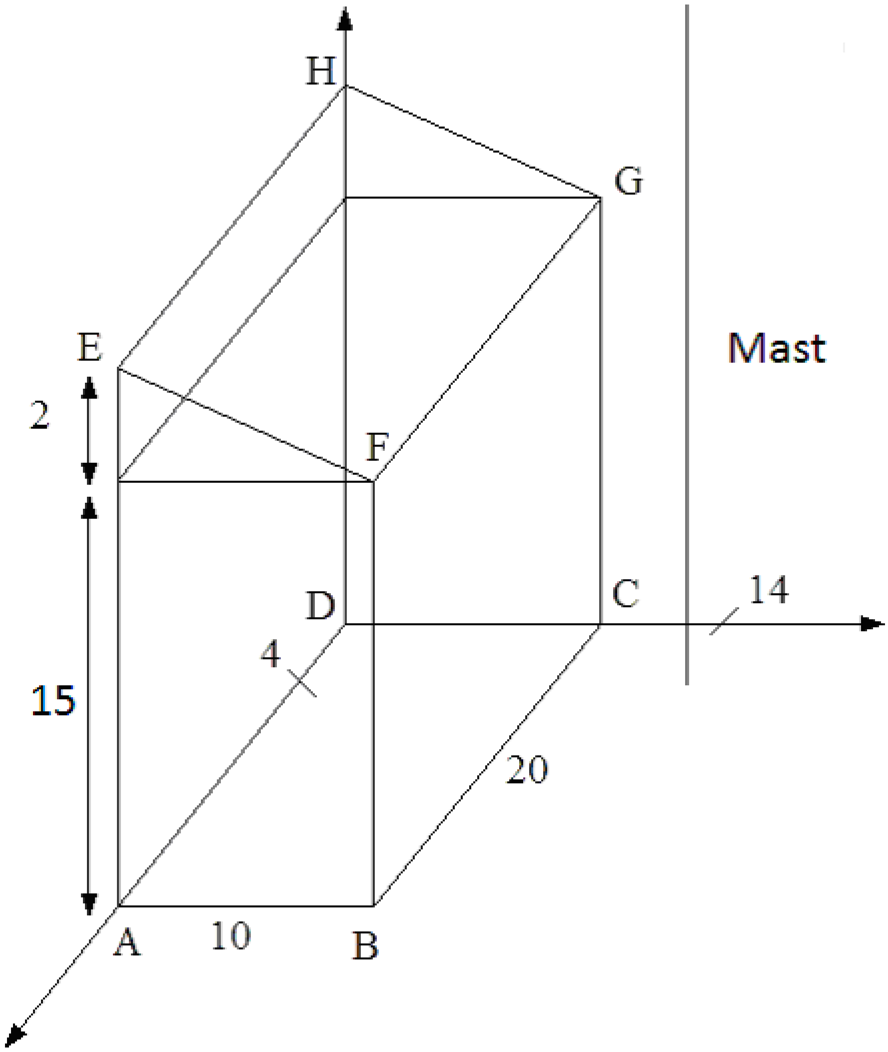
Anwendungsaufgabe „Analytische Geometrie“



Aufgabe:

(1) Es sollen die Eckpunkte A bis H bestimmt werden.
(2) Wie lauten die Gleichungen der Ebene EFGH in Parameter- und Koordinatenform?
(3) Die Spitze des Mastes liegt in P(4/14/25). Wo liegt der Schattenpunkt P′ von P auf dem Dach, wenn die Sonne in die Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ scheint?
(4) Wo trifft der Schatten auf die Dachkante $\overline{FG}$?
(5) In welchem Winkel treffen die Sonnenstrahlen auf den Boden?
(6) Wie groß ist das Volumen des Gebäudes?
(7) Wie groß ist der Neigungswinkel des Daches?

Lösungen (für Ebenen- und Geradengleichungen gibt es mehrere Lösungen):

(1) $A(20|0|0)$
$B(20|10|0)$
$C(0|10|0)$
$D(0|0|0)$
$E(20|0|17)$
$F(20|10|15)$
$G(0|10|15)$
$H(0|0|17)$

(2) $E: \vec{x} = \overrightarrow{0H} + r \cdot \overrightarrow{HE} + s \cdot \overrightarrow{HG}$ (Wenn man die Eckpunkte E, G und H verwendet.)

