Abiturprüfung Mathematik 2010 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis I 1

Aufgabe I 1.1:

Auf einem ebenen Gelände befindet sich ein geradliniger, 500 m langer Lärmschutzwall. Das Profil seines Querschnittes wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{120}{x^2 + 20} - 2 \text{ und } f(x) \geq 0 \quad \text{(x und f(x) in Meter).}$$

a) Wie breit ist der Wall an seinem Fuß ?
Zeigen Sie, dass der Wall einen symmetrischen Querschnitt besitzt.
Der Wall soll begrünt werden. Um Erosion zu vermeiden, sollte das maximale Gefälle der Böschung nicht größer als 100% sein.
Ist dies beim gegebenen Querschnittsprofil der Fall ? (4 VP)

b) Berechnen Sie das Volumen des Lärmschutzwalls.
Es ist geplant, den Wall auf 3 m Höhe abzutragen, um darauf einen Fahrweg anzulegen.
Welche Breite hätte dieser Fahrweg ?
Das abzutragende Material soll dazu verwendet werden, den abgeflachten Wall zu verlängern. Um wie viel Meter würde er länger ? (6 VP)

c) Statt der Planung aus Teilaufgabe b) wird am ursprünglichen Wall die Erde so abgetragen, dass der Fahrweg seitlich geneigt ist. Sein rechter Rand liegt 0,4 m höher als sein linker Rand. Die Breite des Fahrwegs beträgt 4 m. Bestimmen Sie den Winkel, um den der Fahrweg gegenüber der Horizontalen geneigt ist, auf zwei Dezimalen genau. In welcher Höhe befindet sich der linke Rand des Fahrwegs ? (5 VP)

Aufgabe I 1.2:

Hinweis: ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x$.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für die n-te Ableitung $f^{(n)}$ gilt:

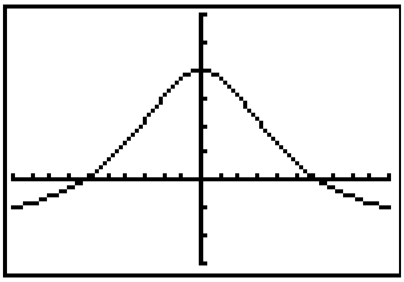
$$f^{(n)}(x) = (x + n) \cdot e^x \ ; \ n \geq 1$$

(3 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2010 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil - Analysis I 1

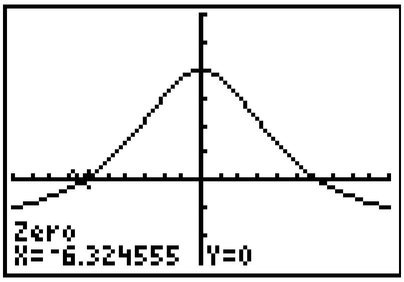
Aufgabe I 1.1:

a) Eine erste Skizze des Schaubildes von f(x) mit dem GTR ergibt:



Da $f(x) \geq 0$ vorausgesetzt ist, stellt nur das Schaubild oberhalb der x-Achse den Querschnitt dar.

Mit dem GTR können die Nullstellen von f(x) ermittelt werden:

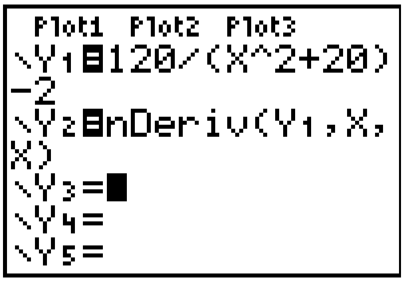


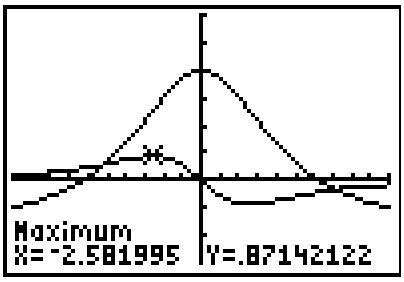
Das Schaubild schneidet die x-Achse bei $x_1 \approx -6{,}32$ und $x_2 \approx 6{,}32$.
Damit beträgt die Breite des Walles an seinem Fuß $2 \cdot 6{,}32 = 12{,}64$ Meter.

