Pflichtteilaufgaben zu Gegenseitige Lage, Abstand,…

Baden-Württemberg

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

September 2016

Abituraufgaben (Haupttermin)

Aufgabe 1: (Abiturprüfung 2016)

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Untersuchen Sie, ob es einen Punkt auf g gibt, dessen drei Koordinaten identisch sind.
b) Die Gerade h verläuft durch Q(8/5/10) und schneidet g orthogonal.
Bestimmen Sie eine Gleichung von h.

Aufgabe 2: (Abiturprüfung 2016)

Gegeben ist die Ebene E: $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 28$.
Es gibt zwei zu E parallele Ebenen F und G, die vom Ursprung den Abstand 2 haben.
Bestimme jeweils eine Gleichung von F und G.

Aufgabe 3: (Abiturprüfung 2015)
Gegeben sind die drei Punkte A(4/0/4), B(0/4/4) und C(6/6/2).
a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm ergänzt. Veranschaulichen Sie durch eine Skizze, wie viele solcher Punkte es gibt.

Aufgabe 4: (Abiturprüfung 2014)
Gegeben sind die Punkte A(1/10/1), B(-3/13/1) und C(2/3/1).
Die Gerade g verläuft durch A und B.
Bestimmen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden g.

Aufgabe 5: (Abiturprüfung 2013)
Gegeben sind die beiden Ebenen

E_1: $2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$ und E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass die beiden Ebenen parallel zueinander sind.
Die Ebene E_3 ist parallel zu E_1 und E_2 und hat von beiden Ebenen denselben Abstand.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_3.

Aufgabe 6: (Abiturprüfung 2013)
Die Gerade g verläuft durch die Punkte A(1/-1/3) und B(2/-3/0).
Die Ebene E wird von g orthogonal geschnitten und enthält den Punkt C(4/3/-8).
Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E.
Untersuchen Sie, ob S zwischen A und B liegt.

Aufgabe 7: (Abiturprüfung 2012)

Gegeben sind die Ebene E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ und F: $x_2 + 2x_3 = 8$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden.

Aufgabe 8: (Abiturprüfung 2012)

Gegeben sind der Punkt A(1/1/3) und die Ebene E: $x_1 - x_3 - 4 = 0$.

a) Welche besondere Lage hat E im Koordinatensystem ?
b) Der Punkt A wird an der Ebene E gespiegelt.
   Bestimmen Sie die Koordinaten des Bildpunktes.

Aufgabe 9: (Abiturprüfung 2011)

Gegeben sind die Ebenen E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass E und g parallel zueinander sind.
b) Bestimmen Sie den Abstand von E und g.

Aufgabe 10: (Abiturprüfung 2010)

Gegeben sind die Punkte A(2/4/1), B(0/2/-1), C(4/-2/1) und D(-1/9/0).
Überprüfen Sie, ob dieser vier Punkte in einer Ebene liegen.

Aufgabe 11: (Abiturprüfung 2010)

Gegeben sind die Ebene E: $3x_1 - 4x_3 = -7$ und der Punkt P(9/-4/1).

a) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.
b) Der Punkt S(-1/1/1) liegt auf E.
   Bestimmen Sie den Punkt Q auf der Geraden durch ,S und P, der genauso weit von E entfernt ist wie P.

Aufgabe 12: (Abiturprüfung 2009)

Gegeben sind die Ebene E: $x_1 + x_2 = 4$ und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Veranschaulichen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem.
b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.
c) Bestimmen Sie den Abstand des Ursprungs von der Ebene E.

Aufgabe 13: (Abiturprüfung 2008)

Gegeben sind die zwei parallelen Geraden g und h durch

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},\quad h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix};\quad s,t \in R$$

Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden.

Aufgabe 14: (Abiturprüfung 2008)

Die Ebene E geht durch die Punkte A(1,5/0/0), B(0/3/0) und C(0/0/6).

Untersuchen Sie, ob die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $t \in R$ parallel zur Ebene E verläuft.

