Abiturprüfung

Matrizenrechnung

Aufgaben aus Hamburg zum Thema

Übergangsmatrizen zu Populationen

Datei Nr. 72502

Stand: 13. November 2012

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

VORWORT

Dies ist eine Sammlung von Abituraufgaben zum Thema Entwicklung von Populationen, Prozess-Diagramme und Übergangsmatrizen. Sie stammen alle aus Hamburg. Zu einigen Aufgaben sind mehrere Varianten herausgegeben worden. Ich habe ab und zu den Text redaktionell leicht geändert.

Diese Aufgaben gibt es auch alle im Internet. Ich habe mich jedoch bemüht, **die Lösungen sehr ausführlich** zu gestalten und auch oft mehrere Lösungsmöglichkeiten anzugeben, so dass sich meine Arbeit auch wirklich lohnt. Auch gebe ich hilfreiche Tipps, wie man trickreich einen CAS-Rechner (TI Nspire) einsetzen kann. Mein Ziel ist es, die Lösungen für alle einsichtig zu gestalten, also für Schüler und auch für Lehrer, die diese Materie nicht gut kennen.

Ich will und kann mich hier nicht eines Kommentars zu diesen Aufgaben enthalten.

Diese Aufgaben sind alle äußerst interessant. Man staunt, wenn man sie das erste Mal liest, wie gut man doch diese biologischen Zusammenhänge mathematisch beschreiben kann. Man muss die Aufgabensteller hinsichtlich des dahinter steckenden Sachverstandes und Wissens loben. Erschreckend war für mich jedoch die Erkenntnis, dass diese Aufgaben im Abitur ab geprüft werden. **Vor allem die Grundkursaufgaben** beschränken sich auf einen so geringen mathematischen Inhalt, dass man an ihrer Berechtigung im Hinblick darauf, dass die Abiturprüfung ja mathematische Fähigkeiten und Kenntnisse anzweifeln kann.

Sicher ist die Behandlung solcher Aufgaben im Unterricht ein MUSS. Hier erkennen Schüler, was man mit Matrizen alles berechnen kann. Wenn eine Aufgabe aber hauptsächlich darin besteht, einige Multiplikationen von Matrizen mit Vektoren durchzuführen, eine Gleichung lösen zu müssen und die Zahlen einer Matrix zu interpretieren, dann hat sie in einer Prüfung nichts zu suchen. Vor allem dann nicht, wenn man sich die Rechnungen noch von einem Rechner abnehmen lassen darf.

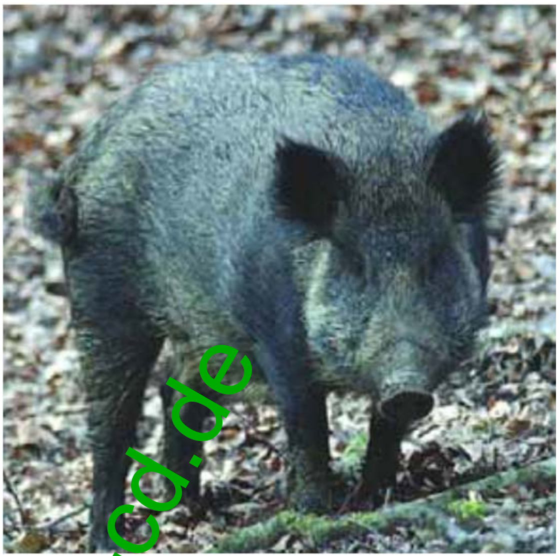
Dennoch: Die Aufgaben machen Spaß – wenn man nicht zu viele davon rechnet. Und weil der Bedarf nach solchen Aufgaben in einigen Bundesländern groß ist, verfasse ich diese Texte.

Hinweis:

Zum Thema **Eigenvektoren** gibt es speziell im Hinblick auf Aufgaben zu **Mehrstufigen Prozessen** den Hinführungstext 62300.

Inhalt

Aufgabe 1: Schwarzwild (Hamburg 2008, GK)



Das Schwarzwild ist in vielen Teilen Europas seit geraumer Zeit auf dem Vormarsch und es häufen sich landwirtschaftliche Schäden. Verursacht wird dieses enorme Wachstum durch die hohe Fortpflanzungsleistung dieser Art. Unter günstigen Bedingungen, d. h. bei gutem Futterangebot, gebären beim Schwarzwild bereits die Frischlinge (Wildschweine im ersten Lebensjahr) zu einem hohen Anteil. Zusätzlich verringert sich ihre Sterblichkeit über die Wintermonate, und auch die Fruchtbarkeit der reifen Bachen (weibliche Wildschweine, älter als zwei Jahre) steigt. An diesem Punkt kommt der Mensch ins Spiel: Vor allem durch die Landwirtschaft, aber auch durch falsche Fütterung, werden ungewollt Nahrungsquellen für das Schwarzwild verfügbar gemacht. Damit kommt es zwangsläufig zu einem dramatischen Anwachsen der Bestände.

