Abiturprüfung Mathematik 2010 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Aufgaben Analytische Geometrie II, 1

Aufgabe II 1

Gegeben sind die Punkte A(0/4/0), B(0/0/2) und C(4/0/0).

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Ergänzen Sie das Dreieck ABC durch einen Punkt D zu einer Raute.
Berechnen Sie die Innenwinkel der Raute.
Zeigen Sie, dass die Raute in der Ebene E: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ liegt.
(Teilergebnis: D(4/4/-2)). (5 VP)

Gegeben ist für jedes $t \neq 0$ der Punkt $S_t(-3+3t/-3+3t/5+t)$.
Die Pyramide P_t hat die Grundfläche ABCD und die Spitze S_t.

b) Zeichnen Sie die Pyramide P_3 in ein Koordinatensystem.
Die Punkte B, D und S_3 legen eine Ebene F fest.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von F.
Zeigen Sie, dass die Ebene F Symmetrieebene der Pyramide P_3 ist. (6 VP)

c) Für welchen Wert von t geht die Höhe der Pyramide P_t durch den Mittelpunkt der Grundfläche ?
Das gleichschenklige Dreieck ACS_3 wird um die Achse AC gedreht.
In welchen Punkte durchstößt dabei seine Spitze die x_1x_2 – Ebene ? (5 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2010 (Baden-Württemberg)
Wahlteil – Lösungen Analytische Geometrie II, 1

Aufgabe II 1

a) Nachweis der Gleichschenkligkeit:

Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Für die Längen der Dreiecksseiten gilt:

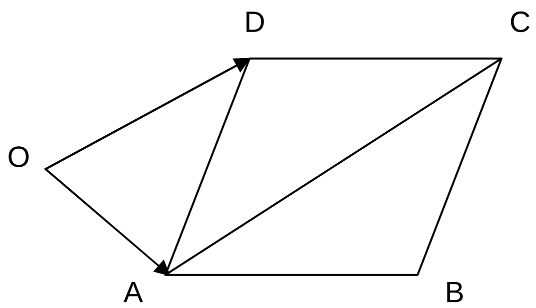
$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0+16+4} = \sqrt{20}$

$\overline{AC} = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{16+16+0} = \sqrt{32}$

$\overline{BC} = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{16+0+4} = \sqrt{20}$

Da zwei der drei Dreiecksseiten gleich lang sind, ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

Bestimmung des Punktes D:



Es gilt: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die Koordinaten von D lauten D(4/4/-2).

Innenwinkel der Raute:
Berechnung des Winkels α (im Punkt A):

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{0+16+4} \cdot \sqrt{16+0+4}} = \frac{-4}{20} \Rightarrow \alpha = 101{,}53°$$

Aufgrund der Symmetrie der Raute gilt $\gamma = \alpha = 101{,}53°$ (Winkel im Punkt C)

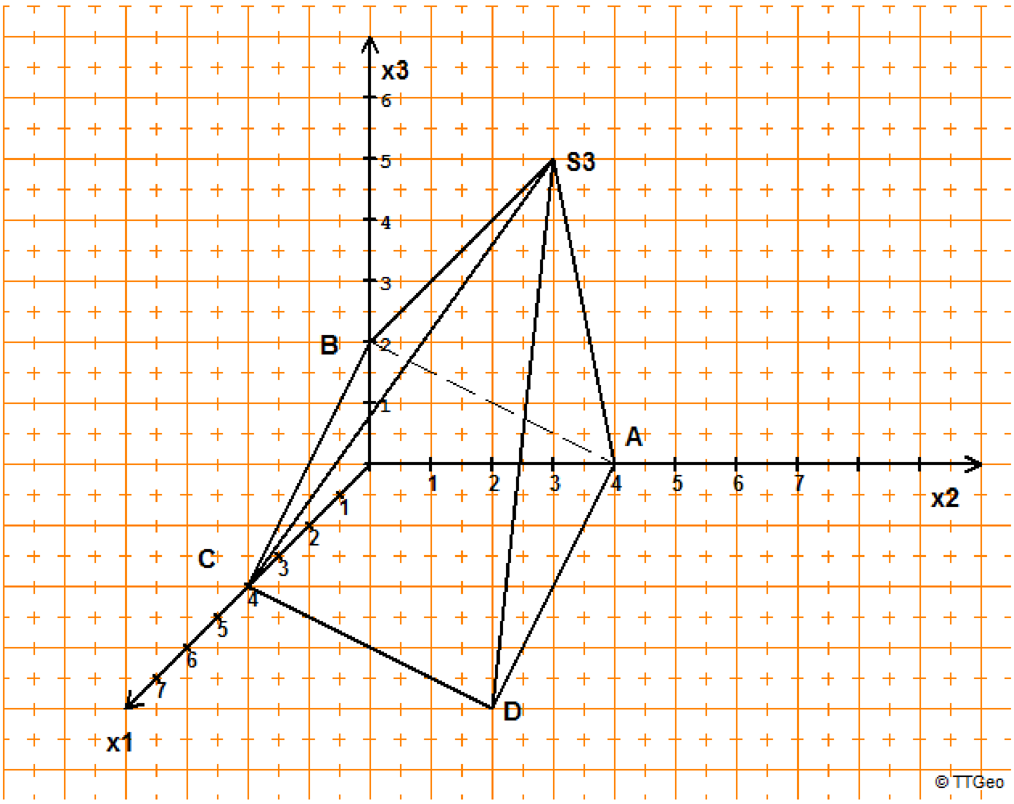
Für die beiden anderen Winkel β (im Punkt B) und δ (im Punkt D) gilt
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ (Winkelsumme im Viereck)
und daher $\beta + \delta = 360° - 2 \cdot 101{,}53° = 156{,}94°$

Da $\beta = \delta$ ist, folgt $\beta = \delta = \frac{156{,}94°}{2} = 78{,}47°$.

