M1. ANALYSIS

BE

AI – Teil 1

3 1. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f: x \mapsto (e^x - 2)\cdot(x^3 - 2x)$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

6 2. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{\ln x}{x-2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_f.

Geben Sie D_f an und bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 1$.

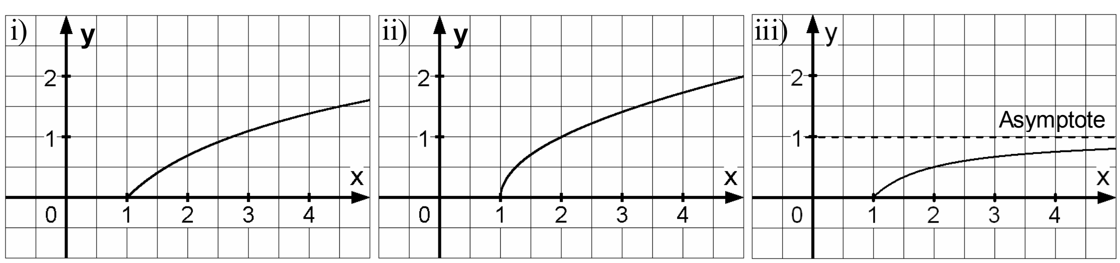
3 3. Geben Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion f an, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- Der Graph von f berührt an der Stelle $x = 1$ die x-Achse.
- f hat $x = 3$ als Polstelle.

3 4. Bestimmen Sie den Term einer Stammfunktion der Funktion $f: x \mapsto \ln(2x),\ D_f = \mathbb{R}^+$.

5 5. Für $x \geq 1$ sind die Funktionen mit den folgenden Termen gegeben:
$f(x) = \sqrt{x-a}$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = -\frac{1}{x} + b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$.

Ordnen Sie die Funktionen den nachfolgenden Graphen zu und bestimmen Sie die Parameter a und b. Erklären Sie Ihr Vorgehen.



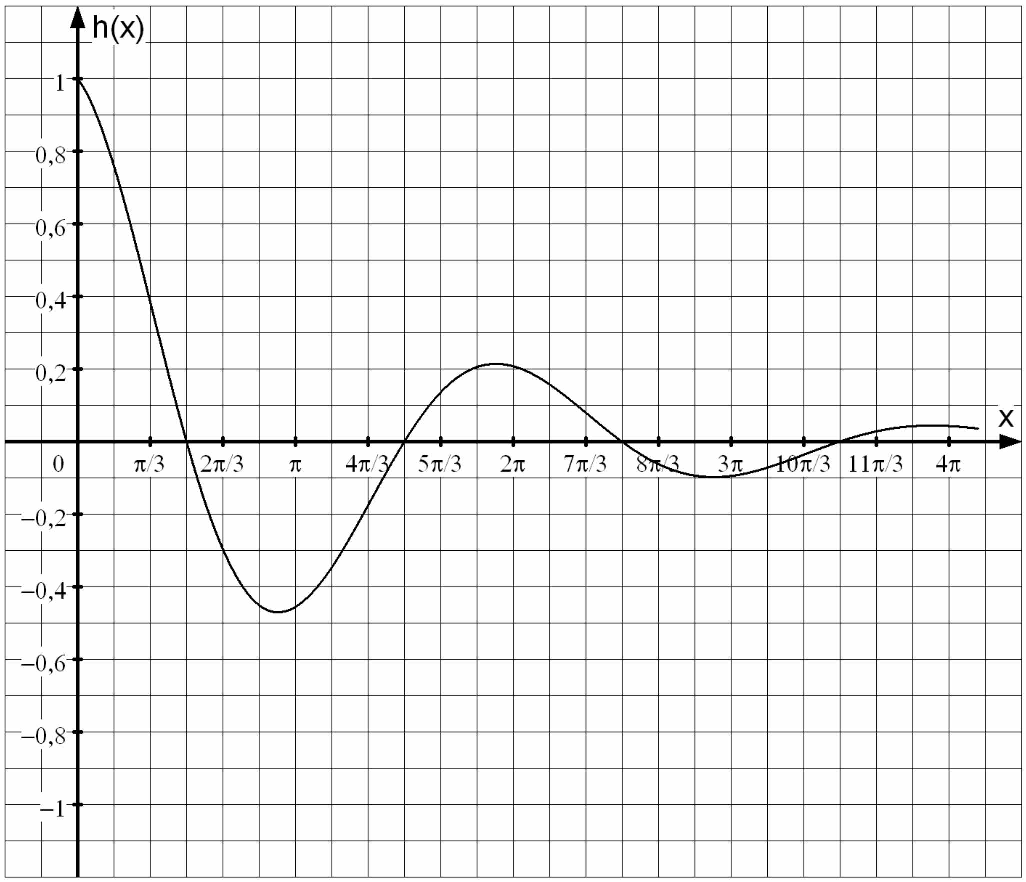
(Fortsetzung nächste Seite)

