Prüfungsaufgaben

Stochastik

Aus Mecklenburg-Vorpommern

Aus den Jahren 2009 bis 2013

Datei Nr. 73111

Stand 4. August 2013

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Der Bereich Stochastik wird in den einzelnen Bundesländern ganz unterschiedlich gewichtet.

In einigen Ländern gibt es umfassende Prüfungsaufgaben mit zum Teil hohen Anforderungen.
In anderen dagegen wird Stochastik zwar unterrichtet, aber in der Abiturprüfung wird nur Grundwissen abgefragt.

Dort findet man also oft nur weniger komplexe Aufgaben aus dem Bereich Stochastik.

In MV gibt es seit 2006 kurze Pflichtaufgaben sowie Wahlaufgaben aus Analysis oder Vektorgeometrie, die Teilaufgaben aus dem Bereich der Stochastik enthalten.

Für das Training der von vielen ungeliebten Stochastik eignen sich gerade solche kürzeren Aufgaben am besten, weil man dort Routine bekommt, was vielen in der Stochastik fehlt.

Große Aufgaben sind oft so speziell, dass ein intensives Studium solcher Aufgaben viel Zeit kostet und der Trainingseffekt für Stochastik-Methoden eher gering ist.

Ich stelle hier solche Aufgabenteile so zusammen, wie sie jahrgangsweise erschienen sind.

Inhalt

Aufgaben aus verschiedenen Prüfungsbereichen 2009

MV 2009 – 1 (Pflichtaufgabe)

3.1 Eine Tür kann nur mit einem Code, der aus vier Feldern besteht, geöffnet werden.

Für jedes Feld stehen die Zeichen „0“ oder „1“ zur Verfügung.

Wie viele verschiedene vierstellige Codes sind höchstens möglich?

3.2 Ein Würfel wird 100-mal geworfen.

Formulieren Sie jeweils das Gegenereignis zu den folgenden Ereignissen.

A: Weniger als 10-mal erscheint die Augenzahl 6.
B: Mindestens bei der Hälfte der Würfe fällt eine 3 oder eine 4.

3.3 In einem Behälter liegen 2 rote und 3 blaue Kugeln.

Es wird eine Kugel zufällig gezogen, ihre Farbe notiert und nicht wieder in den Behälter gelegt.

Anschließend wird dieser Vorgang mit einer zweiten Kugel wiederholt.

a) Begründen Sie, dass es sich bei diesem Vorgang nicht um eine Bernoulli-Kette handelt.

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe besitzen.

MV 2009 – 2 (Teilaufgabe aus „Stochastik und Analysis“)

Eine mittelständische Firma aus dem Metall verarbeitenden Gewerbe stellt u.a. Räucheröfen her. Mit diesen Produkten präsentiert sich die Firma regelmäßig auf Verbrauchermessen. Langfristige Beobachtungen haben ergeben, dass sich ca. 2 % aller Besucher derartiger Messen speziell für diese Räucheröfen interessieren.

a) Bei einer solchen Messe kommen an einem Tag 3450 Besucher.

Geben Sie an, mit wie vielen Interessenten die Vertreter dieser Firma an diesem Tag rechnen können.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

A: Weniger als 60 Interessenten besuchen an diesem Tag den Stand.

B: Mehr als 80 Interessenten besuchen an diesem Tag den Stand.

C: Mindestens 60, aber höchstens 70 Interessenten besuchen an diesem Tag den Stand.

b) Die Firmenleitung beschließt, ihr Engagement bei der nächsten Messe zu verstärken und bereitet dazu ein Gewinnspiel für 5000 Besucher vor. Gespielt wird mit 4 gewöhnlichen Würfeln, bei denen jeweils die Zahlen 1 bis 6 mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Bei jedem Wurf werden alle 4 Würfel gleichzeitig geworfen. Würfelt man einen 6-er-Pasch, d.h. alle 4 Würfel zeigen zugleich die 6 an, gewinnt man einen Räucherofen im Wert von 690 €. Würfelt man einen anderen Pasch, gewinnt man ein Buch zum Thema Räuchern im Wert von 15 €. Weitere Preise gibt es nicht, das Spiel ist für die Besucher kostenlos.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für den Gewinn eines Räucherofens bzw. eines Buches bei einem Wurf.

Berechnen Sie den zu erwartenden Gesamtwert aller Gewinne, wenn 5000 Besucher jeweils genau einmal an diesem Spiel teilnehmen.

MV 2009 – 3 (Teilaufgabe aus „Analytische Geometrie und Stochastik“)

3.2 Die Firma „HAMMER & HART“ produziert Geräte, von denen erfahrungsgemäß 2 % als Garantiefälle reklamiert werden.

3.2.1 Berechnen Sie Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 600 verkauften Geräten die Anzahl der Garantiefälle weniger als 15 beträgt.

3.2.2 Ermitteln Sie, nach wie vielen verkauften Geräten die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten mindestens eines Garantiefalles erstmals über 75 % liegt.