Im Folgenden werden nur weibliche Wildschweine betrachtet. Diese werden in drei Altersklassen eingeteilt. Dabei gelte:

F_n Anzahl der Frischlinge (höchstens ein Jahr alt) zum Zeitpunkt n

U_n Anzahl der Überläuferbachen (älter als ein Jahr bis maximal zwei Jahre alt) zum Zeitpunkt n

B_n Anzahl der reifen Bachen (älter als zwei Jahre) zum Zeitpunkt n

n Zeit (gemessen in Jahren)

Eine Population zum Zeitpunkt n werde durch einen Vektor $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} F_n \\ U_n \\ B_n \end{pmatrix}$ beschrieben.

a) Für eine Population gilt:

Die jährliche Geburtenrate bei Frischlingen beträgt 0,13, bei Überläuferbachen 0,56 und bei reifen Bachen 1,64.

Von den Frischlingen überleben jährlich 25 %, von den Überläuferbachen 56 % und von den reifen Bachen 58 %.

Übertragen Sie den folgenden noch unvollständigen Übergangsgraphen auf Ihr Bearbeitungsblatt und ergänzen Sie ihn so, dass die Entwicklung der Population dargestellt wird.

Frischlinge Überläuferbachen reife Bachen (10 P)

b) Es seien $\vec{v}_n$ und $\vec{v}_{n+1}$ die Populationsvektoren zu den Zeitpunkten n bzw. n + 1. Mittels einer Übergangsmatrix A kann der folgende Modellzusammenhang formuliert werden: $\vec{v}_{n+1} = A \cdot \vec{v}_n$. Geben Sie an, welche der folgenden vier Matrizen für A zu wählen ist, sodass die in Aufgabenteil a) dargestellte Entwicklung beschrieben wird.

$$\begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,56 & 0,58 \\ 0,13 & 0,56 & 1,64 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,13 & 0,56 & 1,64 \\ 0,56 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,58 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,13 & 0,56 & 1,64 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,56 & 0,58 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0,13 & 0,56 & 1,64 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,58 & 0,56 \end{pmatrix}$$

Begründen Sie für eine der drei nicht gewählten Matrizen, warum diese als Übergangsmatrix nicht infrage kommt.

(15 P)

Die Werte aus Aufgabenteil a) beruhen auf Untersuchungen von Wildschweinpopulationen, die unter ungünstigen Bedingungen leben: Die Winter sind lang und streng, und nicht immer ist Futter vorhanden. Die folgenden Matrizen P und Q hingegen beschreiben die Entwicklung von Wildschweinpopulationen unter *gemäßigten* bzw. *guten* Lebensbedingungen.

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}56 & 1{,}76 & 2{,}29 \\ 0{,}52 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}60 & 0{,}62 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 0{,}26 & 0{,}94 & 1{,}93 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0{,}61 \end{pmatrix}$$

c) Entscheiden Sie, welcher der beiden Matrizen P und Q gemäßigte Lebensbedingungen und welcher gute Lebensbedingungen für Wildschweine zugrunde liegen.

(10 P)

d) Die Wildschweinpopulation setze sich zum Zeitpunkt n = 1 aus 60 Frischlingen, 23 Überläuferbachen und 17 reifen Bachen zusammen.

- Berechnen Sie im Rahmen des Modells unter Verwendung der Matrix Q, wie viele Frischlinge, wie viele Überläuferbachen und wie viele reife Bachen zum Zeitpunkt n = 2 erwartet werden können.
- Bestimmen Sie auch, wie viele Frischlinge, wie viele Überläuferbachen und wie viele reife Bachen zum Zeitpunkt n = 0 vorhanden waren.

(15 P)

e) Gehen Sie wie im Aufgabenteil d) davon aus, dass sich die Wildschweinpopulation zum Zeitpunkt n = 1 aus 60 Frischlingen, 23 Überläuferbachen und 17 reifen Bachen zusammensetzt. Bestimmen Sie im Rahmen des Modells unter Verwendung der Matrix Q, zu welchem Zeitpunkt zum ersten Mal ein Gesamtbestand von mehr als 220 Tieren zu erwarten ist.
Geben Sie diesen Gesamtbestand an.

(10 P)

f) Durch bestimmte hormonelle Futterzusätze kann die Geburtenrate der reifen Bachen gesenkt werden. Untersuchen Sie im Rahmen des Modells mit Hilfe von Rechnerexperimenten sowohl für die Matrix P als auch für die Matrix Q, ob durch eine Senkung dieser Geburtenrate erreicht werden kann, dass

- die Wildschweinpopulation langfristig ausstirbt,
- sich die Wildschweinpopulation langfristig sowohl in ihrem Gesamtbestand als auch in ihrer Verteilung auf die Altersklassen stabilisiert, aber nicht ausstirbt.

