Vektoren-Training

Flugrouten und Schiffspassagen

Spezielle Aufgabenstellungen
um etwas Realität zu simulieren

Lösungen meistens mittels Vektorrechnung

Text Nr. 64030

Stand 5. Januar 2013

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Da es zu diesen Aufgaben sehr oft unterschiedliche Lösungswege gibt, habe ich in einigen Teilaufgaben auch verschiedene Methoden aufgezeigt. Etwa wenn man die Parametergleichung einer Ebene umrechnen soll in eine Koordinatengleichung, die man ja auch Normalengleichung nennt, weil sie einen Normalenvektor der Ebene enthält.

Zur Berechnung dieses Normalenvektors, der ja zu den beiden Richtungsvektoren orthogonal ist, kann man das Skalarprodukt verwenden, oder (was schneller geht) das Vektorprodukt (Kreuzprodukt). Nun gibt es Schulen, an denen das Vektorprodukt nicht vorgesehen ist, diese müssen dann mit dem Skalarprodukt auskommen.

Außerdem gibt es ganz unterschiedliche Rechner. Ich verwende bei den gezeigten Screenshots meistens TI Nspire, aber auch CASIO ClassPad. Andere Geräte funktionieren zum Teil ähnlich.

Ein Wort zu den Maßeinheiten. In einer Rechnung lasse ich in meistens die Maßeinheiten weg. Wenn am Ende dann ein Wert entsteht, zu dem z. B. die Einheit km gehört, schreibe ich diese dann in Klammer dahinter. Ohne Klammern wäre es ein Verstoß gegen das Gleichheitsgebot, wonach links und rechts vom Gleichheitszeichen dasselbe stehen muss.

$d = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\text{ km}$ ist also nicht erlaubt, denn es müsste so lauten:

$d = \sqrt{16+9}\text{ km} = \sqrt{25}\text{ km} = 5\text{ km}$

Daher schreibe ich dann $d = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\,(\text{km})$.

Hier wird nur die Aufgabe 1 gezeigt / DEMO-Version

Inhalt

Aufgabe 1

(Abitur LK 2006 – M.-V.)

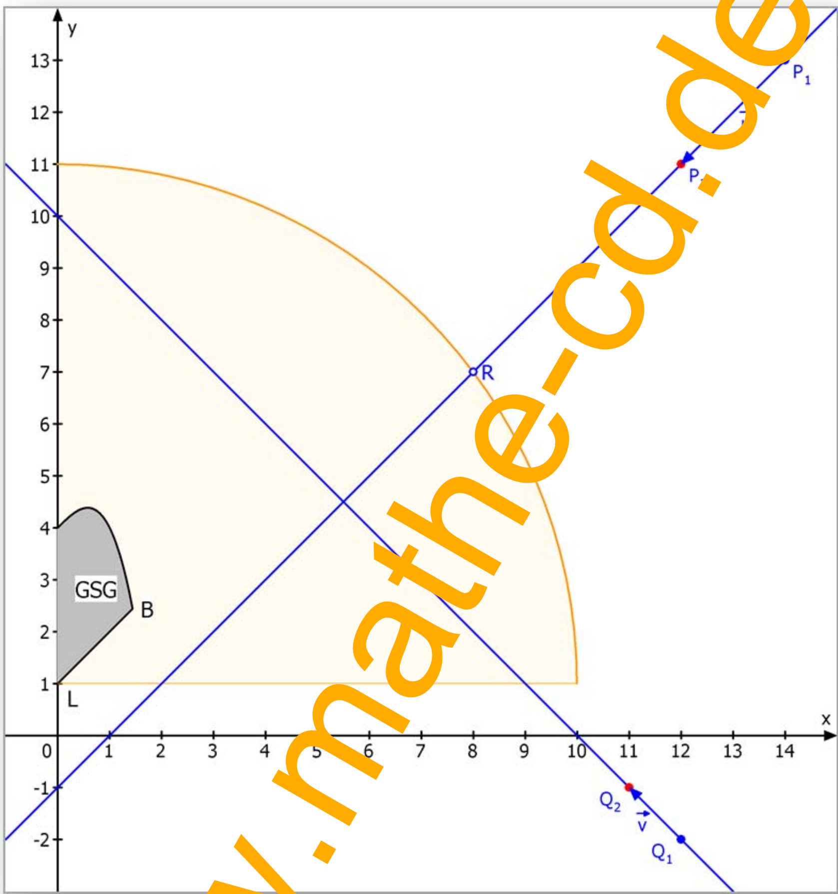
Ein Schiff P wird nacheinander zu bestimmten Zeiten in den Punkten $P_1(14 \mid 13)$ und $P_2(12 \mid 11)$ geortet.

Zu den gleichen Ortungszeiten wird die Position eines zweiten Schiffes Q in den Punkten $Q_1(12 \mid -2)$ und $Q_2(11 \mid -1)$ festgestellt.

Beide Schiffe bewegen sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.

