GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE

I.

Gegeben ist für $k \in \mathbb{R}^+$ die Schar von Funktionen $f_k : x \mapsto 1 - \dfrac{2k}{e^x + k}$ mit dem maximalen Definitionsbereich D_k. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

5 1. a) Geben Sie den Definitionsbereich D_k an. Bestimmen Sie das Verhalten von f_k für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten von G_k an.

4 b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_k.

[zur Kontrolle: $f'_k(x) = \dfrac{2ke^x}{(e^x + k)^2}$]

4 c) Zeigen Sie, dass G_k die x-Achse nur im Punkt $S_k(\ln k \mid 0)$ schneidet. Die Tangente an G_k im Punkt S_k wird mit t_k bezeichnet. Begründen Sie, dass alle Tangenten t_k parallel zueinander sind.

4 d) Zeigen Sie, dass sich die Graphen G_1 und G_8 nicht schneiden.

6 e) Berechnen Sie $f_1(-1)$, $f_1(1)$, $f_8(1)$ und $f_8(3)$. Zeichnen Sie die Graphen G_1 und G_8, deren Asymptoten sowie die Tangenten t_1 und t_8 unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem ein.

3 f) Begründen Sie, dass durch jeden Punkt der x-Achse ein Graph G_k verläuft.

5 g) Zeigen Sie, dass die Funktion $F_k : x \mapsto 2 \cdot \ln(e^x + k) - x$ mit $x \in D_k$ eine Stammfunktion von f_k ist.

5 h) G_8 und die Koordinatenachsen begrenzen im IV. Quadranten ein Flächenstück. Berechnen Sie dessen Inhalt.

4 2. Lässt man für den Parameter k auch negative Werte zu, so unterscheiden sich die Graphen G_k mit $k \in \mathbb{R}^-$ von den Graphen G_k mit $k \in \mathbb{R}^+$. Geben Sie zwei grundsätzliche Unterschiede an und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

40