Pflichtteilaufgaben zu Stammfunktion, Integral

Baden-Württemberg

Hilfsmittel: keine

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

September 2016

Übungsaufgaben:

Ü1:

Geben Sie eine Stammfunktion f mit $f(x) = 3x^3 + 5 - \frac{2}{x} + 2\cos(x) + \frac{5}{x^2} + 3 \cdot \sqrt{x}$ an.

Ü2:

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = (1-3x)^4$ an.

Ü3:

Geben Sie eine Stammfunktion f mit $f(x) = 4\sin(2x+3) + 4e^{2x}$ an.

Ü4:

Berechnen Sie das Integral $\int_2^{e+1} \frac{1}{x-1}dx$.

Ü5:

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi} (1+\sin(x))dx$

Ü6:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4x$.
Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild von f und der x-Achse.

Ü7:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3x^2 - x^3$.
Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild von f und der x-Achse.

Ü8:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{x}$.
Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Schaubild von f und der Geraden mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x$ über dem Intervall [1;4].

Abituraufgaben (Haupttermin)

Aufgabe 1: (Abiturprüfung 2016)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{48}{(2x-4)^3}$.

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(3)=1$.

Aufgabe 2: (Abiturprüfung 2015)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi}\left(4x-\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)dx$

Aufgabe 3: (Abiturprüfung 2014)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{1}\frac{4}{(2x+1)^3}dx$

Aufgabe 4: (Abiturprüfung 2013)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=4\sin(2x)$

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(\pi)=7$.

Aufgabe 5: (Abiturprüfung 2013)

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x)=-x^2+3$ und $g(x)=2x$.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Aufgabe 6: (Abiturprüfung 2012)

Berechnen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x)=2e^{4x}+\frac{3}{x^2}$

Aufgabe 7: (Abiturprüfung 2011)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{1}(2x-1)^4\,dx$

Aufgabe 8: (Abiturprüfung 2010)

Berechnen Sie das Integral $\int_1^{e}\left(\frac{2}{x}+4x\right)dx$

Aufgabe 9: (Abiturprüfung 2009)

Berechnen Sie das Integral $\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right) dx$

Aufgabe 10: (Abiturprüfung 2008)

G ist eine Stammfunktion der Funktion g mit $g(x) = 2 - 3 \cdot \sin(4x)$.
Der Punkt P(0/1) liegt auf dem Schaubild von G. Bestimmen Sie einen Funktionsterm von G.

Aufgabe 11: (Abiturprüfung 2007)

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\ln 2} e^{2x} dx$.

Aufgabe 12: (Abiturprüfung 2006)

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x^3$ an.

Aufgabe 13: (Abiturprüfung 2005)

Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{4}x^4$.

Aufgabe 14: (Abiturprüfung 2004)

Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin(2x)$ an.

Lösungen

Ü1:

Funktion wird umgeschrieben in $f(x) = 3x^3 + 5 - 2x^{-1} + 2\cos(x) + 5x^{-2} + 3 \cdot x^{0,5}$

Stammfunktion: $F(x) = \frac{3}{4}x^4 + 5x - 2 \cdot \ln|x| + 2\sin(x) - 5x^{-1} + 2x^{1,5}$

Ü2:

$f(x) = (1-3x)^4$

Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{5}(1-3x)^5 \cdot \frac{1}{-3} = -\frac{1}{15}(1-3x)^5$

Ü3:

$f(x) = 4\sin(2x+3) + 4e^{2x}$

Stammfunktion: $F(x) = -4\cos(2x+3) \cdot \frac{1}{2} + 4e^{2x} \cdot \frac{1}{2} = -2\cos(2x+3) + 2e^{2x}$

Ü4:

$$\int_2^{e+1} \frac{1}{x-1}dx = \left[\ln|x-1|\right]_2^{e+1} = \ln|e+1-1| - \ln|2-1| = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$$

Ü5:

$$\int_0^{\pi} (1+\sin(x))dx = [x - \cos(x)]_0^{\pi} = \pi - \cos(\pi) - \left(0 - \cos(0)\right) = \pi - (-1) - (-1) = \pi + 2$$

Ü6:

Berechnung der Nullstellen von f: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x-4) = 0$

Satz vom Nullprodukt: x = 0 oder x = 4

$$\int_0^4 (x^2 - 4x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2\right]_0^4 = \frac{64}{3} - 32 = -\frac{32}{3}$$

Die gesuchte Fläche beträgt $A = \frac{32}{3}$ FE.

