Abiturprüfung Mathematik 2006 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Aufgaben Analysis I 3

Durch $f(t) = 20t \cdot e^{-0,5t}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $f(t)$ in $\frac{mg}{l}$ gemessen.

Die folgende Betrachtungen sind nur für die Zeitspanne der ersten 12 Stunden nach der Einnahme des Medikaments durchzuführen.

a) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Konzentration.
Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert ?
Wie groß ist dieser höchste Wert ?
Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens 4 $\frac{mg}{l}$ beträgt.
Berechnen Sie die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.
Wie hoch ist die mittlere Konzentration innerhalb der ersten 12 Stunden ?
(5 VP)

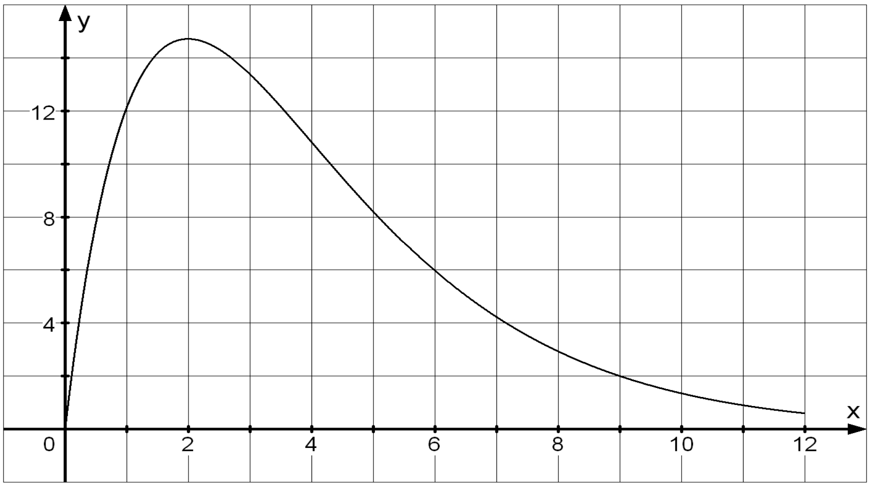
b) Zu welchem Zeitpunkt wird das Medikament am stärksten abgebaut ?
Wie groß ist zum Zeitpunkt t = 4 die momentane Änderungsrate der Konzentration ?
Ab diesem Zeitpunkt wird die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle t = 4 beschrieben.
Bestimmen Sie damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.
(4 VP)

c) Anstelle der Näherung aus Teilaufgabe b) wird nun wieder die Beschreibung der Konzentration durch f verwendet.
Vier Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. Es wird angenommen, dass sich dabei die Konzentration im Blut des Patienten addiert.
Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Gesamtkonzentration für $0 \le t \le 12$.
Die Konzentration des Medikaments im Blut darf 20 $\frac{mg}{l}$ nicht übersteigen.
Wird diese Vorgabe in diesem Fall eingehalten ? (5 VP)

d) Das Medikament wird nun in seiner Zusammensetzung verändert.
Die Konzentration des Medikaments im Blut wird durch $g(t) = at \cdot e^{-bt}$ mit a > 0 und b > 0 beschrieben.
Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und g(t) in $\frac{mg}{l}$ gemessen.
Bestimmen Sie die Konstanten a und b, wenn die Konzentration vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert 10 $\frac{mg}{l}$ erreicht. (4 VP)

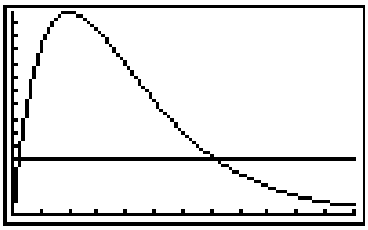
Abiturprüfung Mathematik 2006 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Aufgaben Analysis I 3

a) Skizze des Verlaufes der Konzentration



Die Konzentration ist laut GTR maximal für t = 2 mit f(2) = 14,7 $\frac{mg}{l}$.

Schnitt des Schaubildes mit der Geraden y = 4:



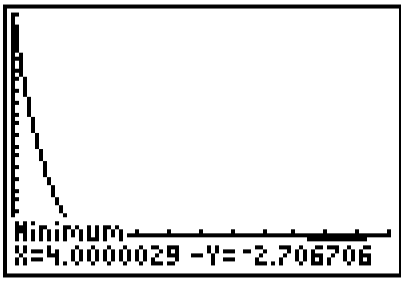
Die Schaubilder schneiden sich gemäß GTR bei t = 0,22 und t = 7,15.
Die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist, beträgt damit 7,15 - 0,22 = 6,93 Stunden.

