Hauptprüfung Abiturprüfung 2015 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Wahlteil Analysis 1

Hilfsmittel: GTR und Formelsammlung

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

März 2015

Aufgabe A 1

Der Laderaum eines Lastkahns ist 50 m lang. Sein Querschnitt ist auf der gesamten Länge gleich und wird modellhaft beschrieben durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{125}x^4 \;;\; -5 \le x \le 5 \quad \text{(x und f(x) in Meter),}$$

a) Wie tief ist der Laderaum in der Mitte ?
Wie breit ist er in 3 m Höhe ?
In welchem Bereich hat der Boden des Laderaums eine Neigung unter 5% ?
Berechnen Sie das Volumen des Ladraums.
(5 VP)

b) Zur Wartung steht der Lastkahn an Land auf einer ebenen Plattform. Dort wird er stabilisiert durch gerade Stützen, die orthogonal zur Außenwand des Laderaums angebracht sind. Betrachtet werden zwei einander gegenüberliegende Stützen, deren Befestigungspunkte im Modell durch die Punkte $P_1(-4\,/\,f(-4))$ und $P_2(4\,/\,f(4))$ beschrieben werden. In welchem Abstand voneinander enden diese Stützen auf der Plattform ?
(3 VP)

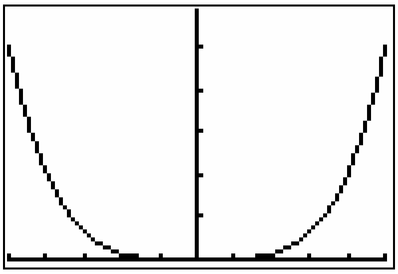
c) Der Laderaum kann durch eine horizontale Zwischendecke der Länge 50 m in zwei Teilräume geteilt werden. Das Volumen des unteren Teilraums beträgt 500 m³. Berechnen Sie die Breite der Zwischendecke.
(4 VP)

d) Untersuchen Sie, ob sich eine zylinderförmige Röhre mit Außendurchmesser 9,8 m so in Längsrichtung in den Laderaum legen lässt, dass sie ihn an der tiefsten Stelle berührt.
(3 VP)

Lösungen

Aufgabe A 1

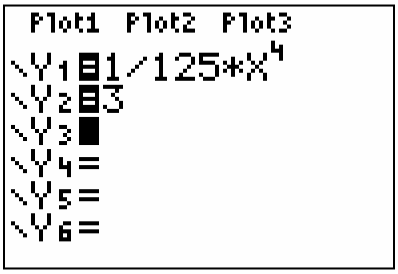
a) Skizze des Schaubildes von f mit dem GTR:

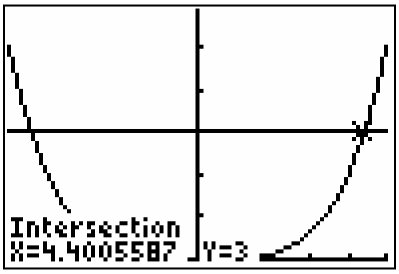


Der Laderaum ist definiert für das Intervall $-5 \le x \le 5$.

Tiefe des Laderaums in der Mitte:
Es gilt $f(0) = 0$ und $f(5) = 5$
Die Höhe des Laderaums beträgt 5 m.

Breite des Laderaums in 3 m Höhe: Setze $f(x) = 3$



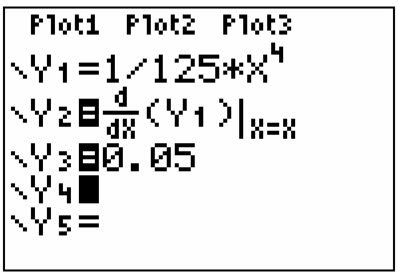


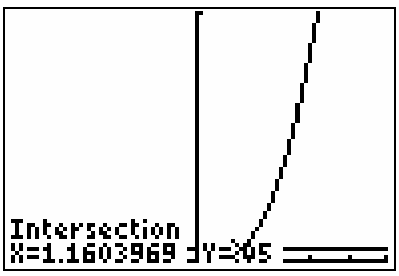
Mit dem GTR ergeben sich die Lösungen $x_1 \approx 4,4$ und $x_2 \approx -4,4$.
Die Breite des Laderaums in 3 m Höhe beträgt ca. 8,80 m.

Eine Gerade hat eine Neigung von 5%, wenn sie beispielsweise auf 100 m Länge um 5 m ansteigt. Die Steigung der Gerade beträgt $m = \frac{5}{100} = 0,05$.
Gesucht ist das Intervall der Funktion, in der der Betrag der Steigung unter 0,05 liegt.

Zunächst berechnen wir die Stelle des Kahns, an der die Steigung genau 0,05 beträgt.

