Abiturprüfung Mathematik 2010 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Pflichtteil – Aufgaben

Aufgabe 1: (2 VP)

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2-3x)\cdot e^{-x}$ und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

Aufgabe 2: (2 VP)

Berechnen Sie das Integral $\int_1^e \left(\frac{2}{x} + 4x\right)dx$

Aufgabe 3: (3 VP)
Hinweis: ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

Die Funktion f mit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ hat die Nullstelle $x_1 = 1$.
Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen von f.

Aufgabe 4: (4 VP)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1-4x^2}{x^2}$. Ihr Schaubild ist K.

a) Geben Sie die Asymptoten von K an.
b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangente an K im Punkt P(1/f(1)) mit der x-Achse.

Aufgabe 5: (5 VP)
Die vier Abbildungen zeigen Schaubilder von Funktionen einschließlich aller waagrechten Asymptoten.

Eines dieser Schaubilder gehört zur Funktion f mit $f(x) = \frac{a}{1+x^2} - 1$.

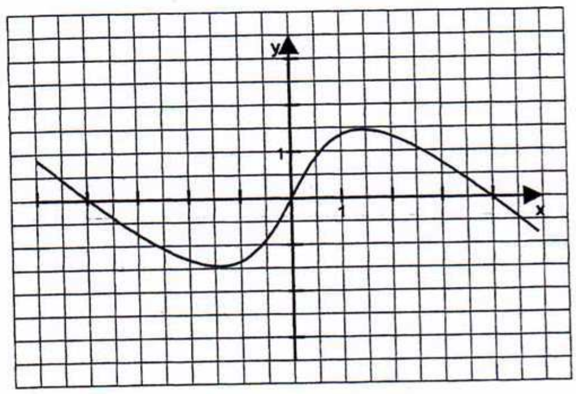


Abb.1

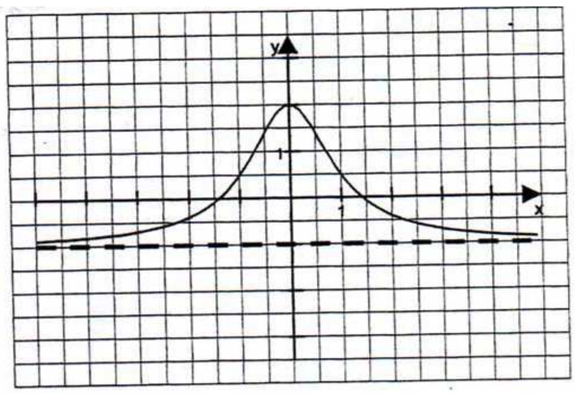


Abb. 2

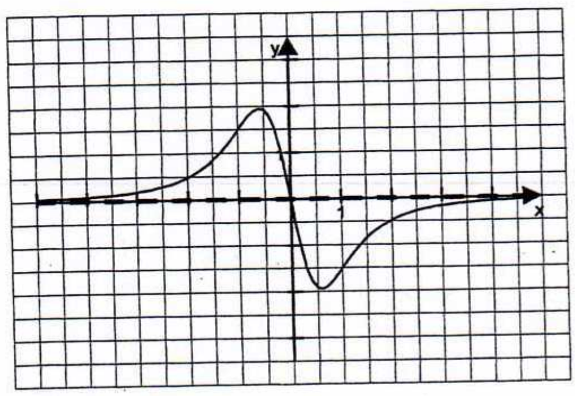


Abb. 3

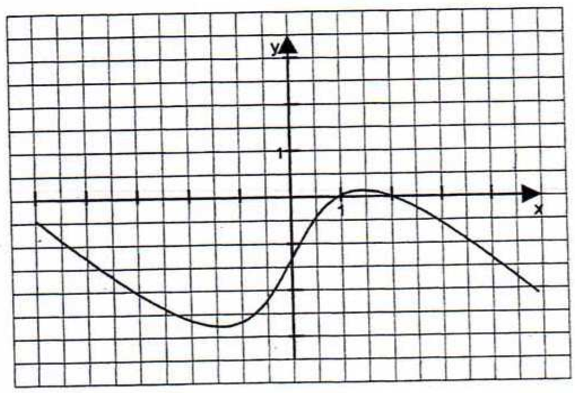


Abb. 4

a) Begründen Sie, dass Abbildung 2 zur Funktion f gehört.
Bestimmen Sie den Wert von a.

b) Von den anderen drei Abbildungen gehört eine zur Ableitungsfunktion f' und eine zur Integralfunktion I mit $I(x) = \int_2^x f(t)dt$.
Ordnen Sie diesen beiden Funktionen die zugehörigen Abbildungen zu und begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

Aufgabe 6: (3 VP)

Gegeben sind die Punkte A(2/4/1), B(0/2/-1), C(4/-2/1) und D(-1/9/0).
Überprüfen Sie, ob dieser vier Punkte in einer Ebene liegen.

