Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Wahlteil - Aufgaben Analysis I 1

Aufgabe I 1.1:

Ein Tal in den Bergen wird nach Westen von einer steilen Felswand, nach Osten von einem flachen Höhenzug begrenzt.
Der Querschnitt des Geländes wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion f mit

$$f(x) = -0{,}125x^3 + 0{,}75x^2 - 3{,}125 \text{ im Bereich } -2{,}5 \le x \le 5,$$

dabei weist die positive x-Achse nach Osten (1 LE entspricht 100 m).

a) Skizzieren Sie den Querschnitt des Geländes.
Berechnen Sie die Stelle, an der die östliche Talseite am steilsten ist, und dann die Stelle, an der die westliche Talseite gleich steil ist.
Quer zum Tal befindet sich in West-Ost-Richtung eine Staumauer. Vom tiefsten Punkt des Tals aus gemessen ist sie 312,5 m hoch. Berechnen Sie die Breite der Staumauer an ihrer Oberkante.
Bevor das Wasser aufgestaut wird, muss die dem See zugewandte Seite der Staumauer versiegelt werden. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche. (8 VP)

b) In der Talsohle befindet sich ein Dorf, das bereits nachmittags im Schatten liegt. Nach dem Vorbild des italienischen Ortes Viganella soll auf dem höchsten Punkt des Höhenzugs östlich des Dorfes ein Gerüst mit einem drehbaren Spiegel zur Reflexion von Sonnenlicht aufgestellt werden. Auch hier wird der Querschnitt des Geländes durch das Schaubild der Funktion f beschrieben.
Bestimmen Sie die Mindesthöhe dieses Gerüstes, bei der das Sonnenlicht den tiefsten Punkt des Geländequerschnitts erreichen kann.
Wie hoch müsste das Gerüst werden, damit der gesamte Geländequerschnitt zwischen Dorf und Gerüst beleuchtet werden kann ? (6 VP)

Aufgabe I 1.2:

Hinweis: ab der Abiturprüfung 2012 nicht mehr prüfungsrelevant

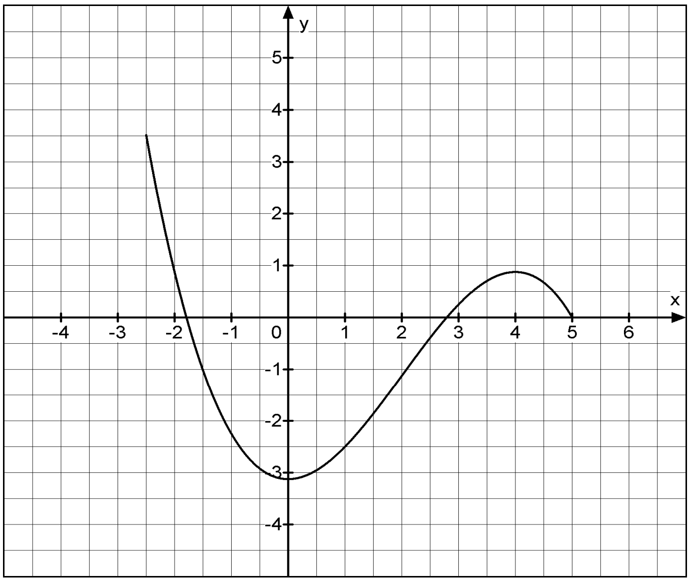
Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = \frac{1}{1-2x}$; $x \ne 0{,}5$.
Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass g für alle $n \ge 1$ die n-te Ableitung

$g^{(n)}(x) = n! \cdot \frac{2^n}{(1-2x)^{n+1}}$ besitzt, wobei $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ für $n \ge 1$ gilt. (4 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2008 Baden-Württemberg (ohne CAS)
Lösungen Wahlteil - Analysis I 1

Aufgabe I 1.1:

a) Skizze vom Querschnitt des Geländes:



Die östliche Talseite ist beim Wendepunkt am steilsten.

Berechnung des Wendepunktes von f:
$f'(x) = -0{,}375x^2 + 1{,}5x \Rightarrow f''(x) = -0{,}75x + 1{,}5 \Rightarrow f'''(x) = -0{,}75$

$f''(x) = 0 \Rightarrow -0{,}75x + 1{,}5 = 0 \Rightarrow x = 2$
$f'''(2) = -0{,}75 \neq 0 \Rightarrow WP(2/-1{,}125)$
An der Stelle **x = 2** ist die östliche Talseite am steilsten mit der Steigung $f'(2) = 1{,}5$.