Mittlere Konzentration in den ersten 12 Stunden: $\frac{1}{12-0}\cdot\int_0^{12} f(t)dt = 6{,}55$ (GTR).

Die mittlere Konzentration beträgt 6,55 $\frac{mg}{l}$.

b) Der stärkste Abbau ist zu dem Zeitpunkt, in dem die Steigung der Tangente minimal ist. An dieser Stelle besitzt das Schaubild von f einen Wendepunkt bzw. das Schaubild von f' einen Tiefpunkt.

$$f'(x) = 20e^{-0,5t} + 20t\cdot e^{-0,5t}\cdot(-0{,}5) = e^{-0,5t}(20-10t)$$



Mit dem GTR ergibt sich als Minimum von f' die Stelle t = 4.
Die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt t = 4 beträgt $f'(4) = -20e^{-2} \approx -2{,}71$.

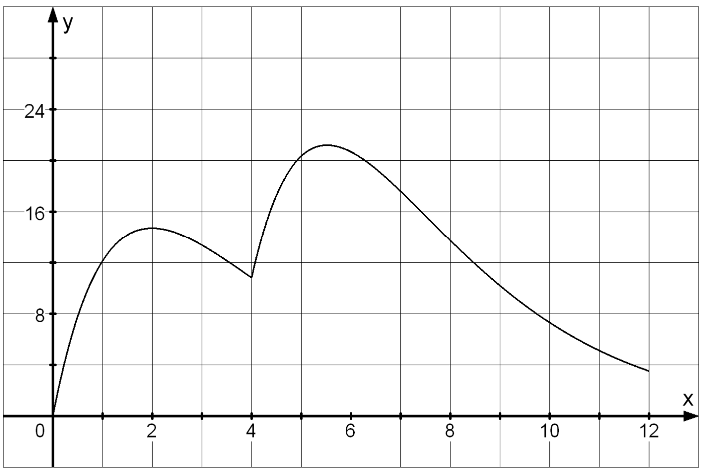
Ab dem Zeitpunkt t = 4 wird das Schaubild von f nun durch die Tangente an der Stelle t = 4 ersetzt. Hierzu benötigt man zunächst die Tangentengleichung.

Bekannt: Tangentensteigung $m = -20e^{-2}$ und Punkt $P(4\,/\,80e^{-2})$.
Punkt-Steigungs-Form: $y - 80e^{-2} = -20e^{-2}(t-4) \Leftrightarrow y = -20e^{-2}t + 160e^{-2}$

Das Medikament ist vollständig abgebaut, sobald die Tangente die t-Achse schneidet:
$-20e^{-2}t + 160e^{-2} = 0 \Rightarrow t = 8$
Nach 8 Stunden ist das Medikament vollständig abgebaut.

c) Nach 4 Stunden erfolgt eine weitere Einnahme des Medikaments. Hierdurch ergibt sich eine Überlagerung zweier Funktionen.
Für $0 \le t < 4$ wird die Gesamtkonzentration beschrieben durch $f(t) = 20te^{-0,5t}$
Für $4 \le t \le 12$ wird die Gesamtkonzentration beschrieben durch $g(t) = f(t) + f(t-4)$
f(t-4) ist eine Verschiebung der Ausgangsfunktion um 4 nach rechts und gibt im Verlauf die Medikamentenkonzentration der zweiten Einnahme an.
Es gilt $g(t) = 20te^{-0,5t} + 20(t-4)e^{-0,5(t-4)}$

Schaubild für f(t) bzw. g(t):



Aus dem Schaubild erkennt man, dass die Vorgabe einer maximalen Konzentration von $20\ \frac{mg}{l}$ nicht eingehalten wird. Laut GTR wird diese Konzentration im Bereich zwischen t = 4,91 und t = 6,29 Stunden nicht eingehalten. Als höchste Konzentration ergibt sich $21{,}2\ \frac{mg}{l}$ für t = 5,52.

d) $g(t) = at \cdot e^{-bt}$ und $g'(t) = ae^{-bt} + at \cdot e^{-bt} \cdot (-b) = ae^{-bt}(1 - bt)$
Als Bedingung soll gelten: g(4) = 10 und $g'(4) = 0$ (lokales Maximum mit Steigung 0)
$g(4) = 4a \cdot e^{-4b} = 10$ (*)
$g'(4) = ae^{-4b}(1 - 4b) = 0$ (**)
Aus (**) folgt b = 0,25 und damit aus (*) $4a \cdot e^{-1} = 10 \Rightarrow a = 2{,}5e$