Aufgabe 15: (Abiturprüfung 2007)

Gegeben sind die Ebenen E und F mit

$$E:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ r,s \in \mathbb{R}$$

$$F:\quad \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Zeigen Sie, dass die Ebenen E und F parallel sind.
Bestimmen Sie den Abstand der Ebenen.

Aufgabe 16: (Abiturprüfung 2006)

Gegeben sind die Ebene E: $-2x_1 + x_2 - 2x_3 + 15 = 0$ und

die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

a) Zeigen Sie, dass g zu E parallel ist.
b) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden g von der Ebene E.

Aufgabe 17: (Abiturprüfung 2005)

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die den Punkt A(2/-1/-2) und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in R$ enthält.

Aufgabe 18: (Abiturprüfung 2004)

Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E durch g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

und E: $4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11$.
Prüfen Sie nach, ob der Punkt A(3/0/2) auf der Geraden g liegt.
Zeigen Sie: Die Gerade g ist orthogonal zur Ebene E.
Bestimmen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes der Ebene E, welcher vom Punkt A den kleinsten Abstand hat.

Lösungen

Aufgabe 1:

a) Es ist zu prüfen, ob ein Punkt der Gestalt P(p / p / p) auf g liegt.

$$\begin{pmatrix} p \\ p \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und daraus folgt} \quad \begin{array}{lcll} p & = & 3 & +r \\ p & = & & 4r \\ p & = & 1 & +3r \end{array}$$

Setze p = 4r in die erste Zeile ein: $4r = 3 + r \Rightarrow 3r = 3 \Rightarrow r = 1$
Daraus folgt $p = 4 \cdot 1 = 4$

Test, ob die dritte Zeile stimmt: $4 = 1 + 3 \cdot 1$ ist wahr.

Damit liegt der Punkt P(4/4/4) für r = 1 auf der Gerade g.

b) Um die Gleichung der Gerade h zu erhalten, benötigt man die Koordinaten des Lotfußpunktes L, wenn man vom Punkt Q aus ein Lot auf die Gerade h fällt.

Man geht so vor, wie wenn man den Abstand des Punktes Q von der Gerade g bestimmen möchte.

Der allgemeine Lotfußpunkt auf g besitzt die Koordinaten $L(3 + r \,/\, 4r \,/\, 1 + 3r)$.

Der Vektor $\overrightarrow{QL} = \begin{pmatrix} -5 + r \\ 4r - 5 \\ -9 + 3r \end{pmatrix}$ steht orthogonal auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Bedingung: $\begin{pmatrix} -5 + r \\ 4r - 5 \\ -9 + 3r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -5 + r + 4 \cdot (4r - 5) + 3 \cdot (-9 + 3r) = 0$

$\Rightarrow -5 + r + 16r - 20 - 27 + 9r = 0 \Rightarrow 26r = 52 \Rightarrow r = 2$

Der Lotfußpunkt hat die Koordinaten L(5/8/7).

Die gesuchte Gerade h verläuft durch Q(8/5/10) und L(5/8/7).

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2:

Eine zu E parallele Ebene hat die Gleichung F: $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = c$

Hesse'sche Normalenform der Ebene F: $\frac{4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - c}{\sqrt{16+16+49}} = 0$

Gesucht ist der Wert von c, so dass gilt: d(O, F) = 2 mit O(0/0/0).

$$d(O,F) = \left|\frac{-c}{9}\right| = 2$$

1.Fall: $\frac{-c}{9} = 2 \Rightarrow c = -18$ also F: $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -18$

2.Fall: $\frac{-c}{9} = -2 \Rightarrow c = 18$ also G: $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 18$

Aufgabe 3:

