# Lineare Algebra

Matrizengleichungen mit Variablen
Gleichungssysteme mit Variablen
Gauß-Verfahren

---

**Abituraufgaben Berufliche Gymnasien BW**



Datei Nr. 62113

Stand: 22. Dezember 2010

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

# Vorwort

Dieses Heft enthält ausnahmslos Abituraufgaben von beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg. Sie sind fast alle sehr alten Datums. Dies hat den Vorteil, dass sie wesentlich umfangreicher sind als die neuen Aufgaben, die oft nur halb so lang sind, sich aber mit denselben Themen beschäftigen. Ihnen wird ein weiteres Heft gewidmet.

Im folgenden Inhaltsverzeichnis sind sie nach Themen geordnet:

a) Die ersten 5 Aufgaben sind alle vom etwa gleichen Typ: Aus einer Matrix $A_t$ wird ein Gleichungssystem gebildet. Dazu gibt es eine Reihe von Zusatzaufgaben. Es handelt sich stets um 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.

b) In Aufgabe 6 geht es um die Lineare Un-/Abhängigkeit dreier Vektoren des $\mathbf{R}^3$ .

c) Aufgabe 7 zeigt, wie man mit einer Matrix Vektoren auf andere Vektoren abbilden kann.

d) Die Aufgaben 8, 9 und 10 beschäftigen sich mit Gleichungssystemen des $\mathbf{R}^4$.

Sämtliche Lösungen stammen von mir persönlich.

Friedrich Buckel

# Inhalt

# Aufgabe 1 - Abitur 1988 (Baden-Württemberg, WG)

Gegeben sind die Matrix $A_t$ und der Vektor $\vec{b}_t$ durch

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 2t \\ 1 & 1 & 2t-2 \\ t & t^3 & 16 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_t = \begin{pmatrix} 6t-4 \\ 6t-2 \\ -12t \end{pmatrix} \text{ für } t \in R.$$

a) Bestimmen Sie den Lösungsvektor $\vec{x}$ der homogenen linearen Gleichungssystems

$$A_{-2} \cdot \vec{x} = \vec{o}.$$

Ist eine dieser Lösungen auch Lösung von $A_1 \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 66 \end{pmatrix}$ ?

b) Für welche Werte von t hat das Gleichungssystem $A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}_t$ keine Lösung – genau eine Lösung – unendlich viele Lösungen?

Berechnen Sie für den Fall der eindeutigen Lösung den Lösungsvektor in Abhängigkeit von t.

c) Berechnen Sie die Matrix $X_t$ aus der Gleichung

$$X_t \cdot A_{-1} = A_1 + A_0.$$

d) Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den das Produkt $\vec{b}_t^{\,T} \cdot \vec{b}_{t+1}$ annehmen kann.

## Lösung

Die Gleichung $A_{-2} \cdot \vec{x} = \vec{o}$ lautet ausführlich: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -6 \\ -2 & -8 & 16 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung nach Gauß:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ -2 & -8 & 16 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -Z1 \\ +2 \cdot Z1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -12 & 8 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +4 \cdot Z2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

| | |
|---|---|
| WISSEN: | Ein Gleichungssystem, dessen Absolutglied der Nullvektor ist, heißt homogen. Bei einem homogenen linearen Gleichungssystem (HLGS) kann man beim Gauß-Verfahren die 4. Spalte weglassen, denn sie ändert sich ja nicht. Also könnte man vereinfach diese Umformung durchführen: |

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -6 \\ -2 & -8 & 16 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -Z1 \\ +2 \cdot Z1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -12 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ +4 \cdot Z2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist 2. Also kann man bei 3 Variablen eine frei wählen.

Aus der 2. Zeile folgt: $3x_2 - 2x_3 = 0$

Wähle $x_3 = k$, dann folgt: $3x_2 - 2k = 0 \Leftrightarrow 3x_2 = 2k \Leftrightarrow x_2 = \frac{2}{3}k$

WISSEN: Um Brüche zu vermeiden wählt man günstiger $x_3 = 3k$ mit $k \in R$.

Dann folgt: $3x_2 - 6k = 0 \Leftrightarrow 3x_2 = 6k \Leftrightarrow x_2 = 2k$

(Übrigens kann man auch $x_2$ frei wählen, dann aber so: $x_2 = 2k$ mit $k \in R$,

dann folgt: $6k - 2x_3 = 0 \Leftrightarrow 2x_3 = 6k \Leftrightarrow x_3 = 3k$.)

