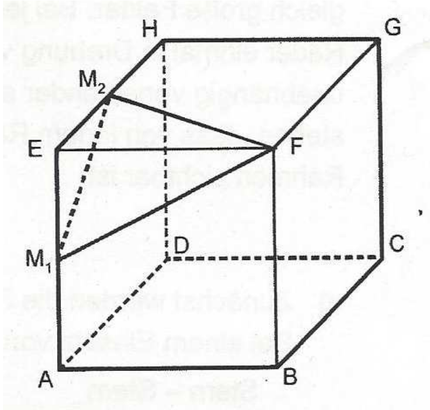
Abiturprüfung Mathematik 2013 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analytische Geometrie / Stochastik B 2

Aufgabe B 2.1

In einem würfelförmigen Ausstellungsraum mit der Kantenlänge 8 Meter ist ein dreieckiges Segeltuch aufgespannt. Es ist im Punkt F sowie in den Kantenmitten M_1 und M_2 befestigt (siehe Abbildung).
Es wird angenommen, dass das Segeltuch nicht durchhängt.
In einem Koordinatensystem stellen die Punkte A(8/0/0), C(0/8/0) und H(0/0/8) die entsprechenden Ecken des Raumes dar.



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt.
Zeigen Sie, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Segeltuchs.
Welchen Abstand hat das Segeltuch von der Ecke E ?
(Teilergebnis: S: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24$)

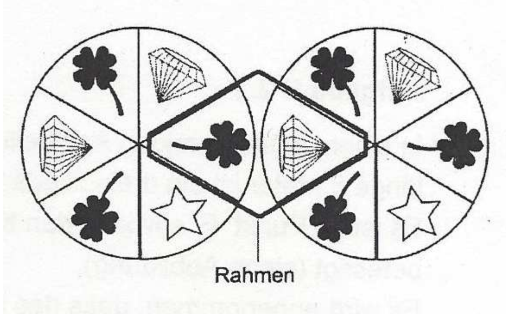
(6 VP)

b) Auf der Diagonalen AC steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden.
Das obere Ende der Stange berührt das Segeltuch.
In welchem Punkt befindet sich das untere Ende der Stange ?

(3 VP)

Aufgabe B2.2

Auf zwei Glücksrädern befinden sich jeweils sechs gleich große Felder.
Bei jedem Spiel werden die Räder einmal in Drehung versetzt . Sie laufen dann unabhängig voneinander aus und bleiben so stehen, dass von jedem Rad genau ein Feld im Rahmen sichtbar ist.



a) Zunächst werden die Räder als ideal angenommen.
Bei einem Einsatz von 0,20 € sind folgende Auszahlungen vorgesehen:

Stern – Stern	2,00 €
Diamant – Diamant	0,85 €
Kleeblatt – Kleeblatt	0,20 €

In allen anderen Fällen wird nichts ausbezahlt.
Weisen Sie nach, dass das Spiel fair ist.
Nun möchte der Veranstalter auf lange Sicht pro Spiel 5 Cent Gewinn erzielen.
Dazu soll nur der Auszahlungsbetrag für „Diamant – Diamant“ geändert werden.
Berechnen Sie diesen neuen Auszahlungsbetrag. (3 VP)

b) Es besteht der Verdacht, dass die Wahrscheinlichkeit p für „Stern – Stern“ geringer als $\frac{1}{36}$ ist. Daher soll ein Test mit 500 Spielen durchgeführt werden. Formulieren Sie die Entscheidungsregel für die Nullhypothese $H_0: p \geq \frac{1}{36}$, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens 5% betragen soll. (3 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2013 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analytische Geometrie / Stochastik B 2

Aufgabe B 1.1

a) Die Ebene S enthält die Punkte F(8/8/8), $M_1(8/0/4)$ und $M_2(4/0/8)$.

Parametergleichung der Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Berechnung des Normalenvektors: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \cdot 0 - (-8) \cdot (-4) \\ -4 \cdot (-4) - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-8) - (-4) \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 16 \\ -32 \end{pmatrix}$

Da auch jeder vielfache Vektor als Normalenvektor verwendet werden kann,

wird als Normalenvektor $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ genutzt.

Ansatz für die Koordinatengleichung von $S: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = d$.
Einsetzen des Punktes F(8/8/8) ergibt $2 \cdot 8 - 8 + 2 \cdot 8 = 24 = d$,

Koordinatengleichung von S: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24$

b) Das Dreieck M_1FM_2 ist gleichschenklig, wenn zwei der drei Seiten gleich lang sind.

Länge von M_1F: $\left|\overrightarrow{M_1F}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$

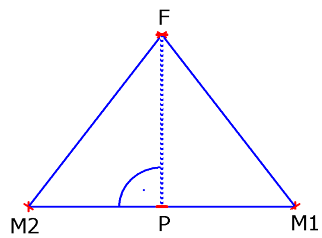
Länge von M_2F: $\left|\overrightarrow{M_2F}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2 + 8^2 + 0^2} = \sqrt{80}$

Da $\overline{M_1F} = \overline{M_2F}$ ist, ist das Dreieck M_1FM_2 gleichschenklig.

Flächeninhalt des Segeltuches:

$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{PF}$

$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{32}$



Der Mittelpunkt P der Strecke $\overline{M_1M_2}$ besitzt die Koordinaten

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix} \quad \text{also P(6/0/6).}$$

$$\left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+8^2+2^2} = \sqrt{72}$$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{32}\cdot\sqrt{72} = 24$$

Die Fläche des Segeltuches beträgt 24 m².