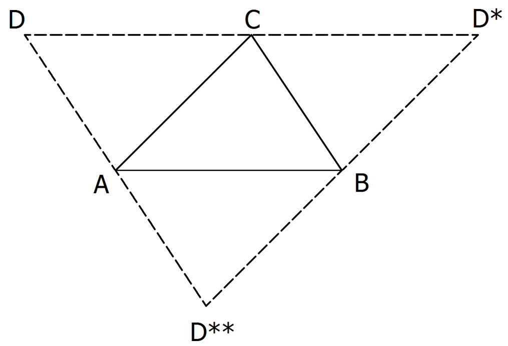
a) Berechnung der Seitenlängen des Dreiecks:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16+16+0} = \sqrt{32}$ $\qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{36+4+4} = \sqrt{44}$

Da zwei der drei Seiten gleich lang sind, ist das Dreieck gleichschenklig.

b) Skizze:



Es gibt drei solcher Punkte.

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{also D(10/2/2)}$$

$$\overrightarrow{OD^*} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{also D*(2/10/2)}$$

$$\overrightarrow{OD^{**}} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{also D**(-2/-2/6)}$$

Aufgabe 4:

Zunächst benötigt man die Gleichung der Geraden g.

Es ist g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zur Berechnung des Abstandes von g zu Punkt C(2/3/1) benötigt man eine Hilfsebene H.
Diese Hilfsebene steht orthogonal zur Geraden g und enthält den Punkt C.
Der Normalenvektor von H ist der Richtungsvektor von g.

Normalenform von H: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Koordinatengleichung von H: $-4x_1 + 3x_2 = 1$

Der Schnittpunkt von g mit H ergibt den Lotfußpunkt F:

$$-4(1-4s) + 3(10+3s) = 1 \quad \Leftrightarrow -4 + 16s + 30 + 9s = 1 \quad \Leftrightarrow s = -1$$

Einsetzen von s = -1 in die Gerade ergibt den Lotfußpunkt F(5/7/1).

Abstand von g zu C = $\overline{CF} = \left|\overrightarrow{CF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16+0} = 5$ LE

Aufgabe 5:

Der Normalenvektor von E_1 lautet $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Ebene E_2 ist parallel zur Ebene E_1, wenn $\overrightarrow{n_1}$ auch ein Normalenvektor von E_2 ist.
Dies ist dann der Fall, wenn der Vektor $\overrightarrow{n_1}$ orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren der Ebene E_2 ist.

Kontrolle: $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 - 6 + 4 = 0$

Damit ist die Orthogonalität gezeigt. Somit sind die beiden Ebenen parallel.

Da die Ebene E_3 parallel zu den beiden anderen Ebenen sein soll, kann für diese Ebene auch der Normalenvektor $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gewählt werden.

Um die Gleichung von E_3 aufzustellen, wird noch ein Punkt dieser Ebene bestimmt werden.

Ein (beliebiger) Punkt von E_1 lautet A(0/0/-1).
Ein (beliebiger) Punkt von E_2 lautet B(7/7/5).

Der Mittelpunkt M der Strecke AB liegt auf der Ebene E_3.

Berechnung von M: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$, also M(3,5/3,5/2)

Eine Gleichung von E_3 lautet $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

Aufgabe 6:

Gleichung der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

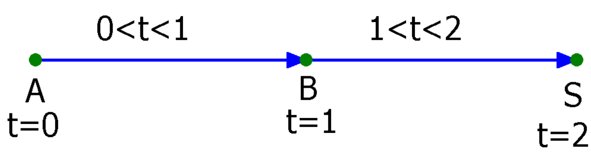
Gleichung der Ebene E.
Da die Gerade g orthogonal zu E verläuft, ist der Normalenvektor von E der Richtungsvektor von g: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = d$
Einsetzen des Ebenenpunktes C(4/3/-8): $4 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-8) = 22$ und damit ist d = 22
Koordinatengleichung von E: $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 22$

Schnittpunkt S von g und E:
$(1+t) - 2(-1-2t) - 3(3-3t) = 22 \quad \Rightarrow 1 + t + 2 + 4t - 9 + 9t = 22 \quad \Rightarrow 14t - 6 = 22$
$\Rightarrow t = 2$

Einsetzen von t = 2 in die Geradengleichung liefert den Schnittpunkt S(3/-5/-3).

