Abituraufgaben

Stochastik

Baden-Württemberg

Pflichtaufgaben und Wahlaufgaben

aus den Hauptprüfungen der Jahrgänge 2013 bis 2015

Demo für www.mathe-cd.de

Datei Nr. 70300

Stand 8. August 2015

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Übersicht über die Texte mit Abituraufgaben (allg. Gymnasium) aus Baden-Württemberg

Analysis

70100 **Pflichtaufgaben** Analysis
für die Jahrgänge 2004 bis 2015

70101 **Wahlaufgaben Analysis Teil 1**
für die Jahrgänge 2004 bis 2009

70102 **Wahlaufgaben Analysis Teil 2**
für die Jahrgänge 2010 bis 2015

70103 **Wahlaufgaben Analysis Teil 3**
für die Jahrgänge 2000 bis 2003 GK und LK

70111 **Wahlaufgaben Analysis mit CAS**
für die Jahrgänge 2005 bis 2009

Vektorgeometrie

70200 **Pflichtaufgaben Geometrie**
für die Jahrgänge 2004 bis 2015

70201: **Wahlaufgaben Analytische Geometrie – Teil 1**
für die Jahrgänge 2004 bis 2009

70202: **Wahlaufgaben Analytische Geometrie – Teil 2**
für die Jahrgänge 2010 bis 2015

70203: **Wahlaufgaben Analytische Geometrie – Teil 3**
für die Jahrgänge 2000 bis 2003 GK und LK

70211 **Wahlaufgaben Geometrie mit CAS Teil 1**
für die Jahrgänge 2005 bis 2009

Stochastik

70300 **Pflichtaufgaben und Wahlaufgaben Stochastik**
für die Jahrgänge 2013 bis 2015
außerdem Aufgaben aus frühen Jahren

Ab 2013 wird in BW im Abitur wieder Stochastik abgeprüft: 1 Pflicht- und 2 Wahlaufgaben.

Hier sammle ich die Aufgaben:

In diesem Text sind die Pflichtaufgaben und die Wahlaufgaben gesammelt.

Demo für www.mathe-cd.de

Inhalt

Demo für www.mathe-cd.de

Abiturprüfung 1995 LK Gruppe 2 Aufgabe 1

Teilaufgabe d)

Frau Schulz betreut auf einem Wohltätigkeitsbasar einen Stand, bei dem Kugeln aus einer Urne gezogen werden können. Diese Urne enthält ausschließlich Kugeln mit der Urne (+2) bzw. (+5) bzw. (-7). Eine Kugel mit der Aufschrift (+2) wird ebenso wie eine Kugel mit der Aufschrift (+5) mit der Wahrscheinlichkeit 0,3 gezogen.

Ein Spiel besteht dann darin, dass man zweimal hintereinander eine Kugel mit Zurücklegen zieht und deren Aufschrift feststellt; anschließend werden die zwei Zahlen auf den Kugeln – unter Beachtung ihrer Vorzeichen – addiert. Ist diese Summe s positiv, werden dem Spieler s DM ausbezahlt, der Spieler hat gewonnen. Ist die Summe s negativ, hat der Spieler s DM an Frau Schulz zu bezahlen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man bei einem Spiel?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt ein Spieler erst beim fünften Spiel zum zweiten Mal?

Die Organisatoren des Basars fordern bei Frau Schulz einen Voranschlag für den voraussichtlichen Gewinn an. Frau Schulz schätzt, dass bei ihr etwa 2500 Spiele gemacht werden, und sie errechnet zu jedem möglichen Wert von s den Erwartungswert zur Anzahl der zugehörigen Gewinne oder Verluste. Welchen Voranschlag für den Gesamtgewinn wird Frau Schulz abgeben?