Jetzt setzt man in die 1. Zeile des Gleichungssystems ein:

$x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0$

und erhält: $x_1 - 4k - 12k = 0 \Leftrightarrow x_1 = 16k$

<u>Ergebnis:</u>

Der Lösungsvektor ist: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 16k \\ 2k \\ 3k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $k \in R$.

Ist eine dieser Lösungen auch Lösung von $A_1 \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 66 \end{pmatrix}$?

Dieses System lautet: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 16 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 66 \end{pmatrix}$

Probe: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 16 \end{pmatrix} \cdot k \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 66 \end{pmatrix}$

Umformen der linken Seite: $k\begin{pmatrix}16+2+6\\16+2\\16+2+48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\18\\66\end{pmatrix}$

bzw.: $k\begin{pmatrix}24\\18\\66\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\18\\66\end{pmatrix}$

Und dies ist erfüllt für k = 1.

Ergebnis: Es handelt sich also um den Vektor: $\vec{x}=\begin{pmatrix}16\\2\\3\end{pmatrix}$

b) Untersuchung der Lösungen des LG $A_t\cdot\vec{x}=\vec{b}_t$:

Mit $A_t=\begin{pmatrix}1&t&2t\\1&1&2t-2\\t&t^3&16\end{pmatrix}$ und $\vec{b}_t=\begin{pmatrix}6t-4\\6t-2\\-12t\end{pmatrix}$ lautet es so: $\begin{pmatrix}1&t&2t\\1&1&2t-2\\t&t^3&16\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}6t-4\\6t-2\\-12t\end{pmatrix}$

$$(A_t\,|\,\vec{b}_t)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&t&2t&6t-4\\\boxed{1}&1&2t-2&6t-2\\\boxed{t}&t^3&16&-12t\end{array}\right)\begin{array}{c}\\-Z1\\-t\cdot Z1\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&t&2t&6t-4\\0&1-t&-2&2\\0&t^3-t^2&16-2t^2&-6t^2-8t\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&t&2t&6t-4\\0&1-t&-2&2\\0&\boxed{t^2(t-1)}&16-2t^2&-6t^2-8t\end{array}\right)\begin{array}{c}\\\\+t^2\cdot Z2\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&t&2t&6t-4\\0&1-t&-2&2\\0&0&16-4t^2&-4t^2-8t\end{array}\right)\quad(*)$$

*Hier bricht man ab und beginnt mit der Untersuchung der Ränge.*

1. Nebenrechnung: Wann ist $16-4t^2=0$? $4t^2=16 \Leftrightarrow t^2=4 \Leftrightarrow t=\pm2$

2. Nebenrechnung: Wann ist $-4t^2-8t=0$? $-4t\cdot(t+2)=0 \Leftrightarrow t=0$ oder $t=-2$

3. Nebenrechnung: Wann ist $1-t=0$? $t=1$

Dann ist der 2. Spaltenvektor identisch mit dem ersten!

**Untersuchung der Lösbarkeit des LGS:**

(1) Für t = 2 ist $\operatorname{Rg}(A_2\,|\,\vec{b}_2)=\operatorname{Rg}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&8\\0&-1&-2&2\\0&0&0&-32\end{array}\right)=3$ aber Rg($A_2$) = 2.

Das LGS ist unlösbar.

(2) Für t = -2 ist $\operatorname{Rg}(A_{-2}\,|\,\vec{b}_{-2})=\operatorname{Rg}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-4&-16\\0&3&-2&2\\0&0&0&0\end{array}\right)=2=\operatorname{Rg}(A_{-2})$

Das LGS ist also lösbar.

Weil es jedoch 3 Unbekannte besitzt, gibt es unendlich viele Lösungen.

(3) Für t = 1 ist: $(A_1\,|\,\vec{b}_1)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&2\\0&0&-2&2\\0&0&16&-12\end{array}\right)\begin{array}{c}\\\\+8\cdot Z2\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&2\\0&0&-2&2\\0&0&0&4\end{array}\right)$

Also: $\operatorname{Rg}(A_1\,|\,\vec{b}_1)=3$ aber $\operatorname{Rg}(A_1)=2$.

Das LGS ist daher unlösbar.

(4) Für alle anderen Werte von t, also für $t \in R \setminus \{1; \pm 2\}$

Ist $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(A \mid \vec{b}) = 3$ bei 3 Unbekannten.

