Hauptprüfung Abiturprüfung 2014 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Wahlteil Analytische Geometrie / Stochastik 2

Hilfsmittel: GTR und Formelsammlung

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

März 2014

Aufgabe B 2.1:

An einer rechteckigen Platte mit den Eckpunkten A(10/6/0), B(0/6/0), C(0/0/3) und D(10/0/3) ist im Punkt F(5/6/0) ein 2 m langer Stab befestigt, der in positive x_3-Richtung zeigt.
Eine punktförmige Lichtquelle befindet sich zunächst im Punkt L(8/10/2).
(Koordinatenangaben in m).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Platte liegt.
Stellen Sie die Platte, den Stab und die Lichtquelle in einem Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Stab und der Platte.
(Teilergebnis E: $x_2 + 2x_3 = 6$)

(3 VP)

b) Der Stab wirft einen Schatten auf die Platte.
Bestimmen Sie den Schattenpunkt des oberen Endes des Stabes.
Begründen Sie, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt.

(3 VP)

c) Die Lichtquelle bewegt sich von L aus auf einer zur x_1x_2-Ebene parallelen Kreisbahn, deren Mittelpunkt das obere Ende des Stabes ist. Dabei kollidiert die Lichtquelle mit der Platte.
Berechnen Sie die Koordinaten der beiden möglichen Kollisionspunkte.

(3 VP)

Aufgabe B 2.2

Bei der Produktion von Bleistiften beträgt der Anteil fehlerhafter Stifte erfahrungsgemäß 5%.

a) Ein Qualitätsprüfer entnimmt der Produktion zufällig 800 Bleistifte.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Stifte in dieser Stichprobe.
Berechnen Sie $P(X \leq 30)$.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht der Wert von X um weniger als 10 vom Erwartungswert von X ab ?

(3 VP)

b) Der Betrieb erwirbt eine neue Maschine, von der behauptet wird, dass höchstens 2% der von ihr produzierten Bleistifte fehlerhaft sind. Diese Hypothese H_0 soll mithilfe eines Tests an 800 zufällig ausgewählten Stiften überprüft werden.
Bei welchen Anzahlen fehlerhafter Stifte entscheidet man sich gegen die Hypothese, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit maximal 5% betragen soll ?

(3 VP)

Lösungen

Aufgabe B 2.1:

a) Koordinatengleichung von E:

Die Parametergleichung der Ebene, in der die Punkte A, B und C liegen, ist

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nun wird der Normalenvektor von E berechnet.

Mit dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren ergibt sich $\vec{n} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix}$

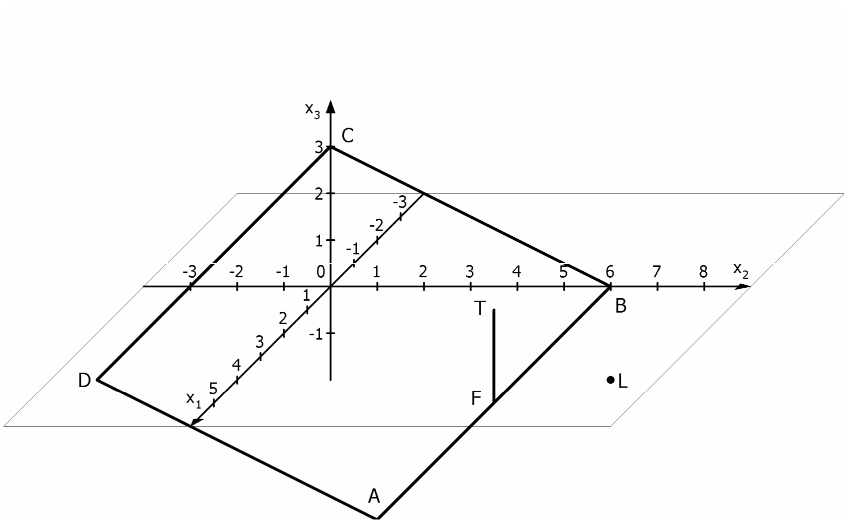
Als Normalenvektor kann $\overrightarrow{n^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gewählt werden.

Ansatz für die Koordinatengleichung: $x_2 + 2x_3 = d$

Einsetzen von A(10/6/0) in die Koordinatengleichung: $6 + 2 \cdot 0 = 6 = d$

Koordinatengleichung von E: $x_2 + 2x_3 = 6$

Anschauliche Darstellung von Platte, Stab und Lichtquelle:



Der Stab FT besitzt den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Winkel zwischen Stab und Platte: $\sin\alpha = \dfrac{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \alpha = 63{,}4°$

b) Das obere Ende des Stabes ist der Punkt T(5/6/2).