Demo für www.mathe-cd.de

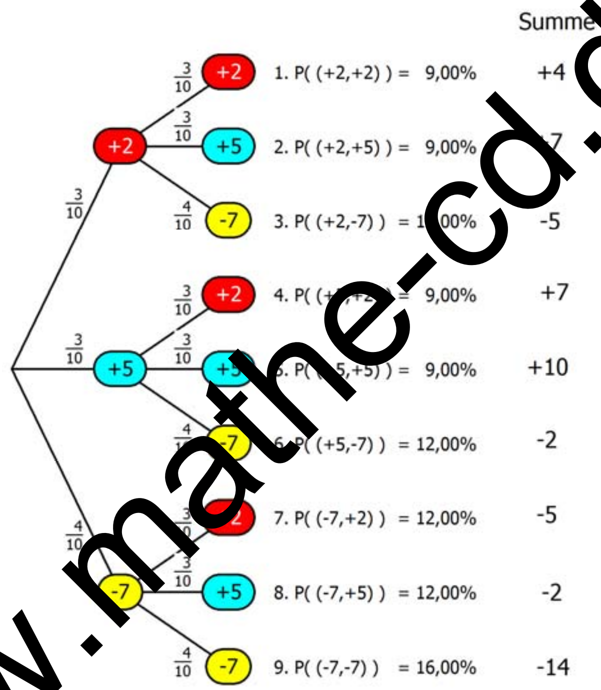
Abiturprüfung 1995 Lösung

Gegeben ist die Wahrscheinlichkeit für eine Kugel mit der Aufschrift (+2): $p_2 = 0{,}3$

und die Wahrscheinlichkeit für eine Kugel mit der Aufschrift (+5): $p_5 = 0{,}3$

Daher folgt für die Wahrscheinlichkeit für eine Kugel mit der Aufschrift (-7): $p_{-7} = 0{,}4$.

Baumdiagramm zum Spiel „Zweimal Ziehen mit Zurücklegen“



Gewinntabelle für den Spieler:

(Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinns):

Ereignis (Gewinn g_i)	Wahrsch.keit $P(G = g_i)$	Erwartungs-wert für g_i
+4	0,09	0,36
+7	0,18	1,26
+10	0,09	0,90
-2	0,24	-0,48
-5	0,24	-1,20
-14	0,16	-2,24

Erwartungswert für den Gewinn G bei 1 Spiel:

$$E(G) = 0{,}36 + 1{,}26 + 0{,}9 - 0{,}48 - 1{,}20 - 2{,}24 = -1{,}40$$

Für die Spielveranstalterin Frau Schulz ergibt das bei 2500 Spielen diese Gewinnerwartung:

$$E_{ges} = 2500 \cdot (-1{,}40) = -3500 \quad \text{(DM)}$$

Ergebnis: Frau Schulz kann mit einem Gewinn von 3500 DM rechnen.
Das ist ihr Gewinnvorschlag gegenüber den Organisatoren.

Demo für www.mathe-cd.de

Abiturprüfung 2013

Pflichtaufgabe A8

Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch.

a) Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt die aufgedeckt liegen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse;

A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch.

B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch.

b) Die neun Spielkarten werden gemischt und erneut verdeckt ausgelegt.
Laura dreht nun so lange Karten um und lässt sie aufgedeckt auf dem Tisch liegen, bis ein Ass erscheint. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an. Welche Werte kann X annehmen? Berechnen Sie $P(X \leq 2)$. (4 VP)

Wahlaufgabe B 1.2

Bei einer Lotterie sind 10% der Lose Gewinnlose. Jemand kauft drei Lose.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter mindestens zwei Gewinnlose?
Wie viele Lose hätte man mindestens kaufen müssen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinnlose über 50% liegt? (4 VP)

Wahlaufgabe B 2.2

Auf zwei Glücksrädern befinden sich jeweils sechs gleich große Felder. Bei jedem Spiel werden die Räder einmal in Drehung versetzt. Sie laufen dann unabhängig voneinander aus und bleiben so stehen, dass von jedem Rad genau ein Feld im Rahmen sichtbar ist.

a) Zunächst werden die Räder als ideal angenommen.
Bei einem Einsatz von 0,20 € sind folgende Auszahlungen vorgesehen:

Stern – Stern	2,00 €
Diamant – Diamant	0,85 €
Kleeblatt – Kleeblatt	0,20 €

Weisen Sie nach, dass das Spiel fair ist.
Nun möchte der Veranstalter auf lange Sicht pro Spiel 5 Cent Gewinn erzielen.
Dazu soll nur der Auszahlungsbetrag für "Diamant - Diamant" geändert werden.
Berechnen Sie diesen neuen Auszahlungsbetrag. (3 VP)

b) Es besteht der Verdacht, dass die Wahrscheinlichkeit p für "Stern-Stern" geringer als $\frac{1}{36}$ ist.
Daher soll ein Test mit 500 Spielen durchgeführt werden. Formulieren Sie die Entscheidungsregel für die Nullhypothese H_0: $p \geq \frac{1}{36}$,
wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens 5% betragen soll. (3 VP)

Demo für www.mathe-cd.de

Abiturprüfung 2014

Pflichtaufgabe A8

An einem Spielautomaten verliert man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele.

