Abiturprüfung Mathematik 2009 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis I 3

Aufgabe I 3:

Die normale Körpertemperatur eines gesunden Menschen liegt bei 36,5℃.
Die Funktion f mit

$$f(t) = 36{,}5 + t \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$$

Beschreibt modellhaft den Verlauf einer Fieberkurve bei einem Erkrankten.
Dabei ist $t \geq 0$ die Zeit in Stunden nach Ausbruch der Krankheit und f(t) die Körpertemperatur in ℃.

a) Wann innerhalb der ersten 48 Stunden ist die Temperatur am höchsten ?
Geben Sie diese Temperatur an.
Skizzieren Sie die Fieberkurve innerhalb der ersten 48 Stunden in einem geeigneten Ausschnitt eines Koordinatensystems.
Zu welchen beiden Zeitpunkten innerhalb der ersten 48 Stunden nimmt die Körpertemperatur am stärksten zu bzw. ab ? (6 VP)

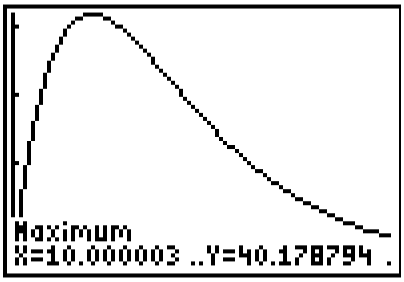
b) Wann sinkt die Körpertemperatur unter 37℃ ?
Weisen Sie nach, dass die Temperatur ab diesem Zeitpunkt dauerhaft unter 37℃ bleibt.
Bestimmen Sie die mittlere Körpertemperatur für den Zeitraum vom Krankheitsbeginn bis zu diesem Zeitpunkt.
In welchem 2-Stunden-Zeitraum nimmt die Temperatur um ein Grad zu ? (7 VP)

c) Fünf Stunden nach Ausbruch der Krankheit erhält der Erkrankte ein Fieber senkendes Medikament. Von diesem Zeitpunkt an sinkt die Temperatur nach der Gesetzmäßigkeit des beschränkten Wachstums und nähert sich der normalen Körpertemperatur. Zwei Stunden nach Einnahme des Medikaments beträgt die Temperatur 38,4℃.
Bestimmen Sie eine Funktion g, welche den weiteren Temperaturverlauf beschreibt.
Zu welchem Zeitpunkt nach der Einnahme des Medikaments ist die Körpertemperatur erstmals um ein Grad niedriger, als sie ohne Medikament wäre ? (5 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2009 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil – Analysis I 3

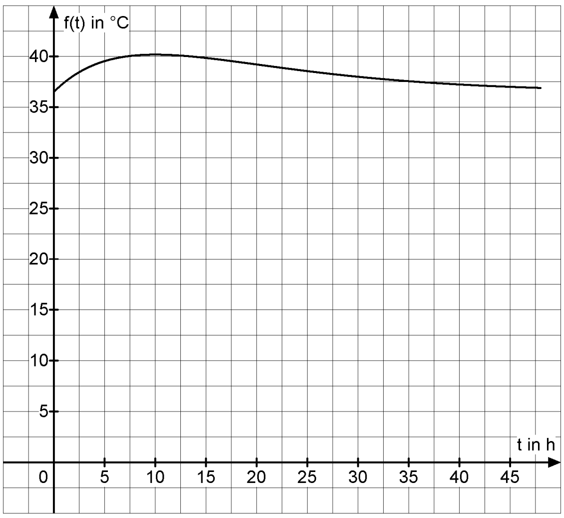
Aufgabe I 3:

a)

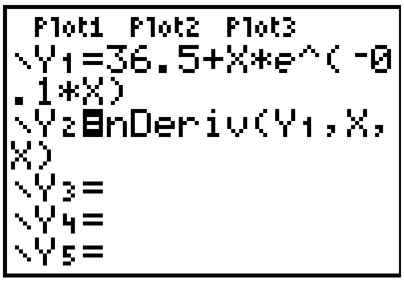


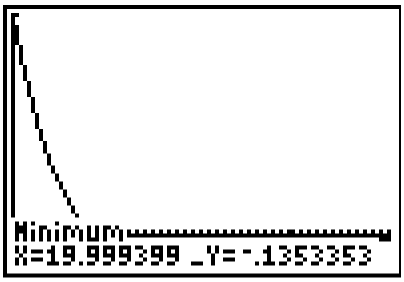
Die Temperatur ist nach 10 Stunden am größten mit 40,18 °C.

