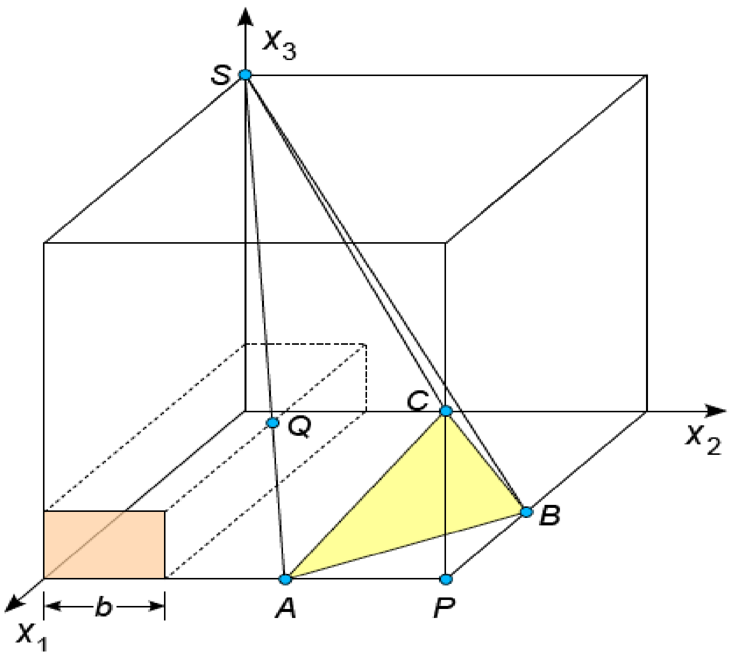
Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil – Aufgaben Analytische Geometrie II, 1

Aufgabe II 1



In einem Würfel mit den Eckpunkten O(0/0/0), P(10/10/0) und S(0/0/10) befindet sich eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche und der Spitze S (vgl. Skizze).
Die Eckpunkte der Pyramidengrundfläche sind A(10/6/0), B(6/10/0) und C(10/10/5).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Grundfläche der Pyramide liegt.
Welchen Winkel schließen die Grundflächen von Würfel und Pyramide ein ?
Untersuchen Sie, ob die Höhe der Pyramide auf der Diagonalen PS des Würfels liegt.
(Teilergebnis: E: $5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$) (6 VP)

b) Wie viel Prozent des Würfelvolumens beträgt das Pyramidenvolumen ? (5 VP)

c) Zusätzlich zur Pyramide soll nun noch ein Quader der Breite b in den Würfel gelegt werden. Die Abmessungen des Quaders werden so gewählt, dass er die Pyramide nur in einem Punkt Q der Pyramidenkante AS berührt (vgl. Skizze).
Welches Volumen hat ein solcher Quader mit der Breite b = 4 ?
Welche Werte kann das Volumen eines solchen Quaders annehmen, wenn die Breite b variabel ist ? (5 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analytische Geometrie II, 1

Aufgabe II 1

a) Die Ebene E enthält die Punkte A(10/6/0), B(6/10/0) und C(10/10/5).

Parameterform der Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

Den Normalenvektor der Ebene E erhält man mit dem Kreuzprodukt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ -16 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Koordinatengleichung von E: $5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$
(Die rechte Seite erhält man, wenn man in der linken Seite einen bekannten Punkt der Ebene, z.B. A(10/6/0) einsetzt).

Winkel zwischen Grundfläche von Würfel und Pyramide:
Die Grundfläche der Pyramide wird durch die Ebene E: $5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$ dargestellt.
Die Grundfläche des Würfels entspricht der $x_1 - x_2$ – Ebene mit der Koordinatengleichung $x_3 = 0$.

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{25+25+16} \cdot \sqrt{1}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{66}} \Rightarrow \alpha = 60{,}5°$$

Der Winkel zwischen den beiden Grundflächen beträgt **60,5°**.

Die Höhe der Pyramide liegt auf der Geraden h, die orthogonal zur Ebene E und durch den Punkt S verläuft.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Die Diagonale PS liegt dann auf der Gerade h, wenn sowohl der Punkt P als auch der Punkt S auf h liegen.

