Abiturprüfung Mathematik 2005 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Analytische Geometrie – Aufgabe II, 2

Aufgabe II, 2.1:

Gegeben sind die Punkte A (2 | 1 | 3) und B (2 | 5 | 3) sowie die

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}$$

a) Die Ebene E enthält die Punkte A und B und verläuft parallel zu g.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E. Beschreiben Sie die Lage von E.
Welchen Abstand hat g von E? (4 VP)

b) Der Punkt T liegt auf der Geraden g und bildet zusammen mit den Punkten A und B ein bei T rechtwinkliges Dreieck. Bestimmen Sie die Koordinaten von T.
Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck ABT?
Bestimmen Sie einen Punkt, der von A, B und T den gleichen Abstand hat.

(5 VP)

c) Das Dreieck ABC mit C (2 | 3 | 5) rotiert um die Seite AB. Dabei entsteht ein Doppelkegel. Bestimmen Sie dessen Volumen.

(3 VP)

Aufgabe II 2.2

Hinweis: ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

Die Punkte P, Q, R und S bilden die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S. Die Punkte M_1 und M_2 sind die Mittelpunkte der Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{PR}$, die Punkte M_3 und M_4 sind die Mittelpunkte der Strecken $\overline{QS}$ und $\overline{RS}$.
Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_3M_4}$ gilt.

(4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2005 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Haupttermin Wahlteil – Analytische Geometrie – Lösungen Aufgabe II, 2

Aufgabe II, 2.1:

a) Gleichung von E:
Da E parallel zur Geraden g verläuft, ist der Richtungsvektor von g auch ein Richtungsvektor von E. Ein zweiter Richtungsvektor von E ist der Vektor $\overrightarrow{AB}$.

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Umformung der Ebene in eine Koordinatengleichung:

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow n_1 = 0 \qquad \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow n_2 = 0$$

n_3 ist beliebig (außer $n_3 = 0$, was nicht zugelassen ist), also z.B. $n_3 = 1$.

Der Normalenvektor von E ist somit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also E: $x_3 = ?$

Um die rechte Seite der Koordinatengleichung zu ermitteln, wird ein Punkt auf der Ebene eingesetzt, z.B. A(2/1/3). Dies ergibt E: $x_3 = 3$.

Lage von E:
Die Ebene E ist also eine um 3 nach oben verschobene Parallele zur $x_1 - x_2$-Ebene.

Abstand g von E:
Da g parallel zu E ist, wird auf der Gerade g ein beliebiger Punkt ausgewählt (z.B. P(5/3/5)) und dessen Abstand zur Ebene E ermittelt.

Da die x_3-Koordinate von P = 5 ist und die Ebene E sich auf der Höhe 3 befindet, ist der gesuchte Abstand d = 2.
(Man könnte den Abstand auch wie üblich mit Hilfe der Hesseschen Normalenform ermitteln)

b) Koordinaten von T:
Da der Punkt T auf der Geraden g liegt, besitzt er die Koordinaten $T(5+r/3/5)$.

Das Dreieck ABT ist bei T rechtwinklig, wenn gilt: $\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{BT} = 0$

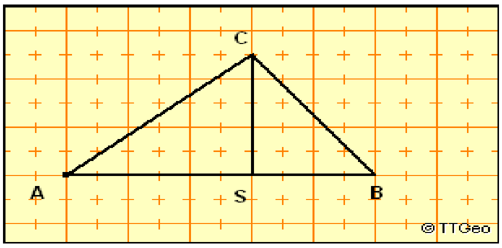
$$\begin{pmatrix} 3+r \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3+r \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (3+r)^2 - 4 + 4 = 0 \Rightarrow r = -3 \quad \text{also } T(2/3/5).$$

Flächeninhalt des Dreiecks:
Das Dreieck ABT ist rechtwinklig, also berechnet sich die Fläche wie folgt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AT}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BT}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{8} = 4$$

Punkt mit gleichem Abstand von A,B und T:
Der Punkt, der von allen Eckpunkten des Dreiecks gleichen Abstand besitzt, ist der Umkreismittelpunkt. Da es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, ist der Umkreis der Thaleskreis, dessen Mittelpunkt auf der Mitte der Hypotenuse [AB] liegt.
Der Mittelpunkt der Strecke [AB] ist $M_{AB}(2/3/3)$ und dies ist der gesuchte Punkt.

c) Volumen des Doppelkegels:



Der Radius des Doppelkegels entspricht dem Abstand des Punktes C von der Geraden
$g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Diesen Abstand erhält man mit einer Hilfsebene H, die den Punkt C enthält und senkrecht zu g verläuft:

H: $4x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 3$

Schnittpunkt S von H mit g: $1 + 4r = 3 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$ also S(2/3/3).

Radius der Kegel = $\left|\overrightarrow{CS}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = 2$ Höhe des ersten Kegels = $\left|\overrightarrow{AS}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 2$

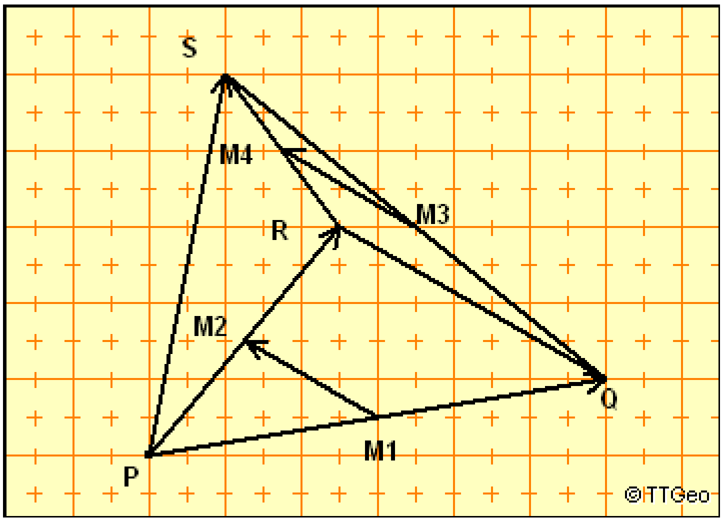
Höhe des zweiten Kegels = $\left|\overrightarrow{BS}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 2$

$$V_{1.Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{8}{3}\pi = V_{2.Kegel} \Rightarrow V_{Doppelkegel} = \frac{16}{3}\pi$$

Aufgabe II, 2.2:

In der Pyramide können mit Hilfe von drei vorgegeben linear unabhängigen Vektoren alle anderen Vektoren in dem Körper dargestellt werden.

Die vorgegebenen linear unabhängigen Vektoren seien $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{b} = \overrightarrow{PR}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{PS}$.



Das Ziel besteht nun darin, die Vektoren $\overrightarrow{M_1M_2}$ sowie $\overrightarrow{M_3M_4}$ durch die vorgegeben linear unabhängigen Vektoren darzustellen und nachzuweisen, das die beiden Vektoren identisch sind.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PM_2} = -\frac{1}{2}\cdot\vec{a} + \frac{1}{2}\cdot\vec{b}$$

$$\overrightarrow{M_3M_4} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QR} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\cdot(-\vec{c}+\vec{a}) + (-\vec{a}+\vec{b}) + \frac{1}{2}\cdot(-\vec{b}+\vec{c}) = -\frac{1}{2}\cdot\vec{a} + \frac{1}{2}\cdot\vec{b}$$

Somit sind die beiden Vektoren identisch, wie zu beweisen war.