Vektorrechnung

Lernblatt: Lagebeziehungen

Version mit Lösungen

Untersuchung der gegenseitigen Lage von

Punkt und Gerade
Punkt und Ebene
Punkt und Viereck

Gerade und Gerade
Gerade und Ebene

zwei Ebenen

Datei Nr. 63401

Stand 17. Januar 2013

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die Vektorrechnung macht Schülern das Leben vor allem dadurch schwer, dass es sehr viele Methoden gibt. Angesichts des Zeitdrucks unserer Abiturienten lernen viele nur noch oberflächlich. Nach der nächsten Arbeit wird dann vieles schnell wieder vergessen.

Daher ist es im Hinblick auf die Prüfung wichtig, dass man wiederholt und sich vor allem eine Lernsystematik aneignet, die dabei hilft, das Gelernte zu behalten. Wer hat schon die Zeit immer wieder von vorne anzufangen mit Lernen.

Die Mathematik hat in vielen Bereichen die günstige Eigenschaft, dass Fragestellungen ein typisches Merkmal enthalten. Hat man dazu die passende Methode bereit, kann man loslegen.

Also heißt das Erfolgsrezept:

Lerne zu den wichtigen Merkmalen (Fragestellungen) die Methoden!

Das ist oft wichtiger als das Üben mit Zahlen. Was nützt alle Rechenkunst, wenn man nicht weiß, mit welcher Methode man die Aufgabe lösen kann!

Aus diesem Grund habe ich diese Sammlung von 18 Lernblättern zum Thema **Lagebeziehungen** erstellt. Jedes Lernblatt gehört zu einer bestimmten Fragstellung. Es enthält die Lösungsmethoden in Worten, aber auch Zahlenbeispiele zum Erleben des Aha-Effekts.

In vielen Fällen gibt es zwei oder drei Methoden. Es zeigt sich dabei, dass fast immer die Methode die günstigste ist, die ***ohne eine Geraden- oder Ebenengleichung*** auskommt! Und gerade diese wählen Schüler gerne, weil sie sich die anderen Methoden nicht merken. Ja so ist das leider …

Arbeits-Empfehlung

Damit man nun auch selbst üben kann und nicht immer gleich die Lösung vor Augen hat, gibt es dieselbe Sammlung noch einmal (Nummer 63402), nur ohne Lösungen. Ich empfehle zuerst das Studium dieser vollständigen Seiten. Anschließend kann man die 18 nur mit den Aufgaben beschriebenen Blätter ausdrucken und damit testen, was man weiß …l

Noch ein Tipp: Man übe es, geeignete Skizzen zu den Aufgaben zu erstellen.
Sie zeigen einem oft, welche Methode man anwenden kann!

Viel Erfolg!

Friedrich Buckel.

Können heißt „Sich erinnern können“

Übersicht über die Prüfungsfragen

LB1	Lage eines Punktes zu einer Geraden	4
LB2	Lage dreier Punkte zueinander	5
LB3	Lage eines Punktes zu einer Ebene (Parametergleichung)	6
LB4	Lage eines Punktes zu einer Ebene (Normalengleichung)	7
LB5	Lage von 4 Punkten zueinander	8
LB6	Bilden A, B, C, D eine Parallelogramm?	9
LB7	Berechnung des 4. Parallelogrammpunktes	10
LB8	Lage eines Punktes relativ zu einem Parallelogramm	11
LB9	Lage zweier Geraden (Übersicht)	12
LB10	Sind zwei Geraden parallel?	13
LB11	Liegen zwei nicht parallele Geraden in einer Ebene?	14
LB12	Lage einer Geraden zu einer Ebene (Parametergleichung) Methoden	15
LB13	Lage einer Geraden zu einer Ebene (Parametergleichung) Beispiele	16
LB14	Lage einer Geraden zu einer Ebene (Normalengleichung) Methoden	17
LB15	Lage einer Geraden zu einer Ebene (Normalengleichung) Beispiele	18
LB16	Lage zweier Ebenen (beide mit Normalengleichung)	19
LB17	Lage zweier Ebenen (Parametergleichung und Normalengleichung)	20
LB18	Lage zweier Ebenen (beide mit Parametergleichung)	21

$\boxed{P-g}$

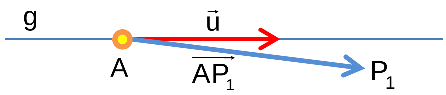
Lage eines Punktes zu einer Geraden

LB1

Gegeben ist g: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$. Liegt P_1 auf g?

1. Methode: Vektoren vergleichen

$P_1(3|-2|2)$

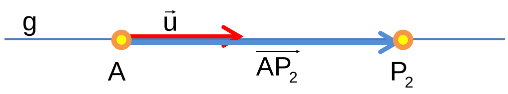


$\overrightarrow{AP_1} = \vec{x}_1 - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Vergleichen mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$\overrightarrow{AP_1}$ ist kein Vielfaches von $\vec{u}$,
Also liegt nicht P_1 auf g.

$P_2(3|-2|3)$



$\overrightarrow{AP_2} = \vec{x}_2 - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

Vergleichen mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$\overrightarrow{AP_2} = 3 \cdot \vec{u}$
Also liegt P_2 auf g

2. Methode: Punktprobe machen

Dazu setzt man den Ortsvektor des Punktes P_i in die Geradengleichung ein.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 9 = 3r \\ -6 = -2r \\ 5 = 2r \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} r = 3 \\ r = 3 \\ r = \frac{5}{2} \end{Bmatrix}$$

Weil es <u>keine</u> eindeutige Lösung für r gibt,
liegt P_1 nicht auf g.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 9 = 3r \\ -6 = -2r \\ 6 = 2r \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} r = 3 \\ r = 3 \\ r = 3 \end{Bmatrix}$$

Weil es eine eindeutige Lösung für r gibt,
liegt P_2 auf g.

Kommentar: Der Vergleich von Vektoren (1. Methode) ist schneller erledigt.

Man sollte die Geradengleichung möglichst nur zur Berechnung von Punkten verwenden.