Ü7:

Berechnung der Nullstellen von f: $f(x)=0 \Rightarrow 3x^2-x^3=0 \Rightarrow x^2\cdot(3-x)=0$

Satz vom Nullprodukt: x = 0 oder x = 3

$$\int_0^3 (3x^2-x^3)dx = \left[x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = 27-\frac{81}{4}=\frac{27}{4}$$

Die gesuchte Fläche beträgt $A=\frac{27}{4}$ FE.

Ü8:

Die Gerade $y=\frac{1}{2}x$ liegt im Intervall [1;4] oberhalb des Schaubildes von $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{x}$, da der zusätzliche Term $-\frac{1}{x}$ in der Funktionsgleichung von f(x) negativ ist.

$$\int_1^4 (\frac{1}{2}x-f(x))dx = \int_1^4 (\frac{1}{2}x-(\frac{1}{2}x-\frac{1}{x}))dx = \int_1^4 \frac{1}{x}dx = \left[\ln|x|\right]_1^4 = \ln(4)-\ln(1)=\ln(4)$$

Die gesuchte Fläche beträgt $A=\ln(4)$ FE.

Aufgabe 1:

Zunächst wird die Funktionsgleichung von f umgeformt:

$$f(x)=\frac{48}{(2x-4)^3}=48\cdot(2x-4)^{-3}$$

Die allgemeine Stammfunktion lautet $F(x)=48\cdot\frac{1}{-2}(2x-4)^{-2}\cdot\frac{1}{2}+C=\frac{-12}{(2x-4)^2}+C$

Nun wird die Bedingung eingesetzt: $F(3)=1 \Rightarrow \frac{-12}{(6-4)^2}+C=1 \Rightarrow -3+C=1 \Rightarrow C=4$

Die gesuchte Stammfunktion lautet $F(x)=\frac{-12}{(2x-4)^2}+4$

Aufgabe 2:

$$\int_0^\pi \left(4x-\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)dx = \left[2x^2+\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{0,5}\right]_0^\pi = \left[2x^2+2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_0^\pi$$

$$=2\pi^2+2\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)-(0+2\cos(0))=2\pi^2-2$$

Aufgabe 3:

$$\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3}dx = \int_0^1 4\cdot\left(2x+1\right)^{-3}dx = \left[\frac{4}{-2}\cdot(2x+1)^{-2}\cdot\frac{1}{2}\right]_0^1 = \left[-\frac{1}{(2x+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{9}-(-1) = \frac{8}{9}$$

Aufgabe 4:

Die allgemeine Stammfunktion lautet $F(x) = 4\cdot(-\cos(2x))\cdot\frac{1}{2} + C = -2\cdot\cos(2x) + C$

Die Konstante C muss nun so gewählt werden, dass $F(\pi) = 7$ gilt:

Einsetzen der Bedingung ergibt

$7 = -2\cdot\cos(2\pi) + C$

Da $\cos(2\pi) = 1$ ist, folgt C = 9. Die Stammfunktion lautet $F(x) = -2\cdot\cos(2x) + 9$.