Kontrolle, ob der Punkt S zwischen A und B liegt:
Die Parameterform von g ist so aufgebaut: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$
Da der Schnittpunkt S für t = 2 erreicht wird, gilt $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB}$



Damit der Punkt S zwischen A und B liegt, müsste der Parameter t zwischen 0 und 1 liegen.
Da t = 2 ist, liegt der Punkt S nicht zwischen A und B.

Aufgabe 7:
Zur Ermittlung der Schnittgeraden wird die Ebene E als Koordinatengleichung geschrieben.

E: $4x_1 - x_2 + 2x_3 = d$
Einsetzen von P(1/2/1) ergibt $4 - 2 + 2 = 4 = d$
Daraus folgt: E: $4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$

Berechnung der Schnittgeraden der beiden Ebenen:

Hierzu löst man folgendes Gleichungssystem: $\begin{array}{rrrcl} 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 4 \\ & x_2 & +2x_3 & = & 8 \end{array}$

Setze $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$
Aus der 2.Zeile folgt: $x_2 + 2t = 8 \Rightarrow x_2 = -2t + 8$
Aus der 1.Zeile folgt: $4x_1 - (-2t + 8) + 2t = 4 \Rightarrow 4x_1 = 12 - 4t \Rightarrow x_1 = 3 - t$

Mit den Lösungen kann man nun die Gleichung der Schnittgerade g aufstellen:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3-t \\ -2t+8 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8:

a) Der Normalenvektor der Ebene E lautet $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die zweite Koordinate des Normalenvektors (und damit das „Fehlen“ der Variable x_2 in der Koordinatengleichung zeigt, dass die Ebene E parallel zur x_2-Achse ist.
Da zum Beispiel der Punkt P(0/1/0) nicht auf E liegt, wie man durch eine Punktprobe zeigen kann, liegt die x_2-Achse nicht in der Ebene E, sondern ist „echt parallel“ zu ihr.

b) Zur Ermittlung des Bildpunktes wird eine Hilfsgerade h aufgestellt, die senkrecht zu E (Richtungsvektor von h ist Normalenvektor von E) und durch den Punkt A verläuft:

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schnitt der Gerade h mit der Ebene E ergibt den Lotfußpunkt L:
$1 + r - (3 - r) - 4 = 0 \Rightarrow -6 + 2r = 0 \Rightarrow r = 3$
Einsetzen von r = 3 in die Geradengleichung ergibt L(4/1/0).

Berechnung des Bildpunktes A*: $\overrightarrow{OA^*} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AL} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die Koordinaten des Bildpunktes lauten A*(7/1/-3).

Aufgabe 9:

a) E und g sind parallel, wenn der Normalenvektor von E und der Richtungsvektor von g orthogonal zueinander sind.

Es gilt $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 - 4 - 4 = 0$ und damit sind die Vektoren orthogonal zueinander.

b) Der Abstand von E und g wird dadurch bestimmt, dass der Abstand des Geradenpunktes P(7/5/-7) zur Ebene E ermittelt wird.

Ebenengleichung als Koordinatengleichung: $8x_1 + x_2 - 4x_3 = d$
Punktprobe mit Ebenenpunkt B(-1/4/-3) ergibt $8 \cdot (-1) + 4 - 4 \cdot (-3) = 8 = d$
E: $8x_1 + x_2 - 4x_3 = 8$

HNF von E: $\dfrac{8x_1 + x_2 - 4x_3 - 8}{\sqrt{64 + 1 + 16}} = 0$

Einsetzen von P in die HNF von E: $d = \left| \dfrac{8 \cdot 7 + 5 - 4 \cdot (-7) - 8}{9} \right| = 9$

Die Gerade von der Ebene den Abstand 9.