Variieren Sie dazu den Wert für die Geburtenrate der reifen Bachen und dokumentieren Sie Ihre wesentlichen Ergebnisse auf Ihrem Bearbeitungsblatt in einer Tabelle wie der Untenstehenden. Interpretieren Sie Ihre Resultate. Verwenden Sie für Ihre Experimente jeweils eine Startpopulation bestehend aus 78 Frischlingen, 39 Überläuferbachen und 50 reifen Bachen. Für den Fall, dass Sie eine Stabilisierung der Population erreichen können, ermitteln Sie den Wert der dazugehörigen Geburtenrate gerundet auf eine Nachkommastelle.

(25 P)

Hinweise:
Aufgrund der Struktur der Matrizen P und Q tritt ein periodisches Populationsverhalten nicht ein.
Wählen Sie Ihre Zeitschritte so, dass die Rechenzeiten sinnvoll bleiben.

Matrix	Wert der Geburtenrate der reifen Bachen	Anzahl n der durchgeführten Zeitschritte	Populationsvektor nach n Zeitschritten

g) Eine andere Möglichkeit, eine Population zu begrenzen, ist der Abschuss. Dabei ist es wichtig zu beachten, dass Bachen in der Sozialstruktur von Wildschweingruppen eine wichtige Rolle spielen; ohne sie würden die Frischlinge keine Verhaltensorientierung bekommen. Deshalb dürfen nicht zu viele Bachen erlegt werden.

Im Folgenden soll eine durch die Matrix P beschriebene Populationsentwicklung betrachtet werden.

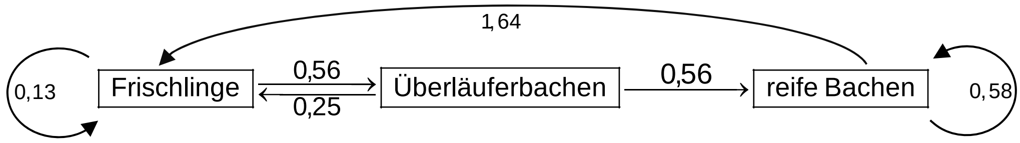
Die Wildschweinpopulation setze sich zum Zeitpunkt $n = 1$ wie im Aufgabenteil d) wieder aus 60 Frischlingen, 23 Überläuferbachen und 17 reifen Bachen zusammen.

Bestimmen Sie einen Populationsbestand, auf den der ursprüngliche Bestand durch Abschuss reduziert werden müsste, sodass die Population im nächsten Jahr wiederum nur auf insgesamt 100 Tiere anwächst. In diesem neuen Populationsbestand sollen genau zehn alte Bachen und genau zehn Überläuferbachen vorkommen.

(15 P)

Lösung Aufgabe 1: Schwarzwild

a) **Prozessdiagramm / Übergangsdiagramm**:



b) Die dritte Matrix $\begin{pmatrix} 0,13 & 0,56 & 1,64 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,56 & 0,58 \end{pmatrix}$ beschreibt dieses Modell,

was man erkennt, wenn man dazu eine Tabelle erstellt:

	F	U	B
F	0,13	0,56	1,64
U	0,25	0	0
B	0	0,56	0,58

Die anderen Matrizen passen nicht dazu: (Je eine Begründung)

$\begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,56 & 0,58 \\ 0,13 & 0,56 & 1,64 \end{pmatrix}$ Die Zahl 0,25 besagt, dass 25% der Frischlinge bereits wieder Frischlinge gebären, im Text sind aber 13 % angegeben.

$\begin{pmatrix} 0,13 & 0,56 & 1,64 \\ 0,56 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,58 \end{pmatrix}$ Die Zahl 0,25 besagt hier, dass 25% der Überläuferbachen zu reifen Bachen werden, in Wirklichkeit sind dies 56%.

$\begin{pmatrix} 0,13 & 0,56 & 1,64 \\ 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,58 & 0,56 \end{pmatrix}$ Die Zahl 0,58 besagt, dass 58% der Überläuferbachen zu reifen Bachen werden, im Text sind aber 56 % angegeben.

c) Gegeben sind $P = \begin{pmatrix} 0,56 & 1,76 & 2,29 \\ 0,52 & 0 & 0 \\ 0 & 0,60 & 0,62 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 0,26 & 0,94 & 1,93 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,61 \end{pmatrix}$

P lässt auf bessere Lebensbedingungen schließen als Q, weil in P die Geburtenraten (0,56, 1,76 und 2,29) sowie die Überlebensraten (0,60 und 0,62) besser sind als in Q.
In Q sind alle von 0 verschiedenen Elemente kleiner als in P.

d) Die Wildschweinpopulation setze sich zum Zeitpunkt n = 1 aus 60 Frischlingen, 23 Überläuferbachen und 17 reifen Bachen zusammen:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 60 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = Q \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,26 & 0,94 & 1,93 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,61 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70,03 \\ 30 \\ 21,87 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Man erwartet also 70 Frischlinge, 20 Überläuferbachen und 22 reife Bachen.