Alle Koordinatenangaben erfolgen in sm (Seemeilen).

GSG ist ein gefährliches Seegebiet.



3.1 Vom Punkt $L(0 \mid 1)$ aus überstreicht der Lichtstrahl eines Leuchtfeuers mit einer Sichtweite von 10 sm einen Viertelkreis (siehe Abbildung). Im Punkt R erblickt der Kapitän des Schiffes P erstmalig dieses Leuchtfeuer.

3.1.1 Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen RL und der Bewegungsrichtung des Schiffes.

3.1.2 Berechnen Sie den Abstand der Schiffsroute des Schiffes P zum Leuchtfeuer L.

3.2 Bei gleichzeitiger Ortung der Schiffe P und Q sind die Schiffspositionen durch die Punkte $P_r(14-2r \mid 13-2r)$ und $Q_r(12-r \mid -2+r)$ mit $r \in \mathbf{R}$, $r > 0$ gegeben.

Für den Abstand der beiden Schiffe voneinander gilt: $d(r) = \left|\overrightarrow{P_rQ_r}\right|$

3.2.1 Berechnen Sie den Ort von P, wenn der Abstand der beiden Schiffe P und Q voneinander erstmalig 9 sm beträgt.

3.2.2 Für genau einen Wert von r ist der Abstand der beiden Schiffe voneinander minimal. Ermitteln Sie diesen Wert für r. Geben Sie den minimalen Abstand an.

3.3 Im Punkt $B(x_B \mid y_B)$ befindet sich eine Warnboje.

Die Begrenzungen des für die Schifffahrt gefährlichen Seegebietes "GSG" vor dem Leuchtfeuer L können durch die Graphen der Funktionen f und g mit den Gleichungen

$$f(x) = -x^3 + x + 4 \quad \text{mit} \quad x \in \mathbf{R},\ 0 \le x \le x_B \quad \text{und}$$

$$g(x) = x + 1 \quad \text{mit} \quad x \in \mathbf{R},\ 0 \le x \le x_B$$

und der Geraden mit der Gleichung $x = 0$ beschrieben werden.

Die Graphen von f und g schneiden einander im Punkt B.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt des gefährlichen Seegebietes.

Lösung Aufgabe 1

3.1.1 **Winkel zwischen der geraden RL und der Bewegungsrichtung des Schiffes.**

Diesen Winkel errechnet man aus den Vektoren $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{RL}$ oder aus den zugehörigen Steigungen. Den dazu nötigen Punkt R erhält man als Schnittpunkt des Kreises um $L(0|1)$ mit Radius 10 und der Geraden $g = (P_1P_2)$:

Kreisgleichung: $(x-x_L)^2 + (y-y_L)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 = 100$

Gerade g: Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{13-11}{14-12} = \frac{2}{2} = 1$

Punkt-Steigungs-Form mit $P_2(12 \mid 11)$:

$y - 11 = 1 \cdot (x-12) \quad \Leftrightarrow \quad y = x - 1$

Schnittpunkt R: (Geradenterm in die Kreisgleichung einsetzen)

$x^2 + (x-1-1)^2 = 100 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + (x-2)^2 - 100 = 0$

$2x^2 - 4x - 96 = 0 \quad |:4 \quad$ (vermeidet Brüche!)

$\frac{1}{2}x^2 - x - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{R-1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-24)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1 \pm \sqrt{1+48} = 1 \pm 7 = \begin{cases} 8 \\ -5 \end{cases}$

R liegt bei 8, die andere Lösung gehört zum zweiten Schnittpunkt links außen.

y-Koordinate: $y_R = x_R - 1 = 7$

Ergebnis: $R(8 \mid 7)$

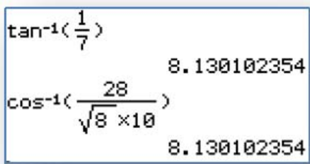
Winkel γ: <u>1. Möglichkeit:</u> $\tan\gamma = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$

$m_1 = 1$ (Steigung von g)

$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-1}{8-0} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ (Steigung von RL)

$\tan\gamma = \frac{1-\frac{3}{4}}{1+1\cdot\frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$

Ergebnis: $\gamma \approx 8{,}13^\circ$



<u>2. Möglichkeit (vektoriell):</u> $\cos\gamma = \left| \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{RL}}{|\vec{u}| \cdot |\overrightarrow{RL}|} \right|$

$\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

$\overrightarrow{RL} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$ mit $|\overrightarrow{RL}| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$

$\cos\gamma = \left| \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}}{\sqrt{8} \cdot 10} \right| = \left| \frac{-16-12}{\sqrt{8} \cdot 10} \right| = \frac{28}{\sqrt{8} \cdot 10}$ Ergebnis: $\gamma \approx 8{,}13^\circ$

3.1.2 Abstand der Schiffsroute (Gerade g) des Schiffes P zum Leuchtfeuer L$(0\,|\,1)$.

Gleichung von g: $y = x - 1$

Lot h von $L(0\,|\,1)$ auf g. $m_h = -\frac{1}{m_g} = -1.$

Lotgerade: $y = -x + 1$

Schnitt von g und Lot: $x - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x_S = 1.$

y-Koordinate: $y_S = 0$, also ist $S(1\,|\,0)$

Abstand: $d(L,g) = \overline{SL} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ (sm)

3.2 Bei gleichzeitiger Ortung der Schiffe P und 0 sind die Schiffspositionen durch die Punkte $P_r(14-2r\,|\,13-2r)$ und $Q_r(12-r\,|\,-2+r)$ mit $r \in \mathbf{R}, r > 0$ gegeben.