Skizze:



Die Temperaturänderung wird durch f' beschrieben. Dort wo das Schaubild von f' im Intervall [0;48] das absolute Maximum bzw. Minimum besitzt, nimmt die Körpertemperatur am stärksten ab bzw. zu.

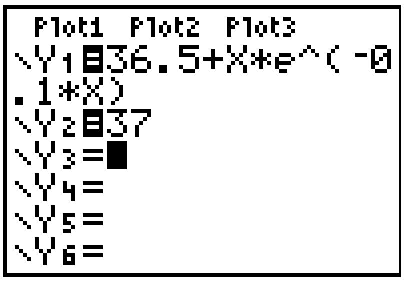


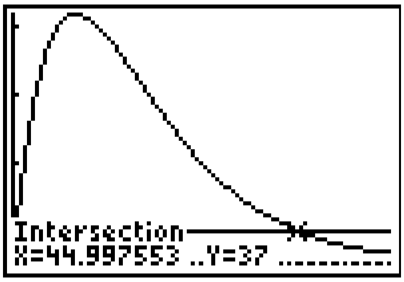


Nach t = 20 Stunden erfolgt die stärkste Temperaturabnahme (mit einer Geschwindigkeit von -0,135 °C/Stunde.
Die stärkste Temperaturzunahme ist gleich bei Krankheitsbeginn zum Zeitpunkt t = 0 (mit einer Geschwindigkeit von $f'(0) = 1$°C/Stunde)

b) Berechnung der Zeit, wann die Temperatur unter 37°C sinkt:

Bedingung: $f(t) = 37 \Leftrightarrow 36{,}5 + t \cdot e^{-0{,}1t} = 37$
Die Gleichung wird mit Hilfe des GTR gelöst.





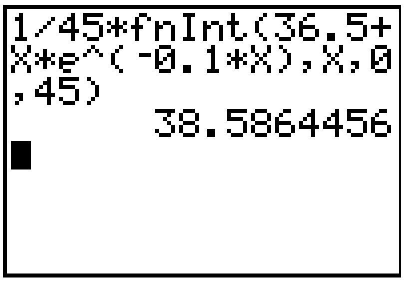
Die Gerade y = 37 schneidet das Schaubild von f an zwei Stellen, aber nur bei t = 45 sinkt die Temperatur unter 37°C.
45 Stunden nach Krankheitsbeginn sinkt die Temperatur daher wieder unter 37°C.

Zum Nachweis, dass die Temperatur danach dauerhaft unter 37°C bleibt, muss nachgewiesen werden, dass für t > 45 das Schaubild von f streng monoton fällt.

Es gilt $f'(t) = e^{-0{,}1t} + t \cdot e^{-0{,}1t} \cdot (-0{,}1) = e^{-0{,}1t} \cdot (1 - 0{,}1t)$
Bedingung: $f'(t) < 0 \Leftrightarrow 1 - 0{,}1t < 0$ (da die e-Funktion immer positive Werte annimmt)
$\Leftrightarrow t > 10$

Daraus folgt, dass das Schaubild von f bereits für t > 10 streng monoton fällt. Somit ist es auch streng monoton fallend für t > 45.