a) Formulieren Sie ein Ereignis A, für das gilt:

$$P(A)=\binom{10}{8}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^9\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

b) Jemand spielt vier Spiele an dem Automaten.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er dabei genau zwei Mal? (3 VP)

Wahlaufgabe B 1.2

In einem Gefäß G1 sind 6 schwarze und 4 weiße Kugeln.
In einem Gefäß G2 sind 3 schwarze und 7 weiße Kugeln.

a) Aus Gefäß G1 wird 20 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 12 Mal eine schwarze Kugel gezogen wird.
Aus Gefäß G2 wird 8 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 schwarze Kugeln gezogen werden, und zwar bei direkt aufeinander folgenden Zügen. (4 VP)

b) Nun werden aus G1 zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in das Gefäß G2 gelegt.
Anschließend wird eine Kugel aus G2 gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel schwarz? (3 VP)

Wahlaufgabe B 2.2

Bei der Produktion von Bleistiften beträgt der Anteil fehlerhafter Stifte erfahrungsgemäß 5%.

a) Ein Qualitätsprüfer entnimmt der Produktion zufällig 800 Bleistifte.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Stifte in dieser Stichprobe.
Berechnen Sie $P(X\le 30)$.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht der Wert von X um weniger als 10 vom Erwartungswert von X ab? (3 VP)

b) Der Betrieb erwirbt eine neue Maschine, von der behauptet wird, dass höchstens 2% der von ihr produzierten Bleistifte fehlerhaft sind. Diese Hypothese H_0 soll mithilfe eines Tests an 800 zufällig ausgewählten Stiften überprüft werden.
Bei welchen Anzahlen fehlerhafter Stifte entscheidet man sich gegen die Hypothese, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit maximal 5% betragen soll? (3 VP)

Demo für www.mathe-cd.de

Abiturprüfung 2015

15-S8 Pflichtaufgabe

Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden: Rot: 20%, Grün: 30%, Blau: 50%.

Das Glücksrad wird n-mal gedreht.

Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.

a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.

Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$P(X=k)$	0,01	0,06	0,14	0,21	0,22	0,17	0,11	0,05	...

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens dreimal Rot angezeigt wird.

c) Entscheiden Sie, welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann: 20, 25 oder 30. Begründen Sie Ihre Entscheidung. (4 VP)

Wahlaufgabe B 1.2

Ein Großhändler gibt an, dass sein Weizensaatgut eine Keimfähigkeit von mindestens 80% hat. Mehrere Kunden vermuten, dass die Keimfähigkeit in Wirklichkeit kleiner ist.

Deswegen wird die Aussage des Großhändlers mit Hilfe eines Tests auf einem Signifikanzniveau von 10% überprüft, indem 500 Weizenkörner untersucht werden.

Als Nullhypothese wird die Angabe des Großhändlers verwendet.

Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel in Worten.

Die tatsächliche Keimfähigkeit des Saatguts beträgt 82%.

Wie groß ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei obigem Test die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird? (4 VP)

Wahlaufgabe B 2.2

Bei einem Biathlonwettbewerb läuft ein Athlet eine 2,5 km lange Runde, dann schießt er liegend fünf Mal; anschließend läuft er eine zweite Runde und schießt stehend fünf Mal; nach einer dritten Runde erreicht er das Ziel. Für jeden Fehlschuss muss er direkt nach dem Schießen eine 200 m lange Strafrunde laufen. Aufgrund der bisherigen Schießleistungen geht der Trainer davon aus, dass der Athlet stehend mit 88% und liegend mit 93% Wahrscheinlichkeit trifft. Es wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Ergebnisse der einzelnen Schüsse voneinander unabhängig sind.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Athlet stehend bei fünf Schüssen genau vier Mal trifft. (1 VP)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet im gesamten Wettbewerb höchstens einmal eine Strafrunde laufen muss. (3 VP)

c) Der Athlet möchte seine Leistungen im Stehendschießen verbessern und künftig mit über 95% Wahrscheinlichkeit bei fünf Schüssen mindestens vier Mal treffen. Welche Trefferwahrscheinlichkeit muss er dafür mindestens erreichen? (2 VP)

Demo für www.mathe-cd.de

Abiturprüfung 2015 Lösungen

15-S8 Pflichtaufgabe

Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden: Rot: 20%, Grün: 30%, Blau: 50%.

Das Glücksrad wird n-mal gedreht. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.

a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.

X ist binomialverteilt, da es für jede Drehung genau zwei Ausgänge gibt: rot / nicht rot.