Aufgabe 7: (4 VP)

Gegeben sind die Ebene E: $3x_1 - 4x_3 = -7$ und der Punkt P(9/-4/1).

a) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P von der Ebene E.
b) Der Punkt S(-1/1/1) liegt auf E.
Bestimmen Sie den Punkt Q auf der Geraden durch ‚S und P, der genauso weit von E entfernt ist wie P.

Aufgabe 8: (3 VP)

Die Gerade g und die Ebene E schneiden sich im Punkt S.
Die Gerade g' ist das Bild von g bei Spiegelung an der Ebene E.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um eine Gleichung der Geraden g' zu ermitteln.

Abiturprüfung Mathematik 2010 (Baden-Württemberg)
Pflichtteil – Lösungen

Aufgabe 1:
Die Ableitungsfunktion wird mit der Produktregel und der Kettenregel ermittelt:

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ mit $u(x) = 2 - 3x$, $v(x) = e^{-x}$, $u'(x) = -3$,
$v'(x) = -e^{-x}$ (Kettenregel)

Anwendung der Produktregel:
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = -3 \cdot e^{-x} + (2-3x) \cdot \left(-e^{-x}\right) = e^{-x} \cdot (-3 - 2 + 3x) = e^{-x} \cdot (3x - 5)$

Aufgabe 2:

$$\int_1^e \left(\frac{2}{x} + 4x\right) dx = \left[2 \cdot \ln(x) + 2x^2\right]_1^e = 2 \cdot \ln(e) + 2e^2 - (2 \cdot \ln(1) + 2) = 2 + 2e^2 - 2 = 2e^2$$

Aufgabe 3:

Die Nullstellen von f(x) ergibt sich mit dem Ansatz f(x) = 0, das heißt
es ist die Gleichung $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$ zu lösen.

Prüfung, ob x = 1 eine Nullstelle von f(x) ist:
Es gilt $f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 3 = 0$ und damit ist N(1/0) eine Nullstelle.
(dies wird bereits in der Aufgabenstellung vorausgesetzt; man muss dies nicht mehr unbedingt rechnerisch nachweisen)

Berechnung der weiteren Nullstellen mit Polynomdivision:

```
  ( 2x³ + 3x² - 8x + 3 ) : (x – 1) = 2x² + 5x - 3
-( 2x³  - 2x²)
-----------------
           5x² - 8x + 3
        -( 5x² - 5x)
       -----------------------
                - 3x + 3
              -( -3x + 3)
             -------------------
                      0
```

Aus dem Polynomdivisionsergebnis folgt $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = (x-1) \cdot (2x^2 + 5x - 3)$

Zur Ermittlung der weiteren Lösungen ist die Gleichung $2x^2 + 5x - 3 = 0$ zu lösen:
$$x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} \Rightarrow x_2 = 0{,}5 \text{ und } x_3 = -3$$
Die weiteren Nullstellen lauten $N_2(0{,}5/0)$ und $N_3(-3/0)$.

Aufgabe 4:

a) Das Schaubild von $f(x)=\frac{1-4x^2}{x^2}$ besitzt eine Defintionslücke bei x = 0.

Für $x \to 0$ strebt $f(x) \to +\infty$ (egal, ob man sich von links oder rechts der 0 annähert).
Somit liegt bei x = 0 eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel vor und damit ist **x = 0 eine senkrechte Asymptote.**

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

Es gilt $f(x)=\frac{1-4x^2}{x^2}=\frac{x^2\cdot(\frac{1}{x^2}-4)}{x^2}=\frac{1}{x^2}-4$

Für $x \to \pm\infty$ strebt der Bruch $\frac{1}{x^2}\to 0$.

Daher gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-4$.

Das Schaubild K besitzt die **waagrechte Asymptote y = -4.**

b) Um den Schnittpunkt zu bestimmen, muss zunächst die Tangentengleichung in P aufgestellt werden.

Berechnung der Koordinaten von P: $f(1)=\frac{1-4}{1}=-3$ und damit P(1/-3).

Mit $f(x)=\frac{1}{x^2}-4=x^{-2}-4$ (siehe a)) folgt $f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$.