Aufgabe 10:

Zunächst wird anhand der 3 Punkte A, B und C die Parameterform einer Ebenengleichung aufgestellt:

E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nun wird mit Hilfe einer Punktprobe geprüft, ob der Punkt D auf dieser Ebene liegt.

$$\begin{pmatrix}-1\\9\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\0\end{pmatrix}$$

Aus der 3.Zeile folgt t = 0,5.
Aus der 2.Zeile folgt: $9=4+0{,}5\cdot(-2)-6r \Rightarrow r=-1$
Kontrolle mit 1.Zeile: $-1=2+0{,}5\cdot(-2)+(-1)\cdot 2$ liefert eine wahre Aussage.

Damit liegt der Punkt D in der Ebene E.
Alle vier Punkte liegen somit in einer Ebene.

Hinweis:
Man hätte die Aufgabe auch anders lösen können:
Die vier Punkte A,B,C,D liegen in einer Ebene wenn die drei Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ linear abhängig sind. Wenn die Vektoren linear unabhängig sind, liegen sie nicht in einer Ebene.

Aufgabe 11:

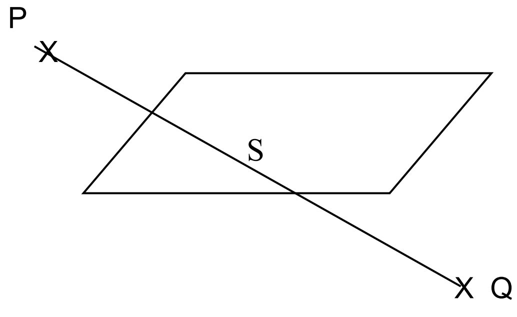
a) Aufstellen der Hesseschen Normalform von E: $\frac{3x_1-4x_3+7}{\sqrt{3^2+4^2}}=0$

bzw. E: $\frac{3x_1-4x_3+7}{5}=0$

Der Abstand von P zu E berechnet sich mit $d=\left|\frac{3\cdot 9-4\cdot 1+7}{5}\right|=6$.

Der Punkt P hat von der Ebene E den Abstand d = 6.

b)



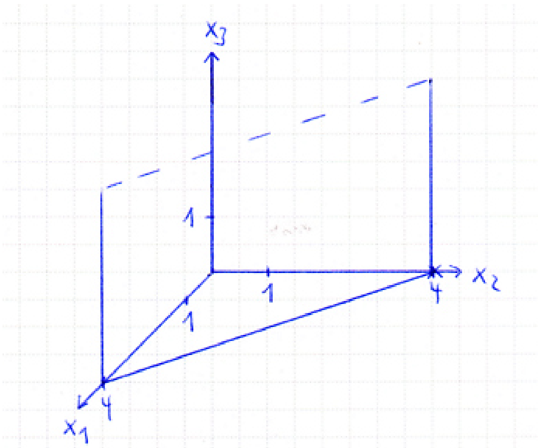
Zur Ermittlung der Koordinaten von Q muss die Geradengleichung nicht aufgestellt werden.

Es gilt $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Koordinaten von Q lauten Q(-11/6/1).

Aufgabe 12:

a) Zur Veranschaulichung der Ebene müssen die Durchstoßpunkte von E mit den Koordinatenachsen berechnet werden:
Schnittpunkt mit der x_1-Achse: $S_{x_1}(x_1/0/0) \Rightarrow S_{x_1}(4/0/0)$
Schnittpunkt mit der x_2-Achse: $S_{x_2}(0/x_2/0) \Rightarrow S_{x_2}(0/4/0)$
Schnittpunkt mit der x_3-Achse: $S_{x_3}(0/0/x_3)$:
Dies führt auf den Widerspruch 0 = 4. Das heißt, dass dieser Schnittpunkt nicht existiert.
Die Ebene E ist parallel zur x_3-Achse.