Nachweis der Symmetrie:
Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse, denn es gilt:

$$f(-x) = \frac{120}{(-x)^2 + 20} - 2 = \frac{120}{x^2 + 20} - 2 = f(x)$$

Maximales Gefälle:
Da das Schaubild zur y-Achse symmetrisch ist, genügt es, nur eine Seite des Walles zu betrachten.
Das heißt, bei der Berechnung beschränkt man sich z.B. auf den Bereich $x \leq 0$.
Gesucht ist nun die Stelle, bei der die Steigung des Schaubildes von f maximal wird.
Mit Hilfe des GTR wird die Ableitungsfunktion $f'(x)$ skizziert:





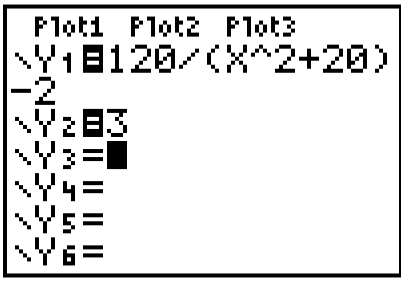
Die Ableitungsfunktion nimmt an der Stelle x = -2,58 einen maximalen Wert von 0,871 an.
Das heißt, dass die maximale Steigung 0,871 = 87,1% beträgt.
Damit ist die Bedingung erfüllt, dass das maximale Gefälle nicht größer als 100% ist.

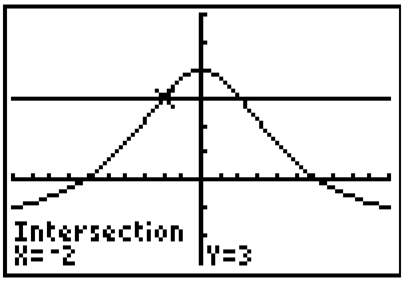
b) Das Volumen des Walles wird ermittelt mit der Formel
$V = A_{\text{Querschnitt}} \cdot 500\text{m}$

mit $A_{\text{Querschnitt}} = \int_{-6,32}^{6,32} f(x)dx = 25,97$ (GTR)

Das Volumen des Walles beträgt $V = 25,97\text{m}^2 \cdot 500\text{m} = 12985\,\text{m}^3$

Um die Breite des Fahrwegs in 3 m Höhe zu bestimmen, werden die Schnittstellen von f(x) mit der Gerade y = 3 mit dem GTR ermittelt:





Die waagrechte Gerade schneidet f(x) bei x = -2 und bei x = 2.
Der Fahrweg ist somit 4 Meter breit.

Berechnung des Volumens V* des abzutragenden Materials:

Querschnittsfläche A* des abzutragenden Materials: $A^* = \int_{-2}^{2} (f(x) - 3)dx = 2,57$ (GTR)

Für das Volumen gilt $V^* = 2,57\text{m}^2 \cdot 500\text{m} = 1284\,\text{m}^3$

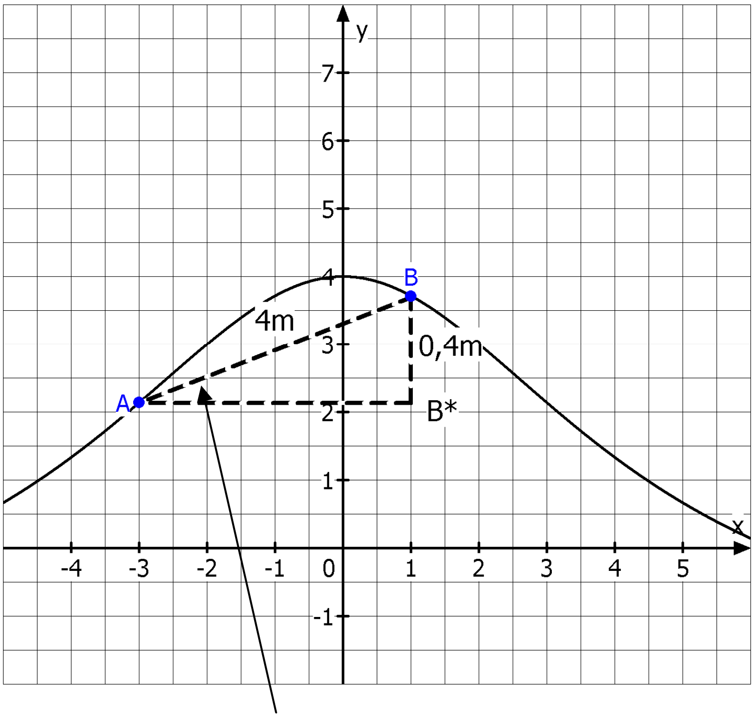
Es müssen 1284 m³ abgetragen werden.