Zur Berechnung des Schattenpunktes von T wird eine Gerade durch L(8/10/2) und T aufgestellt.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\10\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}$

Schnittpunkt der Ebene E mit g liefert den Schattenpunkt T*:
$10 - 4s + 2\cdot 2 = 6 \Leftrightarrow s = 2$

Einsetzen von s = 2 in g: T*(2/2/2)

Der Punkt T* liegt als Schnittpunkt von g und E in der Ebene E.
Zu begründen ist, dass T* innerhalb des Rechtecks ABCD liegt.
Die x_1-Koordinate von T* liegt zwischen den x_1-Koordinaten von A und B.
Die x_2-Koordinate von T* liegt zwischen den x_2-Koordinaten von B und C.
Damit liegt T* innerhalb des Rechtecks ABCD (also auf der Platte).
Der Schattenpunkt von F ist F*. Da F auf der Platte liegt, stimmen F und F* überein.
Da sich die Schattenpunkte T* und F* auf der Platte befinden, befindet sich folglich die Schattenstrecke $\overline{T^*F^*}$ auch auf der Platte.

c) Die zur x_1x_2-Ebene parallele Kreisbahn liegt in der Ebene H: $x_3 = 2$, da die Lichtquelle L die x_3-Koordinate 2 besitzt.
Die Kollisionspunkte liegen auf der Schnittgeraden k der Ebenen H und E:

Berechnung der Schnittgeraden k: $\begin{array}{rrcl} x_2 & +2x_3 & = & 6 \\ & x_3 & = & 2 \end{array}$

Aus dem Gleichungssystem folgt $x_3 = 2$, $x_2 = 2$, $x_1 = t$, $t \in \mathbb{R}$

Gleichung der Schnittgeraden: k: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Da die Kollisionspunkte auf der Gerade k liegen, haben diese die allgemeinen Koordinaten $P_s(s/2/2)$.

Der Radius der Kreisbahn beträgt $\left|\overrightarrow{LT}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16+0} = 5$ m.

Nun muss der Parameter s so gewählt werden, dass der Geradenpunkt P_s vom Mittelpunkt T der Kreisbahn den Abstand 5 besitzt: $\overline{TP_s} = 5$

$$\left|\overrightarrow{TP_s}\right| = \left|\begin{pmatrix} s-5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(s-5)^2 + 16}$$

Bedingung: $\sqrt{(s-5)^2 + 16} = 5 \quad \Leftrightarrow (s-5)^2 + 16 = 25 \quad \Leftrightarrow (s-5)^2 = 9$

$\Leftrightarrow s - 5 = \pm 3$

Daraus folgt s = 8 oder s = 2.
(Hinweis: Alternativ kann die Quadratklammer auch aufgelöst und die Lösungsformel für quadratische Gleichungen angewandt werden)

Die beiden Kollisionspunkte haben die Koordinaten $P_2(2\,/\,2\,/\,2)$ und $P_8(8\,/\,2\,/\,2)$

Aufgabe B 2.2:

a) Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit n = 800 und p = 0,05.

$P(X \leq 30) = 0{,}057$ (GTR)

Der Erwartungswert von X ist $E(X) = n \cdot p = 800 \cdot 0{,}05 = 40$.
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(31 \leq X \leq 49)$:

$P(31 \leq X \leq 49) = P(X \leq 49) - P(X \leq 30) = 0{,}9347 - 0{,}057 = 0{,}878$ (GTR)

b) Die Zufallsvariable Y beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Stifte.
Y ist im Extremfall binomialverteilt mit n = 800 und p = 0,02.
Nullhypothese: $p \leq 0{,}02$
Gegenhypothese: $p > 0{,}02$

Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test.
Der Ablehnungsbereich ist $\overline{A} = \{k+1, ..., 800\}$

Gesucht ist der kleinste Wert von k, so dass gilt: $P(Y \geq k+1) \leq 0{,}05$
umgeformt: $1 - P(Y \leq k) \leq 0{,}05$
GTR: $1 - P(Y \leq 22) = 0{,}0564$ und $1 - P(Y \leq 23) \leq 0{,}0351$

Damit ist k = 23.
Der Ablehnungsbereich ist $\overline{A} = \{24, ..., 800\}$

Bei mindestens 24 fehlerhaften Stiften entscheidet man sich gegen die Nullhypothese.