Nachweis, dass die Raute in der ebene E liegt:
Der Nachweis erfolgt durch die Kontrolle, ob die 4 Punkte A, B, C, D in der Ebene E liegen.
Einsetzen der Koordinaten von A in E: $0 + 4 + 2 \cdot 0 = 4$ ist eine wahre Aussage.
Einsetzen der Koordinaten von B in E: $0 + 0 + 2 \cdot 2 = 4$ ist eine wahre Aussage.
Einsetzen der Koordinaten von C in E: $4 + 0 + 2 \cdot 0 = 4$ ist eine wahre Aussage.
Einsetzen der Koordinaten von D in E: $4 + 4 + 2 \cdot (-2) = 4$ ist eine wahre Aussage.

Somit liegen alle 4 Punkte in der Ebene E.

b) Für die Pyramidenspitze gilt $S_3(6/6/8)$.



Aufstellen der Ebene F in Parameterform:

$$F:\ \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BD} + t \cdot \overrightarrow{BS_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$ bzw. vereinfacht

F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bestimmung eines Normalenvektors $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ von F:

Es gilt: $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow n_1 + n_2 - n_3 = 0$ (1)

und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 = 0$ (2)

(1) – (2) ergibt: $-2n_3 = 0 \Rightarrow n_3 = 0$
Setze $n_1 = 1$ (beliebig) und daraus folgt $n_2 = -1$.

Ansatz für Koordinatengleichung von F: $1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 = d$
Einsetzen von Punkt B in die Ebene: $1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = d \Rightarrow d = 0$

Koordinatengleichung von F: $1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 = 0$

Nachweis, dass die Ebene F Symmetrieebene der Pyramide ist:
Die Ebene F enthält die Punkte B und D sowie die Pyramidenspitze S_3.
Die Diagonale BD der Raute ist eine Symmetrieachse der Grundfläche.
Es ist daher nur noch zu zeigen, dass die Ebene F orthogonal zur Ebene E ist:

Für die Normalenvektoren von E und F gilt: $\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Daraus folgt die Orthogonalität der Ebenen E und F.
Damit ist F Symmetrieebene der Pyramide P_3.

c) Berechnung des Mittelpunktes M der Grundfläche:

Es gilt $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ das heißt M(2/2/0).

Aufstellen einer Gerade h, die orthogonal zur Grundfläche verläuft und durch M geht:

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (Normalenvektor von E ist Richtungsvektor von h)

Kontrolle, für welchen Wert von t der Punkt S_t auf der Geraden h liegt:

$$\begin{pmatrix} -3+3t \\ -3+3t \\ 5+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcr} r & -3t & = & -5 \\ r & -3t & = & -5 \\ 2r & -t & = & 5 \end{array}$$

Die eindeutige Lösung des Gleichungssytems lautet r = 4 und t = 3.

Für t = 3 geht die Höhe der Pyramide P_t durch den Mittelpunkt der Grundfläche.

Durchstoßpunkte bei Drehung des Dreiecks ACS_3:
Bei der Drehung des Dreiecks um die Achse AC wandert die Spitze S_3 auf der Symmetrieebene F. Die gesuchten Durchstoßpunkte befinden sich daher sowohl auf der $x_1 - x_2$ – Ebene als auch auf der Symmetrieebene F.
Die gesuchten Durchstoßpunkte haben daher die Koordinaten Z(u/u/0).
(Aufgrund der Koordinatengleichung von F haben alle Punkte, die in der Ebene liegen, denselben x_1- und x_2 – Wert).
Um den Wert von u zu ermitteln, wird noch eine weitere Bedingung benötigt.
Der Mittelpunkt M(2/2/0) hat vom Durchstoßpunkt Z dieselbe Entfernung wie von S_3.

Daher gilt: $\left|\overrightarrow{MS_3}\right| = \left|\overrightarrow{MZ}\right|$.

Daraus folgt: $\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} u-2 \\ u-2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \Rightarrow \sqrt{16+16+64} = \sqrt{(u-2)^2 + (u-2)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{96} = \sqrt{2 \cdot (u-2)^2}$ | quadrieren

$\Rightarrow 96 = 2(u-2)^2 \Rightarrow u-2 = \pm\sqrt{48}$

$\Rightarrow u_1 = \sqrt{48} + 2 \approx 8{,}93$ und $u_2 = -\sqrt{48} + 2 \approx -4{,}93$

Die beiden gesuchten Durchstoßpunkte lauten $Z_1(8{,}93\,/\,8{,}93\,/\,0)$ und $Z_2(-4{,}93\,/\!-4{,}93\,/\,0)$.