BE

**II.**

1. Gegeben ist die Schar der Funktionen $g_k : x \mapsto \frac{x^2 - k}{x^2 - 1}$ mit $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$. Der Graph von $g_k$ wird mit $G_k$ bezeichnet.

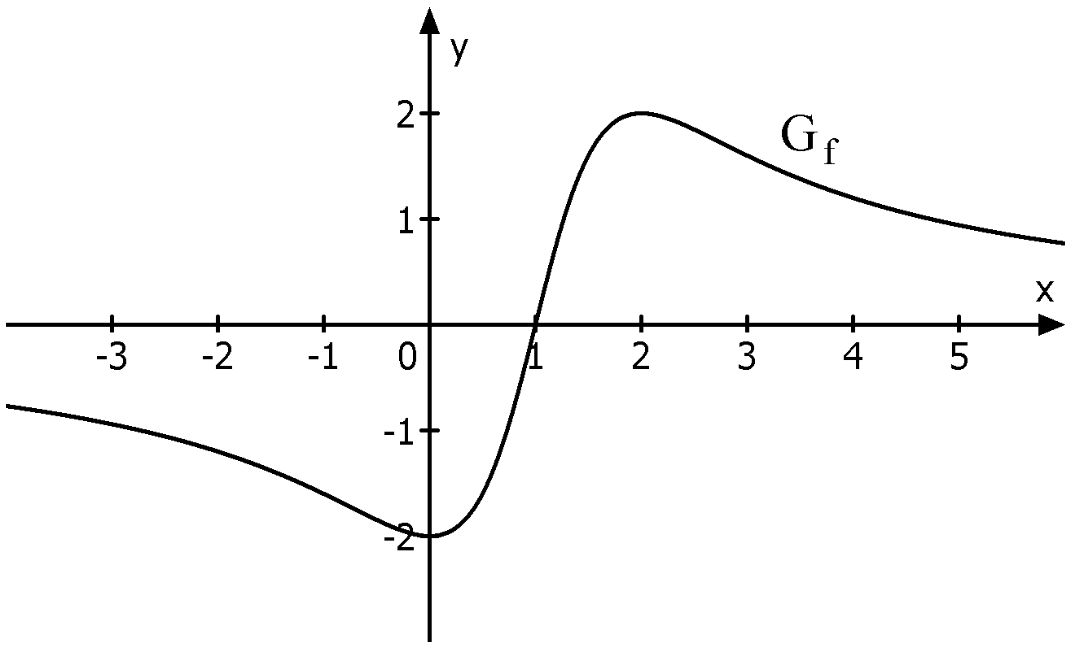
6 a) Untersuchen Sie $G_k$ auf Symmetrie, bestimmen Sie die Schnittpunkte von $G_k$ mit den Koordinatenachsen und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten an.

6 b) Zeigen Sie, dass $G_k$ genau einen Extrempunkt besitzt, und bestimmen Sie dessen Lage und Art in Abhängigkeit von k.

6 c) Wählen Sie zwei Scharparameter $k_1$ und $k_2$ so, dass sich die zugehörigen Graphen in der Art ihres Extrempunkts unterscheiden. Skizzieren Sie $G_{k_1}$ und $G_{k_2}$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein geeignetes Koordinatensystem.

2. Die Abbildung zeigt den Graphen $G_f$ einer in $\mathbb{R}$ definierten, stetigen Funktion f. $G_f$ ist punktsymmetrisch zum einzigen Schnittpunkt $S(1|0)$ mit der x-Achse. Die Extrempunkte von $G_f$ sind $(0|-2)$ und $(2|2)$.

   Die Funktion $F : x \mapsto \int_{-2}^{x} f(t)dt$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist eine Integralfunktion von f.




(Fortsetzung nächste Seite)

BE

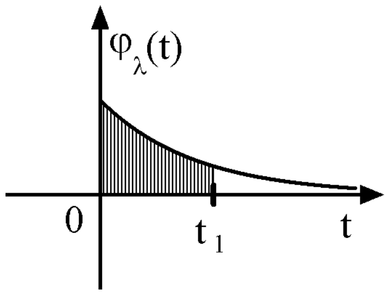
5 a) Geben Sie Monotonie- und Krümmungsverhalten des Graphen von F an.

4 b) Begründen Sie, dass F genau zwei Nullstellen hat, und geben Sie diese an.

5 c) Begründen Sie, dass für $h > 0$ gilt: $F(1-h) = F(1+h)$.
Welche Bedeutung hat diese Beziehung für den Graphen der Integralfunktion F?

3. Für die Abschätzung des Risikos von Meteoriteneinschlägen auf der Erde spielt die folgende Funktionenschar eine zentrale Rolle:

$$\varphi_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t},\ t \geq 0,\ \lambda > 0$$




t gibt die Wartezeit bis zum ersten Einschlag in Jahren an. $\lambda$ ist ein von der Meteoritengröße abhängiger Parameter.
Für einen Zeitpunkt $t_1 > 0$ entspricht der Inhalt der schraffierten Fläche (vgl. Skizze) der Wahrscheinlichkeit, dass bis zum Zeitpunkt $t_1$ der erste Meteoriteneinschlag erfolgt ist.

3 a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bis zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{1}{\lambda}$ der erste Einschlag erfolgt ist.

5 b) Berechnen Sie die mittlere Wartezeit $\overline{T}$ (in Jahren) bis zum ersten Einschlag, die durch $\overline{T} = \int_0^\infty t \cdot \varphi_\lambda(t)\,dt$ gegeben ist.

40