Die übrige Querschnittsfläche beträgt $A_{\text{Querschnitt}} - A^* = 25,97 - 2,57 = 23,40\,\text{m}^2$

Berechnung der zusätzlichen Walllänge: $d = \frac{V^*}{23,40\text{m}^2} = \frac{1284\text{m}^3}{23,40\text{m}^2} = 54,9\text{ m}$

Der Wall würde um 54,9 Meter länger werden.

c) Skizze:



Neigungswinkel α

Hinweis: Das eingezeichnete Dreieck entspricht nicht dem gesuchten Dreieck mit den tatsächlichen Maßen.

Berechnung des Neigungswinkels: $\sin\alpha = \frac{0{,}4}{4} \Rightarrow \alpha = 5{,}74°$

Bestimmung der Höhe des linken Randes (Höhe des Punktes A):

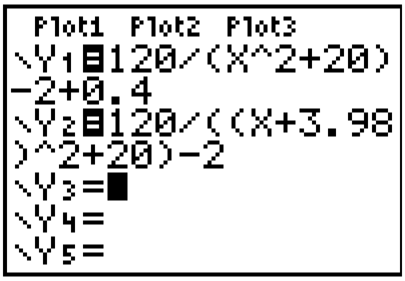
Es gilt $\overline{AB^*} = \sqrt{4^2 - 0{,}4^2} = 3{,}98$ Meter (Satz des Pythagoras)

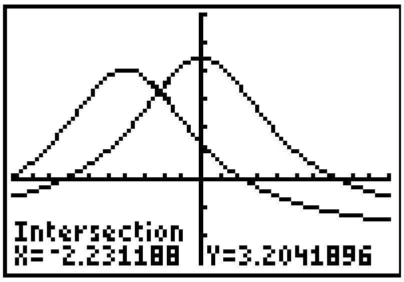
Von den beiden Punkten A und B ist bekannt, dass sie
1.) auf dem Schaubild von f liegen und deren Funktionswerte einen Abstand von 0,4 besitzen.
2.) Einen waagrechten Abstand (Differenz der x-Werte) von 3,98 besitzen.

Berechnung des x-Wertes x_A vom Punkt A:
Ansatz: $f(x_A) + 0{,}4 = f(x_A + 3{,}98)$

$$\Rightarrow \frac{120}{x_A^2 + 20} - 2 + 0{,}4 = \frac{120}{(x_A + 3{,}98)^2 + 20} - 2$$

Die Gleichung wird mit dem GTR gelöst:





Es gilt $x_A = -2{,}231$ und daraus folgt $f(x_A) = 2{,}8$ Meter.

Der linke Rand der Fahrbahn liegt auf einer Höhe von 2,8 Meter.

Aufgabe I 1.2:

1.) **Induktionsanfang:**
Es ist zu zeigen, dass die Aussage für n = 1 gültig ist.
Mit $f(x) = x \cdot e^x$ gilt für die erste Ableitung $f'(x) = x \cdot e^x + 1 \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$
Setzt man n = 1 in die gegebene Formel ein, erkennt man, dass dies stimmt.

2.) **Induktionsschritt:**
a) **Formulierung der Induktionsvoraussetzung:**
Es gibt eine natürliche Zahl n , für die die Funktion $f(x) = x \cdot e^x$ die n-te Ableitung $f^{(n)}(x) = (x+n) \cdot e^x$ besitzt.

b) **Formulierung der Induktionsbehauptung:**
Die Aussage gilt für n+1, das heißt die (n+1)-te Ableitung lautet $f^{(n+1)}(x) = (x+n+1) \cdot e^x$

c) **Beweis des Induktionsschrittes:**
$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left((x+n) \cdot e^x\right)' = 1 \cdot e^x + (x+n) \cdot e^x = e^x \cdot (x+n+1)$

Damit ist die Ausssage für alle natürlichen Zahlen gezeigt.