Nun ist die Stelle an der westlichen Talseite gesucht, die „gleich steil" ist.
Damit ist gemeint, dass die Steigung entweder m = 1,5 oder m = -1,5 sein muss.
Man erkennt anhand des Schaubildes, dass die Tangentensteigungen an der westlichen Talseite alle negativ sind.
Damit ist die Stelle x gesucht mit $f'(x) = -1{,}5 \Rightarrow -0{,}375x^2 + 1{,}5x = -1{,}5$

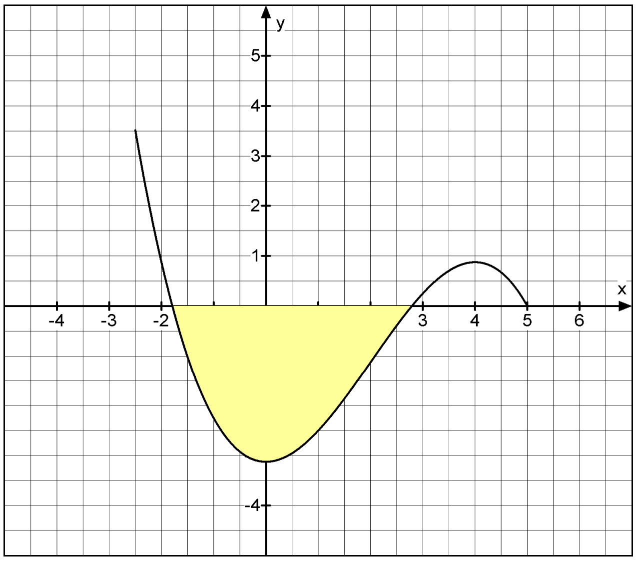
$$-0{,}375x^2 + 1{,}5x + 1{,}5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 2{,}25}}{-0{,}75} = \frac{-1{,}5 \pm \sqrt{4{,}5}}{-0{,}75}$$

Daraus folgt $x_1 \approx -0{,}828$ und $x_2 \approx -4{,}828$.
Da sich nur x_1 an der westlichen Talseite befindet, ist die gesuchte Stelle **x = -0,828**.

Als tiefster Punkt des Tals ergibt sich mit dem GTR der Punkt T(0/-3,125).
Addiert man zum y-Wert des Tiefpunktes nun 312,5 Meter, besitzt die Staumauer, die man sich als waagrechte Gerade vorstellen kann, auf der Höhe y = 0 (die Staumauer entspricht somit anschaulich der x-Achse).

Die Breite der Staumauer entspricht dem Abstand der Nullstellen des Schaubilds von f.
Mit dem GTR ergeben sich die Nullstellen x = -1,7913 und x = 2,7913.
Der Abstand zwischen den beiden Nullstellen beträgt d = 4,5826 und damit ist die Breite der Staumauer an ihrer Oberkante **458,26 Meter**.

Die zu versiegelnde Fläche ist in dem folgenden Schaubild markiert.



Berechnung der Fläche: $A = \int_{-1,7913}^{2,7913} -f(x)dx = 9,02$

(Das negative Vorzeichen im Integral kommt dadurch zustande, dass sich die Fläche unterhalb der x-Achse befindet).

Die zu versiegelnde Fläche der Staumauer beträgt damit $9,02 \cdot 10.000 \text{m}^2$ = **90.200 m²**

b) Das Gerüst befindet sich an der höchsten Stelle östlich des Dorfes, also im Punkt H(4/0,875), wie man leicht mit dem GTR ermitteln kann.
Um die Höhe des Gerüstes zu ermitteln, wird vom tiefsten Punkt T(0/-3,125) eine Tangente an das Schaubild von f gelegt.
Der noch unbekannte Berührpunkt sei B(u/f(u)) und die Tangentensteigung $m = f'(u)$

Aufstellen der Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$

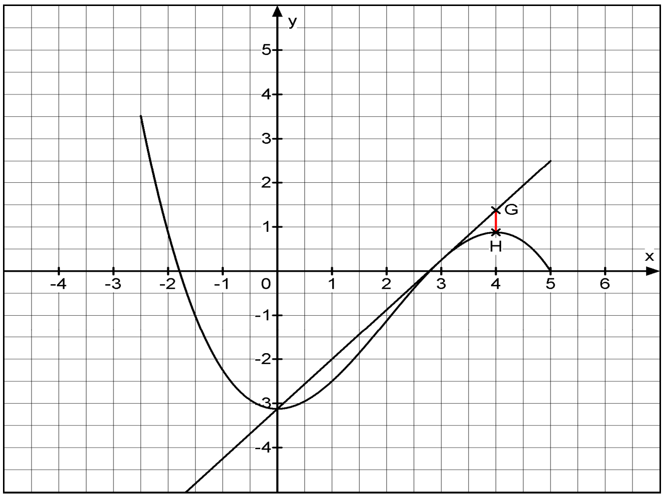
$$y = (-0,375u^2 + 1,5u) \cdot (x-u) - 0,125u^3 + 0,75u^2 - 3,125$$

Nun wird der bekannte Tangentenpunkt T(0/-3,125) eingesetzt:

$$-3,125 = (-0,375u^2 + 1,5u) \cdot (-u) - 0,125u^3 + 0,75u^2 - 3,125$$

$\Rightarrow -0,25u^3 + 0,75u^2 = 0 \Rightarrow 0,25u^2(-u+3) = 0 \Rightarrow u = 0$ oder u = 3.