3.2.3 Es wird vermutet, dass der Anteil der Garantiefälle doch höher sein könnte als angegeben. Dazu sollen 1000 Geräte in ihrer Garantiezeit beobachtet werden. Formulieren und begründen Sie dazu eine Entscheidungsregel, wobei die Irrtumswahrscheinlichkeit zwischen 5 % und 6 % liegen soll.

MV 2009 – 4 (Teilaufgabe aus „Analysis und Stochastik“)

3.2 Bei der Herstellung von Balken werden zwei Fehler, Fehler I und Fehler II, registriert, die unabhängig voneinander auftreten. Der Fehler I wird erfahrungsgemäß bei 3 % aller Balken registriert, der Fehler II bei 5 %. Der laufenden Produktion wird auf gut Glück ein Balken entnommen und auf das Vorhandensein beider Fehler untersucht.

3.2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.

A: Der Balken hat den Fehler I, aber nicht den Fehler II.
B: Bei dem Balken werden beide Fehler festgestellt.
C: Der Balken ist fehlerfrei.

3.2.2 Ermitteln Sie, wie viele fehlerfreie Balken man in einer Lieferung von 200 solcher Balken erwarten kann. Die Anzahl der fehlerfreien Balken kann als binomialverteilte Zufallsvariable angenommen werden.

3.2.3 Berechnen Sie, wie hoch der Prozentsatz der Balken mit registriertem Fehler II sein müsste, damit die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines fehlerfreien Balkens bei sonst gleichen Bedingungen auf ca. 95 % steigt.

MV 2009 – 5 (Teilaufgabe aus „Analysis und Stochastik“)

3.6 Bei der Herstellung weisen erfahrungsgemäß maximal 4 % der Schränke Fehler auf. Die Anzahl der fehlerhaften Schränke wird als binomialverteilt angenommen.

Es wird ein verändertes Herstellungsverfahren erprobt, von dem ein Kritiker behauptet, es erhöhe den Anteil der fehlerbehafteten Schränke. Um diese Behauptung zu überprüfen, werden der nach dem neuen Verfahren laufenden Produktion 20 Schränke zufällig entnommen und geprüft. Geben Sie eine Entscheidungsregel dieses Testes für den Fall an, dass die Irrtumswahrscheinlichkeit etwa 5 % betragen soll.

3.7 Erläutern Sie an diesem Beispiel, was man unter Fehlern 2. Art versteht.

Tabelle der Binomialverteilung (Summenfunktion) für n=20 und p=0,04

k	0	1	2	3	4	5
$F_{20;0,04}(k)$	0,4420	0,8102	0,9561	0,9926	0,9990	9,9999

Alle nicht aufgeführten Werte sind auf 4 Dezimalstellen genau 1,0000.

Lösung 2009 – 3

3.2 Die Firma „HAMMER & HART“ produziert Geräte, von denen erfahrungsgemäß 2 % als Garantiefälle reklamiert werden.

3.2.1 Berechnen Sie Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 600 verkauften Geräten die Anzahl der Garantiefälle weniger als 15 beträgt.

Pflichttext

Es sei X die Anzahl der reklamierten Garantiefälle.
X ist binomialverteilt mit $p = 0{,}02$.

$P(X < 15) = F_B(14;600;0{,}02) = \text{binomialCDf}(0{,}14{,}600{,}0.02) \approx 0{,}774$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 77,4%

```
binomialCDf
Unterer 0
Oberer 14
Umfang n 600
pos 0.02
Erfolgswahrscheinlichkeit
(0≤p≤1)
OK  Abbr.
```

3.2.2 Ermitteln Sie, nach wie vielen verkauften Geräten die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten mindestens eines Garantiefalles erstmals über 75 % liegt.

Das ist eine Form der Dreimal-Mindestens-Aufgabe:

EmpfohlenesTextschema

Gesucht ist n, die Anzahl der verkauften Geräte.

Es geht um das Ereignis: G: „Es gibt mindestens einen Garantiefall“
bei dem das Elementarereignis: E: „Das Gerät ist ein Garantiefall“ mit p = 0,02 eintritt,

Bedingung: $P(G) = P(X \geq 1) > 0{,}75$ d. h. $1 - P(X = 0) > 0{,}75$.

Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses: Es liegt n mal keine Garantiefall vor: $P(X = 0) = 0{,}98^n$

Daraus folgt: $1 - 0{,}98^n > 0{,}75$ (*)

```
solve(1-0.98^n>0.75,n)
                {n>68.6192}
```

Die Rechner-Lösung ist $n \geq 69$.
Man muss also mindestens 69 Geräte verkaufen, damit mit mehr als 75% Wahrscheinlichkeit mindestens ein Garantiefall auftritt.

Hinweis: Man kann die Ungleichung (*) weiter umformen: $0{,}98^n < 0{,}25$.
Wer die Lösung mit einem einfachen TR ermitteln will, muss logarithmieren und so vorgehen:

$$\log\left(0{,}98^n\right) < \log(0{,}25) \;\Leftrightarrow\; n \cdot \log(0{,}98) < \log(0{,}25) \quad |: \log(0{,}98) < 0 \qquad n > \frac{\log(0{,}25)}{\log(0{,}98)} \approx 68.6192$$

3.2.3 Es wird vermutet, dass der Anteil der Garantiefälle doch höher sein könnte als angegeben. Dazu sollen 1000 Geräte in ihrer Garantiezeit beobachtet werden. Formulieren und begründen Sie dazu eine Entscheidungsregel, wobei die Irrtumswahrscheinlichkeit zwischen 5 % und 6 % liegen soll.