BE	**AI – Teil 2**
	6. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2$ mit $D_f = \mathbb{R}$.
2	a) Zeichnen Sie den Graphen G_f in ein Koordinatensystem.
6	b) Dem Flächenstück, das G_f mit der x-Achse einschließt, werden Rechtecke so einbeschrieben, dass jeweils eine Rechteckseite auf der x-Achse liegt. Berechnen Sie den größtmöglichen Flächeninhalt A eines solchen Rechtecks. [Ergebnis: $A = \frac{16}{9}\sqrt{3}$]
5	c) Berechnen Sie, wie viel Prozent des Flächenstücks, das G_f mit der x-Achse einschließt, vom Rechteck maximalen Flächeninhalts aus Teilaufgabe 6b bedeckt werden.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

7. Gegeben sind die Funktionen $g: x \mapsto e^{-\frac{1}{4}x}$, $D_g = \mathbb{R}$, und $h: x \mapsto e^{-\frac{1}{4}x} \cdot \cos x$, $D_h = \mathbb{R}$. Der Graph von h ist für $x \geq 0$ im nachfolgenden Diagramm dargestellt.



8 a) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von g und geben Sie das Verhalten von g für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.
Berechnen Sie die Funktionswerte $g(0)$, $g(\pi)$, $g(2\pi)$, $g(3\pi)$ und $g(4\pi)$ und zeichnen Sie damit die Graphen von g und von $-g$ in obiges Koordinatensystem ein.

3 b) Die Funktion h entsteht aus der Kosinusfunktion $x \mapsto \cos x$, $D = \mathbb{R}$, durch Multiplikation mit der Funktion g. Beschreiben Sie, inwiefern sich der Graph von h aufgrund dieser Multiplikation vom Graph der Kosinusfunktion unterscheidet. Gehen Sie dabei auch auf die Nullstellen von h und die Funktionswerte $h(n\pi)$, $n \in \mathbb{N}$, ein.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
6	c) Berechnen Sie den Term $h'(x)$ der ersten Ableitung von h und weisen Sie nach, dass für Extremstellen von h gilt: $\tan x = -0{,}25$. Zeigen Sie damit, dass die Extremstellen von h gegenüber den Extremstellen der Kosinusfunktion verschoben sind.
4	d) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen I und II wahr oder falsch sind, und machen Sie Ihre Antworten plausibel: I. $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$ II. $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$
3	e) Die Funktion $H: x \mapsto \frac{16}{17} e^{-\frac{1}{4}x}(\sin x - \frac{1}{4}\cos x)$, $D_H = \mathbb{R}$, ist Stammfunktion von h. Zeigen Sie durch Rechnung, dass $\int\limits_0^{2\pi} h(x)\,dx$ positiv ist, und deuten Sie diesen Zusammenhang am Graph von h.
3	f) Es gibt Werte a > 0, für die $\int\limits_0^{a} h(x)\,dx$ negativ ist. Geben Sie einen solchen Wert an und begründen Sie Ihre Wahl ohne Rechnung.
60	