Der Berührpunkt B(0/f(0)) ist nicht sinnvoll.
Daraus folgt als Berührpunkt B(3/f(3)) = B(3/0,25)



Die Tangentengleichung lautet nun: $y = f'(3) \cdot (x-3) + f(3)$

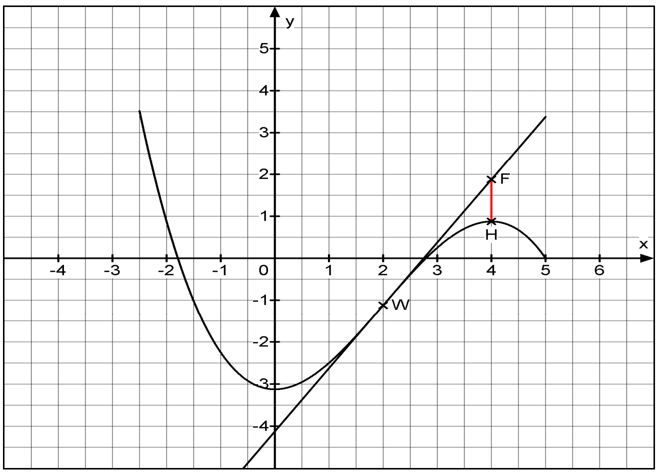
$y = 1{,}125 \cdot (x-3) + 0{,}25 \Rightarrow y = 1{,}125x - 3{,}125$

Der Punkt G auf der Tangente an der Stelle x = 4 hat die Koordinaten G(4/1,375).

Die Höhe h des Gerüstes ergibt damit
h = (y-Wert von G) – (y-Wert von H) = 1,375 – 0,875 = 0,5 also **50 Meter**.

Damit der gesamte Geländequerschnitt zwischen Dorf und Gerüst beleuchtet werden kann, muss die Tangente im Wendepunkt W(2/-1,125) (im Punkt mit der größten Steigung) ermittelt werden. Die Steigung der Tangente in W ist m = 1,5 (siehe Teilaufgabe a)).

Als Tangentengleichung ergibt sich y = 1,5x – 4,125 (Wendetangente)



Der Punkt F auf der Wendetangente besitzt die Koordinaten F(4/1,875).

Die Höhe h des Gerüstes ergibt damit
h = (y-Wert von F) – (y-Wert von H) = 1,875 – 0,875 = 1 also **100 Meter**.

Aufgabe I 1.2:

1.) **Induktionsanfang:**

Zeige, dass die Aussage für n = 1 richtig ist.

Es gilt $g(x) = \frac{1}{1-2x} \Rightarrow g'(x) = \frac{-1\cdot(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{2}{(1-2x)^2}$

Laut der Formel gilt $g^{(1)} = 1!\cdot\frac{2^1}{(1-2x)^2} = \frac{2}{(1-2x)^2}$, damit ist die Aussage für n = 1 gezeigt.

2.) **Induktionsschritt:**

a) **Formulierung der Induktionsvoraussetzung:**

Es gibt eine natürliche Zahl n, so dass die Funktion $g(x) = \frac{1}{1-2x}$ die n-te Ableitung

$g^{(n)}(x) = n!\cdot\frac{2^n}{(1-2x)^{n+1}}$ besitzt.

b) **Formulierung der Induktionsbehauptung:**

Die Aussage gilt für n+1, das heißt die Funktion $g(x) = \frac{1}{1-2x}$ besitzt die (n+1)-te

Ableitung $g^{(n+1)}(x) = (n+1)!\cdot\frac{2^{n+1}}{(1-2x)^{n+2}}$

c) **Beweis des Induktionsschrittes:**

$$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}(x)\right)' = n!\cdot\frac{-2^n\cdot(n+1)(1-2x)^n\cdot(-2)}{(1-2x)^{2n+2}} = (n+1)!\cdot\frac{2^{n+1}}{(1-2x)^{n+2}}$$

Die letzte Umformung ergibt sich durch $n!\cdot(n+1) = (n+1)!$ und $2^n\cdot 2 = 2^{n+1}$

Damit ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen bewiesen.