Bedingung: $f'(x) = 0,05$

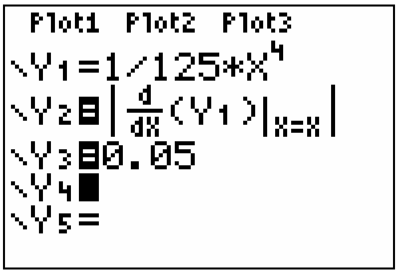


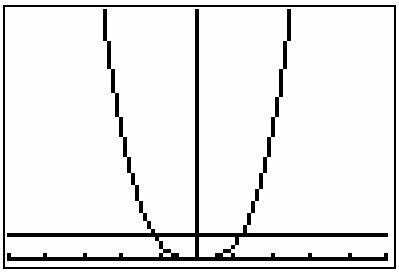


Mit dem GTR ergibt sich die Lösung $x \approx 1,16$.

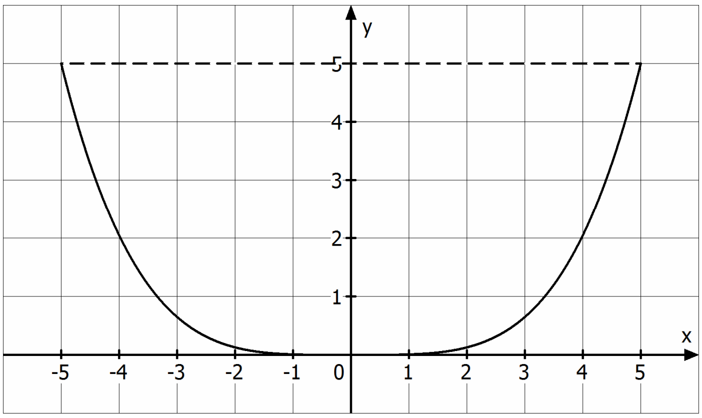
Es ist jedoch gefragt, in welchem Bereich die Steigung unter 5% liegt.
Dies ergibt sich aus Symmetriegründen des Schaubildes von f, dass dies den Bereich zwischen 1,16 m links und 1,16 m rechts der tiefsten Stelle betrifft.

Hinweis: Wer alternativ nicht mit der Symmetrie die Lösung begründen möchte, sondern diesen Bereich direkt mit dem GTR berechnen möchte, müsste als Ansatz $|f'(x)| < 0{,}05$ ansetzen.

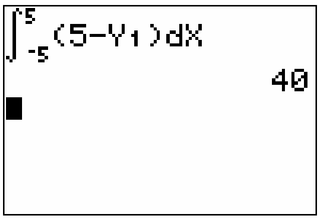




Volumen des Laderaums:



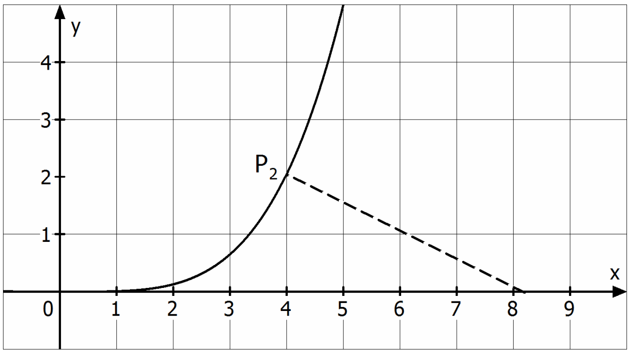
Man benötigt zunächst die Querschnittsfläche zwischen der Geraden y = 5 und des Schaubildes von f.



$$A = \int_{-5}^{5} (5 - f(x))dx = 40$$

Volumen des Laderaums: $V = \text{Grundfläche} \cdot \text{Länge} = 40\text{m}^2 \cdot 50\text{m} = 2000\text{m}^3$

b) Skizze:



Gesucht ist die Schnittstelle der Normalen in P_2 mit der x-Achse.

Aufstellen der Normalengleichung: $y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u)$

Setze u = 4 (x-Wert von P_2) in die Normalengleichung ein:

Es gilt $f(4) \approx 2{,}048$ und $f'(4) \approx 2{,}048$.