Das bedeutet eindeutige Lösung.

**Berechung der Lösungsvektoren:**

Die letzte erweiterte Matrix in (*) gehört zu diesem LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 2t & 6t-4 \\ 0 & 1-t & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 16-4t^2 & -4t^2-8t \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x_1 + tx_2 + 2tx_3 = 6t-4 & (1) \\ (1-t)x_2 - 2x_3 = 2 & (2) \\ \left(16-4t^2\right)x_3 = -4t^2-8t & (3) \end{array}\right\}$$

__**Im 4. Fall**__, also für $t \in R \setminus \{1; \pm 2\}$ gibt es eine eindeutige Lösung:

Man darf (3) durch $(16-4t^2)$ dividieren, weil für die zugelassenen Werte von t diese

Klammer ungleich 0 ist: $x_3 = \dfrac{-4t^2-8t}{16-4t^2} = \dfrac{-\cancel{4}t(t+2)}{\cancel{4}(4-t^2)} = \dfrac{-t\cancel{(t+2)}}{(2-t)\cancel{(2+t)}} = \dfrac{-t}{2-t} = \dfrac{t}{t-2}$

Am Ende wurde mit -1 erweitert.

Aus (2) folgt: $(1-t)x_2 = 2+2x_3 \quad \Rightarrow \quad (1-t)x_2 = 2+2\cdot\dfrac{t}{t-2}$

Dies ergibt $x_2 = \dfrac{2}{1-t} + \dfrac{2t}{(t-2)(1-t)} = \dfrac{2(t-2)+2t}{(t-2)(1-t)} = \dfrac{4t-4}{(t-2)(1-4)}$

$$x_2 = \frac{4\cancel{(t-1)}}{(t-2)\cancel{(1-t)}} = \frac{\boxed{-}4}{t-2}$$

Erklärung:

> $\dfrac{t-1}{1-t} = -1$ für alle Werte von t.
>
> Dies erkennt man, wenn man im Nenner -1 ausklammert:
>
> $\dfrac{t-1}{1-t} = \dfrac{t-1}{-(-1+t)} = \dfrac{\cancel{t-1}}{-\cancel{(t-1)}} = \dfrac{1}{-1} = -1$ !!

Aus (1) folgt: $x_1 = -tx_2 - 2tx_3 + 6t - 4$

$x_2$ und $x_3$ eingesetzt: $x_1 = -t\cdot\dfrac{-4}{t-2} - 2t\cdot\dfrac{t}{t-2} + 6t - 4 = +\dfrac{4t}{t-2} - \dfrac{2t^2}{t-2} + \dfrac{(6t-4)\cdot(t-2)}{1\cdot(t-2)}$

$$x_1 = \frac{4t}{t-2} - \frac{2t^2}{t-2} + \frac{6t^2-4t-12t+8}{t-2} = \frac{4t-2t^2+6t^2-16t+8}{t-2}$$

$$x_1 = \frac{4t^2-12t+8}{t-2} = \frac{4\left(t^2-3t+2\right)}{t-2}$$

**Rechenhilfe:**

> Jetzt muss man den Zähler faktorisieren, damit man erkennt, ob man kürzen kann. Dazu löst man die Gleichung $t^2 - 3t + 2 = 0$ z. B. mit der „Mitternachtsformel“ $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:
>
> $$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$
>
> Also kann man den Term $t^2 - 5t + 2$ so faktorisieren:
>
> $$t^2 - 5t + 2 = (t-2) \cdot (t-1)$$

Damit folgt für $x_1$:
$$x_1 = \frac{4\left(t^2 - 3t + 2\right)}{t-2} = \frac{4\cancel{(t-2)}(t-1)}{\cancel{t-2}} = 4(t-1) = 4t - 4$$

Ergebnis: Lösungsvektor:
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4t-4 \\ -\frac{4}{t-2} \\ \frac{t}{t-2} \end{pmatrix}$$

Oder um Platz zu sparen:
$$\vec{x}^T = \begin{pmatrix} 4t-4 & -\frac{4}{t+2} & \frac{t}{t-2} \end{pmatrix}$$

Was man auch so schreiben kann:
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4t-4 & -\frac{4}{t+2} & \frac{t}{t-2} \end{pmatrix}^T.$$

<u>**ZUSATZ: Im Fall 2**</u> (t = -2) gibt es unendlich viele Lösungen: (Dies war nicht verlangt!)