b) Zur Ermittlung der gegenseitige Lage der Gerade und der Ebene wird der Schnittpunkt von g und E berechnet.
Einsetzen der Zeilen der Parameterform von g in die Koordinatengleichung von E:

$$(1+r)+(3-r)=4 \Leftrightarrow 4=4$$

Diese Gleichung besitzt unendlich viele Lösungen. Dies bedeutet, dass die Gerade g in der Ebene E liegt.

c) Hesse'sche Normalform von E: $\frac{x_1 + x_2 - 4}{\sqrt{2}} = 0$

Einsetzen des Ursprungs in die HNF ergibt den Abstand $d(O,E) = \left| \frac{0+0-4}{\sqrt{2}} \right| = \frac{4}{\sqrt{2}}$

Aufgabe 13:

Der Abstand der beiden Geraden ergibt sich aus dem Abstand des Punktes P(2/9/4) auf der Geraden g von der Geraden h.

Aufstellen der Hilfsebene E, die den Punkt P enthält und senkrecht auf h steht:
E: $6x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -52$

Schnitt der Ebene E mit der Geraden h:
$6(1+6t) - 8(2-8t) + 2(5+2t) = -52$
$\Rightarrow 6 + 36t - 16 + 64t + 10 + 4t = -52 \Rightarrow 104t = -52 \Rightarrow t = -0{,}5$
Schnittpunkt S(-2/6/4)

Der Abstand des Punktes S von P entspricht dem Abstand der beiden Geraden:

$$d(g,h) = \left|\overrightarrow{SP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+9+0} = 5$$

Aufgabe 14:

Da die Durchstoßpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen gegeben sind, kann die Koordinatengleichung direkt aufgestellt werden:

E: $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$

(andere Möglichkeit: Aufstellen der Parameterform und Umwandeln in die Koordinatengleichung)

Die Gerade ist parallel zur Ebene E, wenn die Gerade und die Ebene keinen Schnittpunkt besitzt:

Berechnung des Schnittpunktes:
$4(-4-2t) + 2(2+3t) + (3+2t) = 6$
$\Rightarrow -16 - 8t + 4 + 6t + 3 + 2t = 6 \Rightarrow -9 = 6$
Dies ist ein Widerspruch, also existiert kein Schnittpunkt.
Damit ist die Gerade g parallel zur Ebene E.

Aufgabe 15:

Die Ebene E liegt in Parameterform vor, die Ebene F in Normalenform.
Zur Kontrolle, ob die Ebenen E und F parallel sind muss geprüft werden, ob die beiden Richtungsvektoren der Ebene E orthogonal auf dem Normalenvektor der Ebene F liegen.

Es gilt: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 + 0 - 2 = 0$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 + 2 + 0 = 0$

Da sich jeweils als Skalarprodukt der Wert 0 ergibt, ist die Orthogonalität zwischen dem Normalenvektor von F und den Richtungsvektoren von E gezeigt. Also sind E und F parallel.

Der Abstand der beiden Ebenen entspricht dem Abstand des Punktes P(1/1/0), der auf der Ebene E liegt, von der Ebene F.
Dieser Abstand wird mithilfe der Hesse-Normalform ermittelt.

Umformung von F als Koordinatengleichung: F: $2x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$

HNF von F: $\frac{2x_1 + 2x_2 - x_3 - 8}{3} = 0$

Abstand P von F: $d(P,F) = \left| \frac{2 + 2 - 8}{3} \right| = \frac{4}{3}$

Aufgabe 16:

a) Berechnung des Schnittpunktes von g mit E:

$-2(2+t) + (-16+4t) - 2(2+t) + 15 = 0 \Leftrightarrow -4 - 2t - 16 + 4t - 4 - 2t + 15 = 0$
$\Leftrightarrow -9 = 0$

Es handelt sich um einen Widerspruch, also besitzt die Gerade g und die Ebene E keine gemeinsamen Punkte. Somit müssen sie parallel sein.