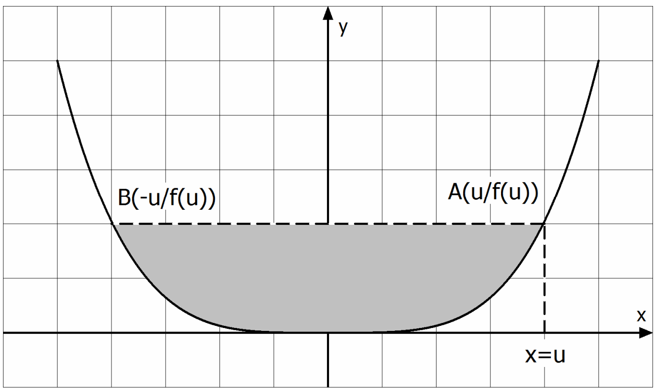
Normalengleichung: $y = -\frac{1}{2{,}048}(x-4) + 2{,}048 \quad \Rightarrow y = 0{,}49x + \Rightarrow y = -0{,}488x + 4$

Schnittpunkt der Normalen mit der x-Achse: $0 = -0{,}488x + 4 \Rightarrow x \approx 8{,}197\,\text{m}$

Aus Symmetriegründen schneidet die Normale in P_1 die x-Achse bei x = -8,197 m.

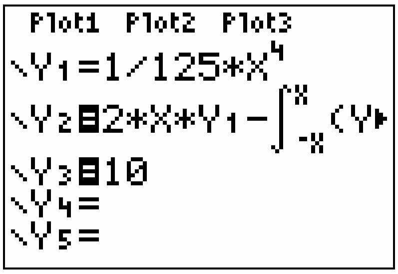
Der Abstand der Enden der beiden Stützen beträgt $2 \cdot 8{,}197\text{m} \approx 16{,}4\,\text{m}$

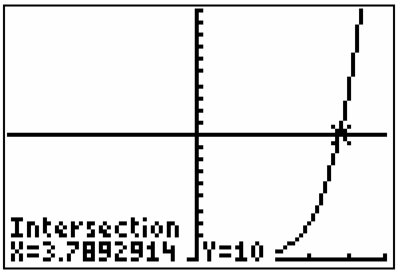
c) Wenn das Volumen des unteren Teilraums 500m³ beträgt, ergibt sich daraus die Querschnittsfläche $A = \frac{500\text{m}^3}{50\text{m}} = 10\text{m}^2$



Allgemein gilt: Querschnittsfläche = Rechtecksfläche - $\int_{-u}^{u} f(x)dx$

Bedingung: $10 = 2 \cdot u \cdot f(u) - \int_{-u}^{u} f(x)dx$

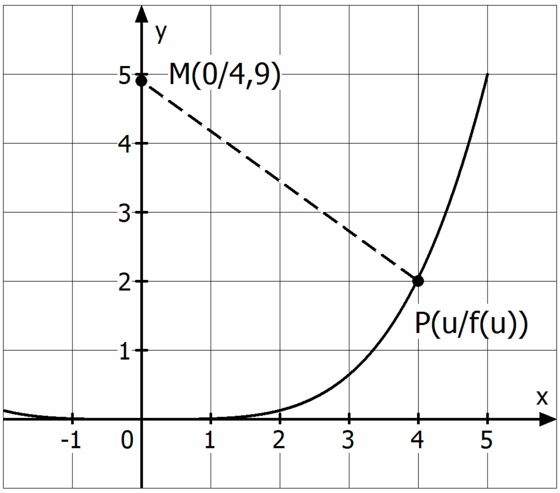




GTR: $u \approx 3{,}79\,\text{m}$

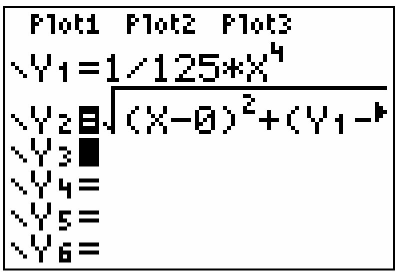
Die Breite der Zwischendecke beträgt etwa 7,6 m.

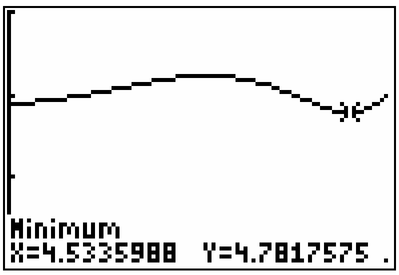
d) Der Radius der Röhre beträgt 4,9 m .
Da die Röhre symmetrisch in den Laderaum gelegt wird, liegt ihr Mittelpunkt M auf der y-Achse. Damit die Röhre die tiefste Stelle berührt, muss deren Mittelpunkt M(0/4,9) sein.



Die Röhre legt sich dann in den Laderaum legen, wenn der kürzeste Abstand zwischen M und dem Schaubild von f mindestens 4,9 m beträgt.

Abstand zwischen M(0/4,9) und P(u/f(u)): $d(u) = \sqrt{(u-0)^2 + (f(u)-4{,}9)^2}$ mit $0 \le u \le 5$





Das Minimum von d beträgt $d(4{,}53) \approx 4{,}78\text{m} < 4{,}9\text{m}$
Die Röhre lässt sich demnach nicht in der Form in den Laderaum legen.