Dort führte die erweiterte Matrix auf
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -4 & -16 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Diese gehört zum End-Gleichungssystem:
$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -16 & (4) \\ 3x_2 - 2x_3 = 2 & (5) \end{array}\right\}$$

Weil für 3 Unbekannte nur 2 Gleichungen vorliegen, kann man eine Variable frei wählen:

Wähle: $x_3 = k \in R$

Aus (5) folgt dann: $3x_2 = 2 + 2x_3 = 2 + 2k \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}k$

Und aus (4): $x_1 = 2x_2 + 4x_3 - 16 = 2\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}k\right) + 4k - 16 = \frac{16}{3}k - \frac{44}{3}$

Lösungsvektor:
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3}k - \frac{44}{3} \\ \frac{2}{3} + \frac{2}{3}k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{44}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungsmenge:
$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; k \in R \right\}$$

c) **Lösung der Gleichung** $X_t \cdot A_{-1} = A_1 - t \cdot A_0$

Sie lautet ausführlich: $$X_t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 16 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

bzw. $$X_t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 2 \\ 1-t & 1-t & 2t \\ 1 & 1 & 16-16t \end{pmatrix}$$

Umstellung: $$X_t = \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 2 \\ 1-t & 1-t & 2t \\ 1 & 1 & 16-16t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 16 \end{pmatrix}^{-1}$$

Berechnung der inversen Matrix $A_{-1}^{-1}$ nach Gauß:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -Z1 \\ +Z1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 14 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +Z2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :2 \\ :12 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{array}\right) \begin{array}{c} +Z2 \\ +Z3 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{array}\right) \begin{array}{c} +3 \cdot Z3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{12} & \frac{3}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{array}\right)$$

Damit kann man nun $X_t$ berechnen:

$$X_t = \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 2 \\ 1-t & 1-t & 2t \\ 1 & 1 & 16-16t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 16 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 2 \\ 1-t & 1-t & 2t \\ 1 & 1 & 16-16t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{12} & \frac{3}{12} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$X_t = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 1-t & 1 & 2 \\ 1-t & 1-t & -2t \\ 1 & 1 & 16-16t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ -6 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_t = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 6-6t-6 & 9-9t+7+2 & 3-3t+1+2 \\ 6-6t-6+6t & 9-9t+7-7t+2t & 3-3t+1-t+2t \\ 6-6 & 9+7+16-16t & 3+1+16-16t \end{pmatrix}$$

$$X_t = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -6t & 18-9t & 6-3t \\ 0 & 16-14t & 4-2t \\ 0 & 32-16t & 20-16t \end{pmatrix}$$

d) Bestimmen Sie den kleinsten Wert, den das Produkt $\vec{b}_t^{\,T} \cdot \vec{b}_{t+1}$ annehmen kann.

Dieses Produkt ist eine Funktion von t, ich nenne sie jetzt f(t):

$$f(t) = \vec{b}_t^{\,T} \cdot \vec{b}_{t+1} = \begin{pmatrix} 6t-4 & 6t-2 & -12t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6(t+1)-4 \\ 6(t+1)-2 \\ -12 \cdot (t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t-4 & 6t-2 & -12t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6t+2 \\ 6t+4 \\ -12t-12 \end{pmatrix}$$

$$f(t) = (6t-4)(6t+2) + (6t-2)(6t+4) - 12t \cdot (-12t-12)$$

$$f(t) = 36t^2 - 24t + 12t - 8 + 36t^2 - 12t + 24t - 8 + 144t^2 + 144t$$

$$f(t) = 216t^2 + 144t - 16$$

Zur Extremwertbestimmung wird zweimal abgeleitet:

$$f'(t) = 432t + 144$$

$$f''(t) = 432$$

**Extremwertbedingung:** $f'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; 432t + 144 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = -\frac{144}{432} = -\frac{1}{3}$

**Kontrolle:** $f''\left(-\tfrac{1}{3}\right) = 432 > 0$

Also liegt ein Minimum vor.
Dies ist sogar ein absolutes Minimum, weil für $t \to \pm\infty$ $f(t) \to \infty$ geht.

*Oder so:*

f ist eine Parabelfunktion (ganzrational 2. Grades). Weil der Koeffizient von $t^2$ positiv ist, stellt das Schaubild von f eine nach oben geöffnete Parabel dar.

Der Extremwert muss dann das absolute Minimum sein.