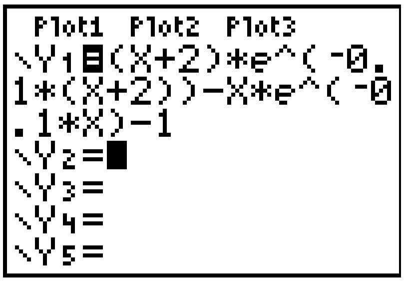
Mittlere Körpertemperatur im Intervall [0;45]: $\frac{1}{45-0} \cdot \int_0^{45} f(t)dt = 38{,}6°C$ (GTR)

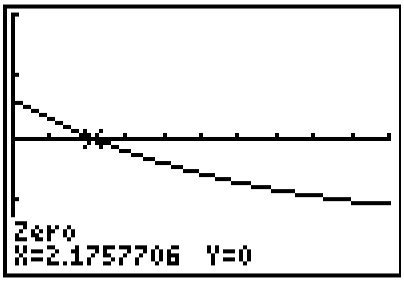


Berechnung des 2-Stunden-Zeitraumes:

Hier lautet die Bedingung $f(t+2) - f(t) = 1 \Leftrightarrow 36{,}5 + (t+2) \cdot e^{-0{,}1(t+2)} - (36{,}5 + t \cdot e^{-0{,}1t}) = 1$
$\Leftrightarrow (t+2) \cdot e^{-0{,}1(t+2)} - t \cdot e^{-0{,}1t} - 1 = 0$

Diese Gleichung wird mit dem GTR gelöst:





Als Lösung ergibt sich t = 2,2.
Das heißt, dass im Zeitraum $2{,}2 \le t \le 4{,}2$ die Temperatur um 1°C zunimmt.

c) Ansatz für die Funktionsgleichung von g: $g(t) = S + a \cdot e^{-kt}$
Hierbei entspricht S der Schranke, an die sich das Schaubild von g für $t \to \infty$ annähert.
Da sich die Temperatur der normalen Körpertemperatur annähert, gilt S = 36,5.

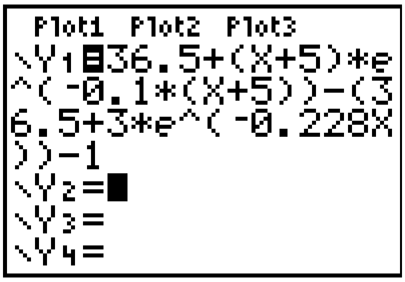
Desweiteren sei $g(0) = f(5) = 39{,}53 \Rightarrow g(0) = 36{,}5 + a \cdot e^0 = 39{,}53 \Rightarrow a \approx 3$
Außerdem sei $g(2) = 38{,}4°C \Rightarrow 36{,}5 + 3 \cdot e^{-k \cdot 2} = 38{,}4 \Rightarrow e^{-2k} = 0{,}633 \Rightarrow k \approx 0{,}228$

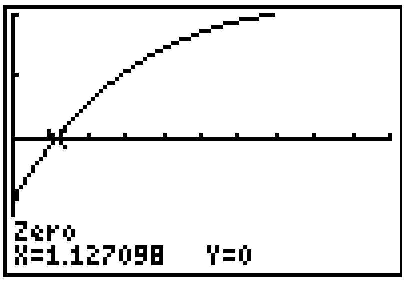
Funktionsgleichung: $g(t) = 36{,}5 + 3 \cdot e^{-0{,}228t}$

Nun ist der Zeitpunkt gesucht, wann die Körpertemperatur erstmals um 1 Grad niedriger ist, als sie ohne Medikament wäre.
Zu vergleichen sind hierzu die Funktionswerte von f und g.
Da die Variable t bei f die Zeit ab dem Krankheitsbeginn darstellt, bei g jedoch erst die Zeit ab der 5.Stunde nach der Medikamenteneinnahme beschreibt, muss in der Funktionsgleichung von f die Variable t durch t+ 5 ersetzt werden.

Als Bedingung ergibt sich: $f(t+5) - g(t) = 1$.
$36{,}5 + (t+5) \cdot e^{-0{,}1(t+5)} - (36{,}5 + 3 \cdot e^{-0{,}228t}) = 1$

Lösung der Gleichung mit dem GTR:





Ca. 1,13 Stunden nach der Medikamenteneinnahme ist die Körpertemperatur um ein Grad niedriger, als sie ohne Medikamente wäre.