(Eine andere Möglichkeit wäre, die Orthogonalität des Normalenvektors von E und des Richtungsvektors von g nachzuweisen. Anschließend müsste noch gezeigt werden, dass die Gerade g nicht in der Ebene E enthalten sein kann, z.B. durch Prüfung, dass der Geradenpunkt P(2/-16/2) nicht in E enthalten ist).

b) Der Abstand der Geraden g von E kann dadurch berechnet werden, dass man einen beliebigen Punkt P der Gerade g wählt und dessen Abstand zur Ebene E ermittelt.
Der Punkt sei P(2/-16/2) (Ortsvektor von g).

Berechnung der Hesse'sche Normalenform von E: $-2x_1 + x_2 - 2x_3 + 15 = 0$

Es gilt $|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1+4} = 3$. HNF von E: $\frac{-2x_1 + x_2 - 2x_3 + 15}{3} = 0$

$d(P,E) = \left|\frac{-2\cdot 2 + (-16) - 2\cdot 2 + 15}{3}\right| = 3$

Der Abstand von P zu E und damit auch von g zu E beträgt 3 Längeneinheiten.

Aufgabe 17:

Da die Gerade in der Ebene E liegt, kann sowohl der Ortsvektor als auch der Richtungsvektor der Geradengleichung für die Ebene übernommen werden.
Der zweite Richtungsvektor der Ebene ergibt sich aus dem Verbindungsvektor des Punktes A(2/-1/-2) und des Geradenpunktes B(3/3/1), also $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Umwandlung in Koordinatenform:

Berechnung des Normalenvektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ mit $\vec{n}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

Daraus ergibt sich das LGS:

$$\begin{aligned} n_1 + 4n_2 + 3n_3 &= 0 \\ 3n_1 + \quad\quad + 1n_3 &= 0 \end{aligned}$$

Das LGS besitzt unendlich viele Lösungen, es genügt, eine Lösung zu finden.

Setze hierzu z.B. $n_1 = 1$, dann ergibt sich $n_3 = -3$ und $n_2 = 2$, also $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Der Ansatz für die Ebenengleichung lautet E: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = c$
Den Wert von c erhält man, wenn man den gegeben Punkt B(3/3/1) in die Ebene einsetzt:
$1\cdot 3 + 2\cdot 3 - 3\cdot 1 = 6$, also E: $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$

Aufgabe 18:
Um zu prüfen, ob der Punkt A auf g liegt, wird eine Punktprobe durchgeführt:

$$\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Aus 3.Zeile: $2 = 0 + 2t \Rightarrow t = 1$
Aus 2.Zeile: $0 = 1 - t \Rightarrow t = 1$
Aus 1.Zeile: $3 = 1 + 2t \Rightarrow t = 1$

Alle 3 Zeilen liefern den gleichen Parameterwert, also liegt A(3/0/2) auf g.

g ist orthogonal zu E, wenn der Richtungsvektor von g ein Vielfaches des Normalenvektors von E ist.

Richtungsvektor von g = $\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}$

Da $\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ ist, sind die Vektoren Vielfache zueinander und somit sind g und E zueinander orthogonal.

Der Punkt auf E, welcher vom Punkt A den kleinsten Abstand hat, ist der so genannte Lotfußpunkt auf E. Hierzu stellt man die Gleichung einer Hilfsgeraden h auf, die durch A verläuft und orthogonal auf E steht. Die Hilfsgerade entspricht bereits der angegebenen Geraden g, da g wie oben gezeigt genau diese beiden Eigenschaften besitzt.

Anschließend wird diese Hilfsgerade mit der Ebene geschnitten, damit erhält man den Lotfußpunkt.

Schnitt von g mit E: $4(1+2t) - 2(1-t) + 4\cdot 2t = 11 \Leftrightarrow 18t = 9 \Leftrightarrow t = 0{,}5$

Einsetzung des t-Wertes in die Geradengleichung ergibt als Lotfußpunkt S(2/0,5/1).

S ist der Punkt auf E, der von A den kleinsten Abstand hat.