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} + r \cdot \left(\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} \right) + s \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Oder $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ (da man auch Vielfache - außer des Nullfachen - des obigen Normalenvektors verwenden kann).

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$E: y + 5z = 85$$

(3) Schatten des Punktes P auf Dach:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 25 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit ist $x = 4 + t, y = 14 - t$ und $z = 25 - t$. In Koordinatengleichung für E einsetzen

$$14 - t + 5 \cdot (25 - t) = 85$$
$$14 - t + 125 - 5t = 85$$
$$139 - 6t = 85 \mid -139$$
$$-6t = -54$$
$$t = 9$$

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 25 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Also $P'(13|5|16)$

Da für P' $0 \leq x \leq 20$ und $0 \leq y \leq 10$ gilt, liegt P' auf dem Dach. Berechnet man den Schnittpunkt mit der Parameterform der Ebene, dann gilt $r = \frac{13}{20}$ und $s = \frac{1}{2}$. Hier sieht man auch, dass P' auf dem Dach liegt, denn $0 \leq r \leq 1$ und $0 \leq s \leq 1$.

(4) Dachkante: $k: \vec{x} = \overrightarrow{0G} + t \cdot \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Schatten des Mastes liegt in $E_s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 25 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Schnittpunkt von k und E_s ergibt sich durch Gleichsetzen beider Gleichungen.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 25 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: $r = 4, s = -6, t = \frac{2}{5}$

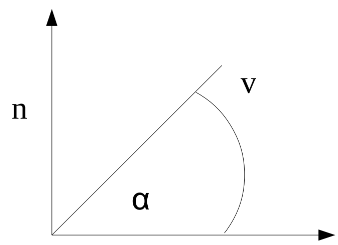
Schnittpunkt S mit Dachkante: (Einsetzen von $t = \frac{2}{5}$ in Gleichung von g oder $r = 4$ und $s = -6$ in Gleichung von E_s.)

$$\overrightarrow{0S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow S(8|10|15)$$

(5) Boden ist x-y-Achse:

$$E_{xy}: z = 0$$

Also ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nun muss man den Winkel zwischen der x-y-Ebene und dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ berechnen:



Bei der Berechnung des Schnittwinkels zwischen einer Ebene und einer Geraden verwendet man am besten den Sinus:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|-1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1}} \Rightarrow \alpha \approx 35{,}26°$$

(6) $V = \frac{17+15}{2} \cdot 10 \cdot 20 = 3200$ (Wenn alle Angaben in m gegeben wurden, so hat das Volumen die Einheit m^3.)

(7) Der Winkel zwischen $E: y + 5z = 85$ und $E_{xy}: z = 0$ ergibt sich über die Berechnung des Winkels zwischen dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_{E_{xy}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{n_{E_{xy}}}}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot \left|\overrightarrow{n_{E_{xy}}}\right|} = \frac{5}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{1}} \Rightarrow \alpha \approx 11{,}31°$$

Wäre α größer als 90°gewesen, so wäre 180° - α der Neigungswinkel, wobei man bei Anwendungsaufgaben allgemein mit dieser Regel aufpassen muss.

Man kann bei Anwendungsaufgaben nicht generell sagen, dass, falls ein Winkel größer als 90° ist, dieser dann von 180° subtrahiert werden muss. Wenn man beispielsweise den Eckwinkel in einem Dreieck berechnet (beispielsweise für den Winkel in einer Dachspitze) und man z.B. 120° erhält, dann ist auch der Eckwinkel 120°, wenn man die Vektoren, mit denen man den Winkel berechnet, richtig bestimmt hat. Diese müssen beide von der Ecke weg oder beide zur Ecke hin zeigen, wenn man das Problem mit Vektoren löst, die von einer Dreiecks-Ecke zur anderen zeigen. Bei einem Neigungswinkel eines Daches würde man hingegen keinen Winkel größer als 90° angeben.

Verwendet man

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{n_{E_{xy}}}|}{|\overrightarrow{n_E}| \cdot \left|\overrightarrow{n_{E_{xy}}}\right|},$$

d.h. im Zähler wird der Betrag verwendet, dann ergibt sich immer nur ein Winkel von maximal 90°.