Signifikanztest vom Umfang n = 1000.
Es sei X die Anzahl der reklamierten Garantiefälle. X ist binomialverteilt mit p = 0,02.
Nullhypothese: H_O: $p \leq 0{,}02$
Definitionsbereich für X: $S = \{\underbrace{0;......;L}_{A} \mid \underbrace{R;....;1000}_{\overline{A}}\}$

(Rechtsseitiger Test, denn man befürchtet, dass man zu viele defekte findet.)
Das Signifikanzniveau, also der maximale Fehler 1. Art, sei zwischen 5% und 6%,
d. h. Versehentliche Ablehnung: $0{,}05 < P(X \geq R) < 0{,}06$

Nun kann man entweder eine Fehlerfunktion definieren, die uns berechnet, wie hoch die Fehler-Wahrscheinlichkeit für mindestens x defekte Geräte ist,

```
define f(x)=binomialCDf(x,1000,1000,0.02)
                                     done
f(25)
                                   0.1545
f(26)
                                   0.1099
f(27)
                                   0.0758
f(28)
                                   0.0507
```

oder man sucht so lange, bis man die Zahlen 27 und 28 gefunden hat, die erkennen lassen, dass ab 28 defekten der Fehler 1. Art zwischen 5% und 6% liegt.

```
binomialCDf(27,1000,1000,0.02)
                                   0.0758
binomialCDf(28,1000,1000,0.02)
                                   0.0507
```

Ergebnis: Die Entscheidungsregel lautet:
Für $n \geq 28$ wird die Vermutung bestätigt.
Wir haben also dann den Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{28;...;1000\}$, also R = 28.

Lösung 2009 – 4

3.2 Bei der Herstellung von Balken werden zwei Fehler, Fehler I und Fehler II, registriert, die unabhängig voneinander auftreten. Der Fehler I wird erfahrungsgemäß bei 3 % aller Balken registriert, der Fehler II bei 5 %. Der laufenden Produktion wird auf gut Glück ein Balken entnommen und auf das Vorhandensein beider Fehler untersucht.

> Wichtig: Weil diese Fehler unabhängig voneinander auftreten, darf man Die Wahrscheinlichkeit für die Schnittmengen (und-Ereignisse) durch Multiplikation der Einzel-Wahrscheinlichkeiten berechnen.

3.2.1 Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.

	F_1	$\overline{F_1}$	
F_2	B		0,05
$\overline{F_2}$	A	C	0,95
	0,03	0,97	

A: Der Balken hat den Fehler I, aber nicht den Fehler II.

$$P(A) = \boxed{P\left(F_1 \cap \overline{F_2}\right) = P(F_1) \cdot P\left(\overline{F_2}\right)} = 0{,}03 \cdot 0{,}95 = 0{,}0285$$

B: Bei dem Balken werden beide Fehler festgestellt.

$$P(B) = \boxed{P\left(F_1 \cap F_2\right) = P(F_1) \cdot P(F_2)} = 0{,}03 \cdot 0{,}05 = 0{,}0015$$

C: Der Balken ist fehlerfrei. (Weder F_1 noch F_2)

$$P(C) = \boxed{P\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right) = P\left(\overline{F_1}\right) \cdot P\left(\overline{F_2}\right)} = 0{,}97 \cdot 0{,}95 = 0{,}9215$$

3.2.2 Ermitteln Sie, wie viele fehlerfreie Balken man in einer Lieferung von 200 solcher Balken erwarten kann. Die Anzahl der fehlerfreien Balken kann als binomialverteilte Zufallsvariable angenommen werden.

Gesucht ist der Erwartungswert mit n = 200 und p = 0,9215: $E = n \cdot p = 184(,3)$

3.2.3 Berechnen Sie, wie hoch der Prozentsatz der Balken mit registriertem Fehler II sein müsste, damit die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines fehlerfreien Balkens bei sonst gleichen Bedingungen auf ca. 95 % steigt.

Bedingung: Wahrscheinlichkeit für fehlerfrei (Feld C) = 0,95

Gesucht ist $x = P(F_2)$

$$P(C) = \underbrace{P\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right)}_{0{,}95} = \underbrace{P\left(\overline{F_1}\right) \cdot P\left(\overline{F_2}\right)}_{0{,}97 \cdot (1-x)}$$

$$0{,}95 = 0{,}97 - 0{,}97 \cdot x$$

$$0{,}97 \cdot x = 0{,}97 - 0{,}95$$

$$x = \frac{0{,}02}{0{,}97} = 0{,}0206$$

Ergebnis: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Balken den Fehler II hat, also der Anteil der Balken mit dem Fehler II müsste dann etwa 2% betragen.

USW….. auf der CD!