Der Punkt S liegt schon aufgrund der Vorgabe auf h, die Punktprobe muss somit nur noch für den Punkt P(10/10/0) erfolgen.

$$\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}5\\5\\-4\end{pmatrix}$$

Aus den ersten beiden Zeilen folgt t = 2, allerdings ergibt sich in der 3.Zeile ein Widerspruch. Somit liegt P nicht auf der Geraden h.
Die Höhe der Pyramide liegt damit nicht auf der Diagonalen PS des Würfels.

b) Würfelvolumen = $10^3 = 1000$ Volumeneinheiten

Pyramidenvolumen $= \frac{1}{3}\cdot A_{ABC}\cdot h_{Pyr}$

Fläche des Dreiecks: $A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot \overline{AB}\cdot h_{Dreieck}$

Die Höhe des Dreiecks entspricht dem Abstand des Punktes C von der Geraden g durch A und B, der nun berechnet wird.

Geradengleichung von g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\6\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$

Hilfsebene H senkrecht zu g, die den Punkt C(10/10/5) enthält:
H: $-4x_1 + 4x_2 = 0$
Schnitt von H und g: $-4(10-4t)+4(6+4t)=0 \Rightarrow -40+16t+24+16t=0 \Rightarrow t=0{,}5$
Schnittpunkt S(8/8/0)

$$h_{Dreieck} = d(g,C) = \left|\overrightarrow{SC}\right| = \left|\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4+25} = \sqrt{33}$$

$$\Rightarrow A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\sqrt{33} = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\sqrt{33} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{32}\cdot\sqrt{33} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1056}$$

Die Höhe der Pyramide entspricht dem Abstand des Punktes S von der Ebene ABC:

Hesse'sche Normalenform von E: $\frac{5x_1+5x_2-4x_3-80}{\sqrt{66}} = 0$

$$\Rightarrow d(S,E) = \left|\frac{5\cdot 0+5\cdot 0-4\cdot 10-80}{\sqrt{66}}\right| = \left|\frac{-120}{\sqrt{66}}\right| = \frac{120}{\sqrt{66}} = h_{Pyr}$$

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1056}\cdot\frac{120}{\sqrt{66}} = 80 \text{ Volumeneinheiten}$$

Das Pyramidenvolumen beträgt $\frac{80}{1000} = 0{,}08 =$ **8%** des Würfelvolumens.

c) Zunächst müssen die Koordinaten des Punktes Q bestimmt werden.
Der Punkt Q liegt auf der Kante AS:

Geradengleichung der Kante: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$

Vom Punkt Q ist außerdem bekannt, dass der x_2-Wert = b = 4 beträgt.
Der Punkt Q besitzt somit die Koordinaten $Q(q_1 / 4 / q_3)$

Daraus folgt: $\begin{pmatrix} q_1 \\ 4 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$

Aus der 2.Zeile ergibt sich $r = \frac{1}{3}$ und damit $q_3 = \frac{10}{3}$.

Volumen des Quaders: $V = 10 \cdot b \cdot q_3 = \frac{400}{3}$ Volumeneinheiten.

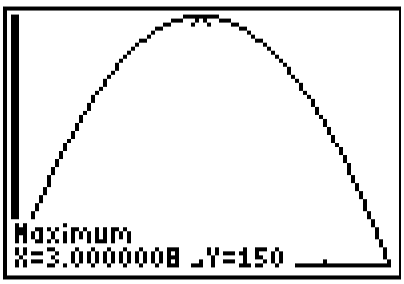
Bei variabler Breite b mit $0 \le b \le 6$ (für b = 6 ist A ein Eckpunkt des Quaders) besitzt der Punkt Q die Koordinaten $Q(q_1 / b / q_3)$.

Daraus folgt: $\begin{pmatrix} q_1 \\ b \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$

Aus der 2.Zeile ergibt sich $r = \frac{b-6}{-6} = 1 - \frac{1}{6}b$ und damit $q_3 = 10 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}b\right)$.

Volumen des Quaders: $V = 10 \cdot b \cdot 10 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}b\right) = 100b - \frac{100}{6}b^2$ Volumeneinheiten.

Die Funktion $V(b) = 100b - \frac{100}{6}b^2$ besitzt für b = 3 ein Maximum mit V(3) = 150.



Damit kann das Volumen des Quaders alle Werte zwischen 0 und 150 Volumeneinheiten annehmen.