Tangentensteigung in P: $f'(1)=-2$

Einsetzen von P und m in die Punkt-Steigungs-Form:
$y-(-3)=-2\cdot(x-1)\Rightarrow y=-2x-1$ ist die Gleichung der Tangente in P

Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse:
Setze die Tangentengleichung = 0: $0=-2x-1\Rightarrow x=-0{,}5$
Der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse lautet S(-0,5/0).

Aufgabe 5:

a) Die Funktion $f(x)=\frac{a}{1+x^2}-1$ besitzt die waagrechte Asymptote y = -1.

Dies ist daran erkennbar, weil für $x \to \pm\infty$ gilt, dass $\frac{a}{1+x^2}\to 0$ strebt.

Das einzige Schaubild, dass eine waagrechte Asymptote y = -1 besitzt, ist Abbildung 2.

Aus dem Schaubild kann man ablesen: f(0) = 2.

$f(0)=\frac{a}{1}-1=2\Rightarrow a=3$

b) Das Schaubild von f(x) besitzt an der Stelle x = 0 einen Hochpunkt. Somit muss die Ableitungsfunktion f' an dieser Stelle eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von + nach – besitzen. Nur das Schaubild aus Abbildung 3 erfüllt diese Bedingungm, somit gehört **Abbildung 3** zu f'.

Die Integralfunktion mit der unteren Grenze a = 2 besitzt bei x = 2 eine Nullstelle, da I(2) = 0 gilt. Da nur die Abbildung 4 dort eine Nullstelle besitzt, gehört **Abbildung 4** zu der Integralfunktion.

Aufgabe 6:

Zunächst wird anhand der 3 Punkte A, B und C die Parameterform einer Ebenengleichung aufgestellt:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun wird mit Hilfe einer Punktprobe geprüft, ob der Punkt D auf dieser Ebene liegt.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus der 3.Zeile folgt t = 0,5.
Aus der 2.Zeile folgt: $9 = 4 + 0{,}5 \cdot (-2) - 6r \Rightarrow r = -1$
Kontrolle mit 1.Zeile: $-1 = 2 + 0{,}5 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2$ liefert eine wahre Aussage.

Damit liegt der Punkt D in der Ebene E.
Alle vier Punkte liegen somit in einer Ebene.

Hinweis:
Man hätte die Aufgabe auch anders lösen können:
Die vier Punkte A,B,C,D liegen in einer Ebene wenn die drei Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ linear abhängig sind. Wenn die Vektoren linear unabhängig sind, liegen sie nicht in einer Ebene.

Aufgabe 7:

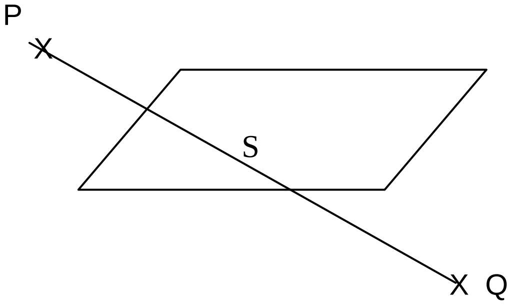
a) Aufstellen der Hesseschen Normalform von E: $\dfrac{3x_1 - 4x_3 + 7}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0$

bzw. E: $\dfrac{3x_1 - 4x_3 + 7}{5} = 0$

Der Abstand von P zu E berechnet sich mit $d = \left| \dfrac{3 \cdot 9 - 4 \cdot 1 + 7}{5} \right| = 6$.

Der Punkt P hat von der Ebene E den Abstand d = 6.

b)



Zur Ermittlung der Koordinaten von Q muss die Geradengleichung nicht aufgestellt werden.

Es gilt $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Koordinaten von Q lauten Q(-11/6/1).

Aufgabe 8:

1.Schritt: Berechnung des Schnittpunktes S der Gerade g mit der Ebene E

2.Schritt: Bestimmung eines weiteren von S verschiedenen beliebigen Punktes P auf der Geraden.

Dieser Punkt P wird nun an der Ebene E gespiegelt mit folgenden weiteren Schritten:

3.Schritt: Aufstellen einer Hilfsgerade h, die orthogonal zur Ebene E und durch P verläuft (Richtungsvektor von h ist ein Normalenvektor von E)

4.Schritt: Bestimmung des Schnittpunktes F von h mit E

5. Schritt: Berechnung des Spiegelpunktes P* mit $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$

6.Schritt: Aufstellen der Parameterform der Gerade g' durch die Punkte S und P*
g': $\vec{x} = \overrightarrow{OS} + r \cdot \overrightarrow{SP^*}$