\cdot e^{-t} + 480\cdot e^{-2t} + C$$

Um die konkrete Stammfunktion zu bestimmen, muss noch C ermittelt werden.
Es ist bekannt, dass zum Zeitpunkt t = 0 noch keine Strecke zurückgelegt wurde, das heißt es gilt s(0) = 0.
Daraus folgt: $s(0) = -960 + 480 + C = 0 \Rightarrow C = 480$

Die gesuchte Funktion lautet $s(t) = -960\cdot e^{-t} + 480\cdot e^{-2t} + 480$.

Kontrolle, ob eine Fahrstrecke von mehr als 500 m möglich ist:

Skizze des Schaubildes von s(t) mit dem GTR:

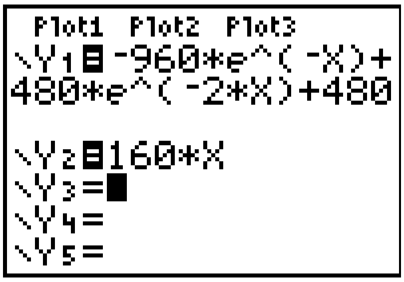


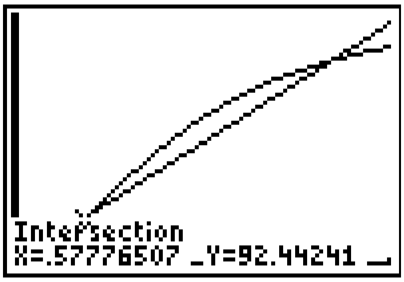
Das Schaubild von s(t) ist streng monoton wachsend.
Für $t \to \infty$ strebt $s(t) \to 480$, da sowohl e^{-t} als auch e^{-2t} gegen 0 streben.

Da 480 < 500 ist, kann das Motorboot nicht mehr als 500 m zurücklegen.

Zeitpunkt, zu dem das Motorboot das Segelboot überholt:
Neben der Wegfunktion s(t) des Motorbootes wird noch die Wegfunktion s*(t) des S Segelbootes benötigt.
Da das Segelboot eine konstante Geschwindigkeit von 160 m/min besitzt, lautet die Wegfunktion $s^*(t) = 160 \cdot t$ (Stammfunktion von $v^*(t) = 160$).

Ermittlung der Schnittpunkte der beiden Funktionen mit dem GTR:





Die erste Schnittstelle befindet sich bei t = 0,58 min. Danach befindet sich das Schaubild von s(t) (Motorboot) oberhalb von s*(t) (Segelboot).
Somit überholt das Motorboot das Segelboot nach 0,58 min.

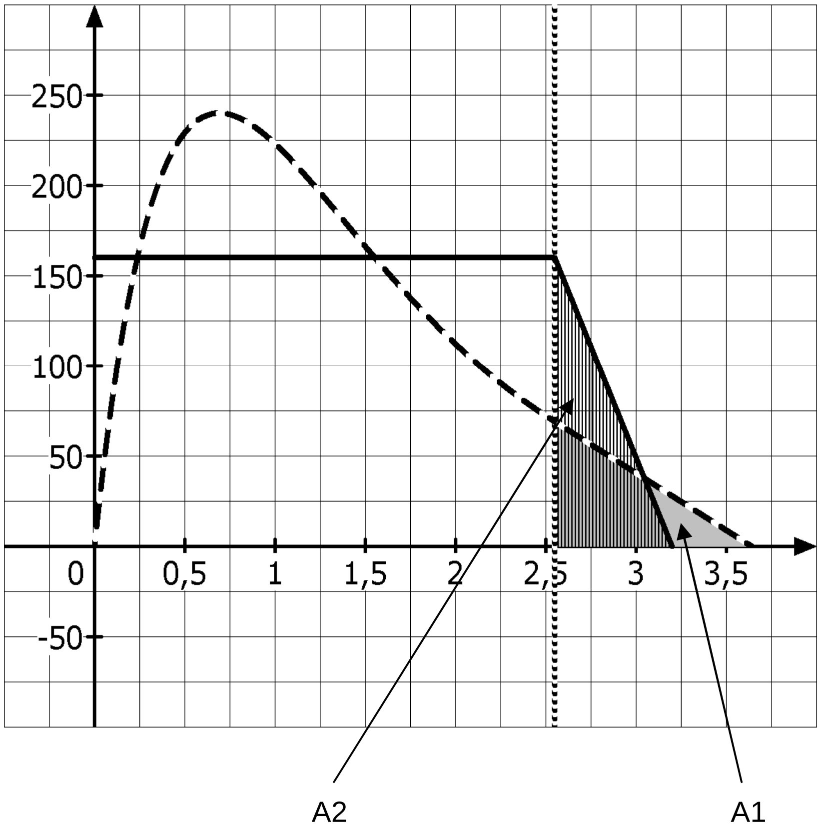
c) Hinweis: Der vorgegebene Zeitpunkt t = 2,55 entspricht der zweiten Schnittstelle der Schaubilder s(t) und s*(t) aus b).

Zunächst muss die Tangentengleichung an das Schaubild von v(t) an der Stelle t = 2,55 aufgestellt werden:
Die Tangente enthält den Punkt P(2,55/v(2,55)) = P(2,55/69,11).
Mit $v'(t) = -960 \cdot e^{-t} + 1920 \cdot e^{-2t}$ folgt $v'(2{,}55) = -63{,}25$
Die Steigung der Tangente beträgt daher m = -63,25.

Aufstellen der Tangentengleichung mit der Punkt-Steigungs-Form:
$y - 69{,}11 = -63{,}25 \cdot (t - 2{,}55) \Rightarrow y = -63{,}25 \cdot t + 230{,}4$

Das Motorboot kommt zum Stillstand, wenn die Tangente die t-Achse schneidet (also wenn die Geschwindigkeit den Wert 0 annimmt):
$0 = -63{,}25 \cdot t + 230{,}4 \Rightarrow t = 3{,}64$ min.

Nach t = 3,64 min kommt das Motorboot zum Stillstand.



Da das Segelboot am gleichen **Ort** wie das Motorboot zum Stillstand kommt, wird zunächst ermittelt, wie viel Meter das Motorboot ab dem Zeitpunkt t = 2,55 min bis zu seinem Stillstand zum Zeitpunkt t = 3,64 min zurücklegt.
Diese Strecke entspricht der Dreiecksfläche A1, die die gestrichelte Tangente mit der x-Achse einschließt.

$A1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (3{,}64 - 2{,}55) \cdot 69{,}11 = 37{,}66$ Meter.

Die Strecke des Segelbottes entspricht der Dreiecksfläche A2, die die Gerade (dicke Linie) mit der x-Achse einschließt.
Da die Strecken gleich sein sollen, muss $A1 = A2$ gelten.

Es gilt $A2 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 160 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot g \cdot 160 = 37{,}66 \Rightarrow g = 0{,}47$.

Da die Grundseite des Dreiecks A2 g = 0,47 lang ist, schneidet die Gerade (dicke Linie) die x-Achse an der Stelle t = 2,55 + 0,47 = 3,02 min.

Das heißt, dass das Segelboot nach etwa 3 min zum Stillstand kommt.