Gesucht ist $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, so dass gilt: $\vec{v}_1 = Q \cdot \vec{v}_0$ d. h. $\begin{pmatrix} 0,26 & 0,94 & 1,93 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,61 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 23 \\ 17 \end{pmatrix}$

d. h.
$$\left\{ \begin{array}{l} 0,26x + 0,94y + 1,93z = 60 \\ 0,5x = 23 \\ 0,5y + 0,61z = 17 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Lösungsvektor: $\vec{v}_0 \approx \begin{pmatrix} 46 \\ 8,95 \\ 20,53 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 46 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix}$ (Rechner-Lösung)

e) Wildschweinpopulation zum Zeitpunkt n = 1: 60 Frischlinge, 23 Überläuferbache und 17 reife Bachen Berechnung des Gesamtbestand von mehr als 220 Tieren.

1. Möglichkeit: Mit einem Rechner werden die nächsten Populationen berechnet und dabei die Komponenten addiert. Ich habe hierzu eine Vektorfunktion definiert.

2. Möglichkeit: Man kann die Addition der Komponenten über das Skalarprodukt $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} = x + y + z$

Define $v(n)=q^{n-1}\cdot v1$	Fertig
$v(2)$	$\begin{bmatrix}70.03 \\ 30. \\ 21.87\end{bmatrix}$
$v(3)$	$\begin{bmatrix}88.6169 \\ 35.015 \\ 28.3407\end{bmatrix}$
$v(4)$	$\begin{bmatrix}110.652 \\ 44.3085 \\ 34.7953\end{bmatrix}$
$v(5)$	$\begin{bmatrix}137.574 \\ 55.326 \\ 43.3794\end{bmatrix}$

© Summe der Komponenten

Define $s(n)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\cdot v(n)$	Fertig
$s(2)$	$[121.9]$
$s(3)$	$[151.973]$
$s(4)$	$[189.756]$
$s(5)$	$[236.28]$

durchführen lassen. Ich habe das rechst getan und dazu eine Summenfunktion definiert, die sich auf die Vektorfunktion bezieht.

Ergebnis: Zum Zeitpunkt n = 5 sind 236 Tiere vorhanden, also erstmalig mehr als 220.

f) Untersuchen Sie im Rahmen des Modells mit Hilfe von Rechnerexperimenten sowohl für die Matrix P als auch für die Matrix Q, ob durch eine Senkung dieser Geburtenrate erreicht werden kann, dass

- die Wildschweinpopulation langfristig ausstirbt,
- sich die Wildschweinpopulation langfristig sowohl in ihrem Gesamtbestand als auch in ihrer Verteilung auf die Altersklassen stabilisiert, aber nicht ausstirbt.

Variieren Sie dazu den Wert für die Geburtenrate der reifen Bachen und dokumentieren Sie Ihre wesentlichen Ergebnisse auf Ihrem Bearbeitungsblatt in einer Tabelle wie der Untenstehenden. Interpretieren Sie Ihre Resultate. Verwenden Sie für Ihre Experimente jeweils eine Startpopulation bestehend aus 78 Frischlingen, 39 Überläuferbachen und 50 reifen Bachen. Für den Fall, dass Sie eine Stabilisierung der Population erreichen können, ermitteln Sie den Wert der dazugehörigen Geburtenrate gerundet auf eine Nachkommastelle.

Matrix	Wert der Geburtenrate der reifen Bachen	Anzahl n der durchgeführten Zeitschritte	Populationsvektor nach n Zeitschritten
P	Heruntergesetzt auf 0	30	$\vec{v}_{30} \approx \begin{pmatrix}128.796 \\ 52.455 \\ 47.919\end{pmatrix}$
Q	Heruntergesetzt auf 0	50	$\vec{v}_{50} \approx \begin{pmatrix}0{,}006 \\ 0{,}003 \\ 0{,}008\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}$

Selbst, wenn man die Geburtenrate der reifen Bachen in P auf 0 heruntersetzt, wächst die Population stark an. Nach 30 Zeitschritten sind es schon über 200.000 Tiere.

Dagegen stirbt die Population aus, wenn man in Q diese Rate auf 0 setzt.

Die CAS-Screenshots zeigen diese Situation: …..

CD!