Für den Abstand der beiden Schiffe voneinander gilt: $d(r) = \left|\overrightarrow{P_rQ_r}\right|$

<u>1. Möglichkeit: Nicht vektoriell:</u>

$$d(r) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{((12-r)-(14-2r))^2 + ((-2+r)-(13-2r))^2}$$

$$d(r) = \sqrt{(-2+r)^2 + (-15+3r)^2} = \sqrt{4 - 4r + r^2 + 225 - 90r + 9r^2}$$

$$d(r) = \sqrt{10r^2 - 94r + 229}$$

<u>2. Möglichkeit: Vektoriell</u>

$$\overrightarrow{P_rQ_r} = \begin{pmatrix} 12-r \\ -2+r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14-2r \\ 13-2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+r \\ -15+3r \end{pmatrix}$$

$$d(r) = \left|\overrightarrow{P_rQ_r}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2+r \\ -15+3r \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2+r)^2 + (-15+3r)^2} = \sqrt{10r^2 - 94r + 229}$$

3.2.1 An welchem Punkt P ist der Abstand der beiden Schiffe P und Q voneinander erstmalig 9 sm?

Bedingung: $d(r) = 9 \Leftrightarrow (d(r))^2 = 81 \Leftrightarrow 10r^2 - 94r + 229 = 81 \Leftrightarrow 10r^2 - 94r + 148 = 0$

CAS-Lösungen: $r_1 = 2$ und $r_2 = \frac{37}{5}$ (scheidet aus).

Damit bekommt P diese Koordinaten: $P_2(14-4\,|\,13-4) = (10\,|\,9)$

(und was nicht gefragt war: $Q_2(12-2\,|\,-2+2) = (10\,|\,0)$)

3.2.2 Abstand der beiden Schiffe voneinander.

<u>Manuell</u> geht man so vor:

d(r) wird minimal, wenn $(d(r))^2$ minimal wird. Man definiert:

Hilfsfunktion: $h(r) = 10r^2 - 94r + 229$, $h'(r) = 20r - 94$

Bedingung: $h'(r) = 0 \Leftrightarrow 20r = 94 \Leftrightarrow r = 4{,}7$

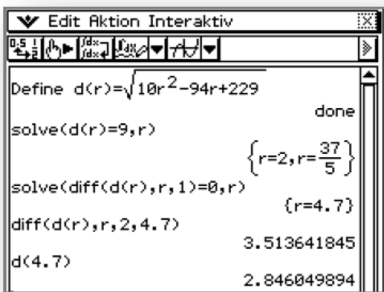
$h''(4{,}7) = 20 > 0$ Minimum!

Minimaler Abstand: $d(4{,}7) = 2{,}846$ (sm)

CASIO ClassPad CAS-Lösung:

$d'(r) = 0$

$d''(4{,}7) > 0$



3.3 Gegeben: $f(x) = -x^3 + x + 4$ und $g(x) = x + 1$

Die Fläche des GSG geht von der y-Achse bis zum Schnittpunkt B der Schaubilder von f und g, dessen x-Koordinate beim Integral gebraucht wird:

$$-x^3 + x + 4 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_B = \sqrt[3]{3}$$

Berechnung der Fläche des GSG:

$$\mathbf{A} = \int_0^{\sqrt[3]{3}} \left[\left(-x^3 + x + 4\right) - \left(x + 1\right)\right] dx = \int_0^{\sqrt[3]{3}} \left(-x^3 + 3\right) dx == \left[-\tfrac{1}{4}x^4 + 3x\right]_0^{\sqrt[3]{3}} = -\tfrac{1}{4}\left(\sqrt[3]{3}\right)^4 + 3\cdot\sqrt[3]{3}$$

Für manuelles Rechnen empfehle ich das Ausklammern von $\sqrt[3]{3}$:

$$= \sqrt[3]{3} \cdot \left[-\tfrac{1}{4} \cdot \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 + 3\right] = \sqrt[3]{3} \cdot \left[-\tfrac{1}{4} \cdot 3 + 3\right] = \sqrt[3]{3} \cdot \left[-\tfrac{3}{4} + \tfrac{12}{4}\right] = \tfrac{9}{4} \cdot \sqrt[3]{3} \approx 3{,}24$$