Aufgabe 5:

Um die Fläche zu bestimmen, werden zunächst die Schnittpunkte der Schaubilder von f(x) und g(x) berechnet:

Ansatz: $f(x) = g(x)$

$-x^2 + 3 = 2x \quad \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$

Mit der Mitternachtsformel ergibt sich $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot(-1)\cdot 3}}{-2} = \frac{2\pm 4}{-2}$

Als Lösungen folgen x = -3 und x = 1.

$$\int_{-3}^{1}(f(x)-g(x))dx = \int_{-3}^{1}(-x^2+3-2x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x - x^2\right]_{-3}^{1} = -\frac{1}{3}+3-1-(-\frac{1}{3}\cdot(-3)^3 + 3\cdot(-3) - 9)$$

$$= \frac{5}{3} - (9-9-9) = \frac{5}{3} + 9 = \frac{32}{3}$$

Die gesuchte Fläche beträgt $A = \frac{32}{3}FE$

Hinweis: Man hätte auch das Integral $\int_{-3}^{1}(g(x)-f(x))dx$ berechnen können.

Das Ergebnis dieses Integrals wäre dann $-\frac{32}{3}$. Da die Fläche jedoch eine positive Zahl sein muss, wäre die Antwort auch hier $A = \frac{32}{3}FE$.

Aufgabe 6:

Zur Berechnung einer Stammfunktion von $f(x) = 2e^{4x} + \frac{3}{x^2}$ wird die Funktionsgleichung umgeschrieben in $f(x) = 2e^{4x} + 3\cdot x^{-2}$

Die Gleichung einer Stammfunktion lautet $F(x) = \frac{2}{4}e^{4x} + \frac{3}{-1}x^{-1} = \frac{1}{2}e^{4x} - \frac{3}{x}$

Aufgabe 7:

$$\int_0^1 (2x-1)^4\,dx = \left[\frac{1}{5}\cdot(2x-1)^5\cdot\frac{1}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{10}\cdot(2-1)^5 - \frac{1}{10}\cdot(0-1)^5 = \frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$$

Aufgabe 8:

$$\int_1^e \left(\frac{2}{x}+4x\right)dx = \left[2\cdot\ln(x)+2x^2\right]_1^e = 2\cdot\ln(e)+2e^2-(2\cdot\ln(1)+2) = 2+2e^2-2=2e^2$$

Aufgabe 9:

$$\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right)dx = \int_4^9 \left(2\cdot x^{-\frac{1}{2}}-1\right)dx = \left[4\cdot x^{\frac{1}{2}}-x\right]_4^9 = \left[4\cdot\sqrt{x}-x\right]_4^9 = 4\cdot 3-9-(4\cdot 2-4) = -1$$

Aufgabe 10:

Da das Schaubild der Stammfunktion G durch einen bestimmten Punkt verlaufen soll, muss die Stammfunktion mit der Integrationskonstanten C aufgestellt werden.

$$G(x) = 2x-3\cdot(-\cos(4x))\cdot\frac{1}{4}+C = 2x+\frac{3}{4}\cos(4x)+C$$

Punktprobe P(0/1): $G(0)=\frac{3}{4}+C=1 \Rightarrow C=0{,}25$

Damit ergibt sich: $G(x)=2x+\frac{3}{4}\cos(4x)+0{,}25$

Aufgabe 11:

$$\int_0^{\ln 2} e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}e^{2\cdot\ln 2}-\frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}e^{\ln 4}-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot 4-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Aufgabe 12:

$$f(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}x^3 = 4x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^3 \Rightarrow F(x)=8x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{8}x^4 = 8\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{8}x^4$$

Aufgabe 13:

Eine mögliche Stammfunktion von $f(x)=4\cos\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{4}x^4$ wäre

$$F(x)=4\cdot\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{20}x^5 = 8\cdot\sin\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{20}x^5$$

Aufgabe 14:
Um die Stammfunktion zu finden, muss die Funktion umgeschrieben werden:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}+\sin(2x)=x^{-2}+\sin(2x)$$

Berechnung einer Stammfunktion: $F(x)=-x^{-1}-\frac{1}{2}\cos(2x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cos(2x)$