Dabei ist $p_{rot} = 0{,}2$, $p_{nicht\text{-}rot} = 0{,}8$.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens dreimal Rot angezeigt wird.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (0{,}01 + 0{,}06 + 0{,}14) = 1 - 0{,}21 = 0{,}79$$

c) Entscheiden Sie, welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann: 20, 25 oder 30. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Hierzu berechnet man die Erwartungswerte: $E = n \cdot p$.

n = 20: $E = 20 \cdot 0{,}2 = 4$

n = 25: $E = 25 \cdot 0{,}2 = 5$

n = 30: $E = 30 \cdot 0{,}2 = 6$

Da der Erwartungswert mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt und diese bei 4 Treffern rot liegt, kommt nur n = 20 in Frage.

Demo für www.mathe-cd.de

Wahlaufgabe B 1.2

Ein Großhändler gibt an, dass sein Weizensaatgut eine Keimfähigkeit von mindestens 80% hat.
Mehrere Kunden vermuten, dass die Keimfähigkeit in Wirklichkeit kleiner ist.
Deswegen wird die Aussage des Großhändlers mit Hilfe eines Tests auf einem Signifikanzniveau von 10% überprüft, indem 500 Weizenkörner untersucht werden.
Als Nullhypothese wird die Angabe des Großhändlers verwendet.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel in Worten.

Durchführung eines Tests zur Nullhypothese: H_O: $p \geq 0{,}8$

X sei die Anzahl der keimfähigen Weizenkörner.

X ist binomialvertreilt mit n = 500 und p = 0,8.

Erwartungswert von X: $E(X) = n \cdot p = 400$

Ergebnisbereich von X: $S = \{\underbrace{0, 1, \ldots, k}_{A} \mid \underbrace{k+1, \ldots, E, \ldots, 500}_{\bar{A}}\}$

Vorläufige Entscheidungsregel:

Werden mehr als k keimfähige Weizenkörner gefunden, dann wird die Nullhypothese angenommen, findet man höchstens k solche Körner, wird sie abgelehnt.

Es handelt sich also um einen linksseitigen Test.

k bestimmt man durch die **Bedingung**,
dass das **Signifikanzniveau 10%** betragen soll: $P(A) \leq 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq k) \leq 0{,}1$.

Zur Lösung dieser Ungleichung gibt es verschiedene Wege (je nach Rechnereinsatz):

(1) Berechnung einzelner Werte (k wird also „probiert“) mit **CASIO Classpad CAS**:

mit **TI Nspire CAS**

binomCdf(500,0.8,0,386)	0.067303
binomCdf(500,0.8,0,387)	0.082609
binomCdf(500,0.8,0,388)	0.10044

```
binomialCDf(0,386,500,0.8)
                    0.0673
binomialCDf(0,387,500,0.8)
                    0.0826
binomialCDf(0,388,500,0.8)
                    0.1004
```

Dies ist oft ein mühsamer Weg.

Hieraus entnimmt man, dass die Wahrscheinlichkeit für $P(X \leq 387) < 0{,}1$ ist,
während $P(X \leq 388) > 0{,}1$ ist. Also ist k = 387.

(2) Ausgabe einer Wertetafel (**TI Nspire CAS**)

Man definiert im Calculator die Funktion Define $f(x)$=binomCdf(500,0.8,0,x) *Fertig*

Dann öffnet man eine neue Seite mit Lists und Spreadsheet.

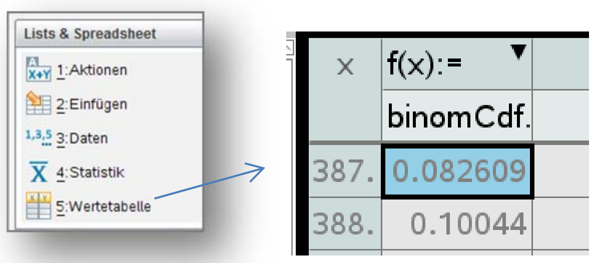
Dazu klickt man „Wertetafel“ an

und wählt die Funktion f aus.