Der Abstand des Segeltuches von der Ecke E entspricht dem Abstand der Ebene S vom Punkt E(8/0/8).
Dies wird mit der Hesseschen Normalenform der Ebene S berechnet:

HNF von S: $\frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 24}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = 0$ bzw. $\frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 24}{3} = 0$

Einsetzen von E(8/0/8) in die HNF: $d = \left|\frac{2\cdot 8 - 0 + 2\cdot 8 - 24}{3}\right| = \frac{8}{3}$

Das Segeltuch ist etwa 2,7 Meter von der Ecke E entfernt.

b) Gleichung der Gerade durch A(8/0/0) und C(0/8/0) : g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix}$

Diese Gerade wird nun parallel um 6 nach oben verschoben.
Dies erreicht man damit, dass der Richtungsvektor gleich bleibt und beim Ortsvektor die x_3 -Koordinate um 6 erhöht wird.

Parallele Gerade „auf der Höhe 6“ : h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\6\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix}$

Nun wird die Gerade h mit der Segeltuchebene geschnitten.
Der Schnittpunkt L ist der Punkt, in dem die Stange das Segeltuch berührt.

$$2(8-8t) - 8t + 2\cdot 6 = 24 \quad \Rightarrow 16 - 16t - 8t + 12 = 24 \quad \Rightarrow t = \frac{1}{6}$$

Einsetzen von t in die Gerade h ergibt den Schnittpunkt $L(\frac{20}{3} / \frac{4}{3} / 6)$

Das untere Ende der Stange befindet sich somit imt Punkt $Z(\frac{20}{3} / \frac{4}{3} / 0)$.

Aufgabe B 2.2

a) Das Spiel ist fair, wenn die erwartete Auszahlung genau so hoch wie der Einsatz ist.

Um die erwartete Auszahlung zu ermitteln, werden die Wahrscheinlichkeiten benötigt, mit denen die einzelnen Ergebnisse erzielt werden.

Die Zufallsvariable X gebe die Auszahlung an.

P(Stern – Stern) = $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}=P(X=2)$

P(Diamant – Diamant) = $\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{9}=P(X=0,85)$

P(Kleeblatt – Kleeblatt) = $\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{4}=P(X=0,20)$

Der Erwartungswert von X beträgt $E(X)=2\cdot\frac{1}{36}+0,85\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\cdot 0,20=0,20$ €

Da die erwartete Auszahlung dem Spieleinsatz entspricht, ist das Spiel fair.

Damit der Veranstalter auf lange Sicht pro Spiel 0,05 € Gewinn erzielt, muss der erwartete Auszahlungsbetrag von derzeit 0,20 € um 5 Cent auf 0,15 € reduziert werden.

Der Auszahlungsbetrag für „Diamant – Diamant“ sei a.

Nun gilt: $E(X)=2\cdot\frac{1}{36}+a\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\cdot 0,20=0,15$ €

$\Rightarrow \frac{19}{180}+\frac{1}{9}a=0,15 \quad \Rightarrow \frac{1}{9}a=\frac{2}{45} \quad \Rightarrow a=0,40$ €.

Die Auszahlung für „Diamant – Diamant“ muss künftig 0,40 € betragen.

b) Die Nullhypothese lautet $H_0: p \geq \frac{1}{36}$

Die Alternativhypothese lautet folglich $H_1: p < \frac{1}{36}$

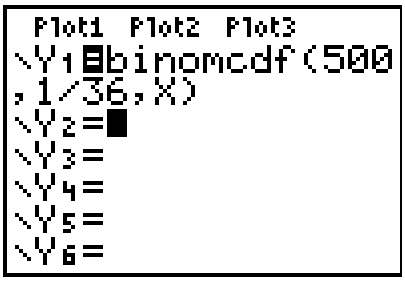
Es handelt sich um einen linksseitigen Hypothesentest mit n = 500 und $p=\frac{1}{36}$.

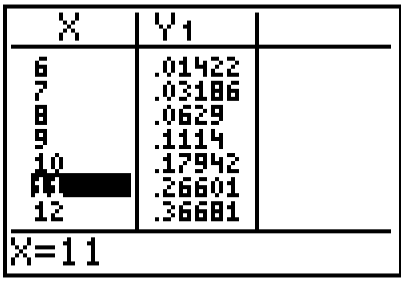
Der Annahmebereich für die Nullhypothese lautet $A=\{k+1,...,n\}$

Der Ablehnungsbereich lautet $\overline{A}=\{0,...,k\}$.

Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft das Ereignis „Stern – Stern“ eintritt.

Aufgrund der vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit soll gelten:
$P(X\in\overline{A})\leq 0,05 \quad \Rightarrow P(X\leq k)\leq 0,05$





Aus der Tabelle liest man ab:
$P(X \leq 7) = 0{,}032$ und $P(X \leq 8) = 0{,}063$

Damit ist k = 7 und der Ablehnungsbereich ist $\overline{A} = \{0, \ldots, 7\}$
Wenn bei 500 Spielen höchstens siebenmal „Stern – Stern“ erscheint, wird die Nullhypothese abgelehnt; andernfalls wird die Nullhypothese nicht abgelehnt.