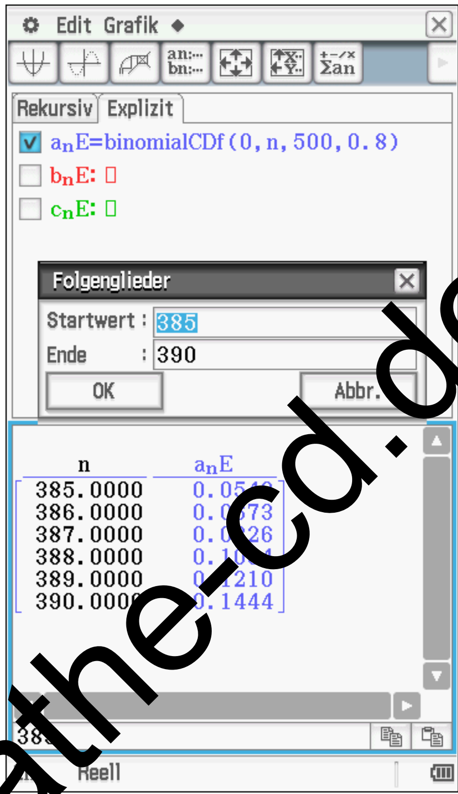
Dann wird die Wertetafel angezeigt.

Man findet den Wert < 0,1 bei 387 erfüllt.

Also ist k = 387.



Demo für www.mathe-cd.de



Ausgabe einer Wertetafel (**CASIO ClassPad CAS**)

Im **Menü „Folgen & Reihen“** wird die explizite Folge

a_n = binomialCDf(0,n,500,0.8) eingetragen .

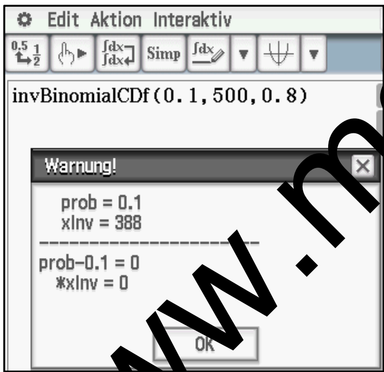
Auch hier findet man den Wert < 0,1 bist 387 erfüllt.

Also ist k = 387.

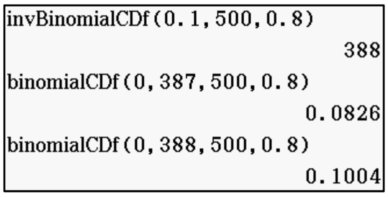
(3) CASIO ClassPad CAS besitzt eine Inverse Funktion

zur direkten Lösung der Ungleichung.

Eingabe (interaktiv): *Warnung:*

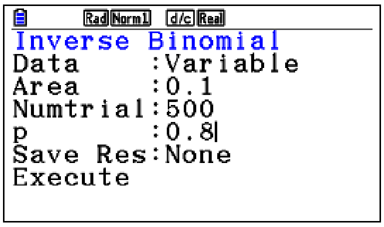


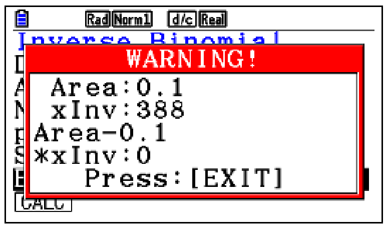
Ergebnis:

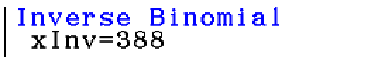


Die Warnung besagt, dass man außer 388 noch den Nachbarwert 387 überprüfen soll.
Rechts sieht man dann, dass k = 387 der bessere Wert ist.

(4) Lösung mit dem GTR CASIO fx CG 20 (für solche Rechner war die Aufgabe gemacht!)





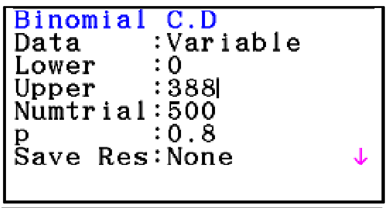


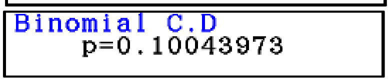
Die Warnung besagt, dass man den Wert und seinen Nachbarwert kontrollieren sollte.

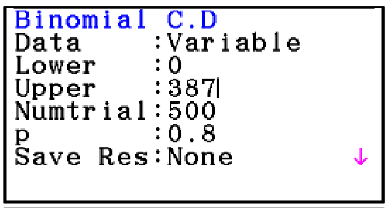
Weil die Ungleichung lautet

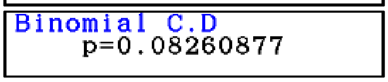
$P(X \le k) \le 0{,}1$, ist der Nachbarwert von k = 388 dann k = 387.

Man erkennt, *dass k = 387 der bessere Wert ist.*









Ergebnis (Entscheidungsregel): Findet man höchstens 387 keimfähige Weizenkörner, lehnt man die Nullhypothese ab.

Demo für www.mathe-cd.de