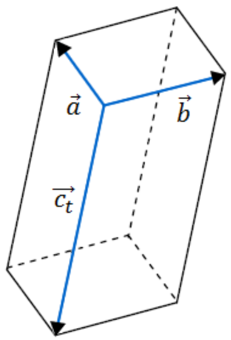
Abitur 2014 Mathematik Geometrie VI

Die Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{c_t} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$ spannen für jeden Wert von t mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ einen Körper auf. Die Abbildung zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von t.



Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Zeigen Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind.

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die der jeweils zugehörige Quader das Volumen 15 besitzt.

Eine Kugel besitzt den Mittelpunkt $M(-3|2|7)$. Der Punkt $P(3|4|4)$ liegt auf der Kugel.

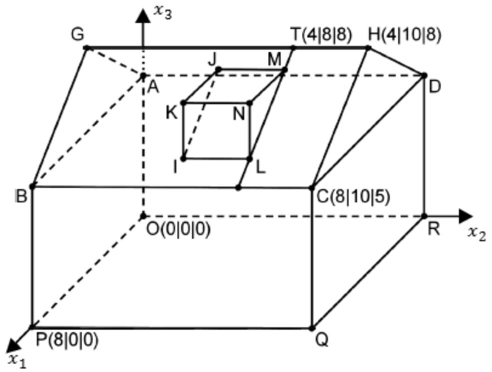
Teilaufgabe Teil A 2a (3 BE)

Der Punkt Q liegt ebenfalls auf der Kugel, die Strecke $[P\,Q]$ verläuft durch deren Mittelpunkt. Ermitteln Sie die Koordinaten von Q.

Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

Weisen Sie nach, dass die Kugel die $x_1\,x_2$-Ebene berührt.

Die Abbildung zeigt modellhaft ein Einfamilienhaus, das auf einer horizontalen Fläche steht. Auf einer der beiden rechteckigen Dachflächen soll eine Dachgaube errichtet werden. Die Punkte A, B, C, D, O, P, Q und R sind die Eckpunkte eines Quaders. Das gerade dreiseitige Prisma $L\,M\,N\,I\,J\,K$ stellt die Dachgaube dar, die Strecke $[G\,H]$ den First des Dachs, d. h. die obere waagrechte Dachkante. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m, d. h. das Haus ist 10 m lang.



Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Berechnen Sie den Inhalt derjenigen Dachfläche, die im Modell durch das Rechteck $B\,C\,H\,G$ dargestellt wird.

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

In der Stadt, in der das Einfamilienhaus steht, gilt für die Errichtung von Dachgauben eine Satzung, die jeder Bauherr einhalten muss. Diese Satzung lässt die Errichtung einer Dachgaube zu, wenn die Größe des Neigungswinkels der Dachfläche des jeweiligen Hausdachs gegen die Horizontale mindestens 35° beträgt. Zeigen Sie rechnerisch, dass für das betrachtete Einfamilienhaus die Errichtung einer Dachgaube zulässig ist.

Die Dachfläche, auf der die Dachgaube errichtet wird, liegt im Modell in der Ebene $E : 3x_1 + 4x_3 - 44 = 0$.

Die Dachgaube soll so errichtet werden, dass sie von dem seitlichen Rand der Dachfläche, der im Modell durch die Strecke $[HC]$ dargestellt wird, den Abstand 2 m und vom First des Dachs den Abstand 1 m hat. Zur Ermittlung der Koordinaten des Punkts M wird die durch den Punkt $T(4|8|8)$ verlaufende Gerade $t : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, betrachtet.

Teilaufgabe Teil B c (5 BE)

Begründen Sie, dass t in der Ebene E verläuft und von der Geraden HC den Abstand 2 besitzt.

Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Auf der Geraden t wird nun der Punkt M so festgelegt, dass der Abstand der Dachgaube vom First 1 m beträgt. Bestimmen Sie die Koordinaten von M.

(*Ergebnis:* $M(4,8|8|7,4)$)

Die Punkte M und N liegen auf der Geraden $m : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 8 \\ 7,4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$, die im Modell die Neigung der Dachfläche der Gaube festlegt. Die zur x_3-Achse parallele Strecke $[NL]$ stellt im Modell den sogenannten Gaubenstiel dar; dessen Länge soll 1,4 m betragen. Um die Koordinaten von N und L zu bestimmen, wird die Ebene F betrachtet, die durch Verschiebung von E um 1,4 in positive x_3-Richtung entsteht.

Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Begründen Sie, dass $3x_1 + 4x_3 - 49,6 = 0$ eine Gleichung von F ist.

Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

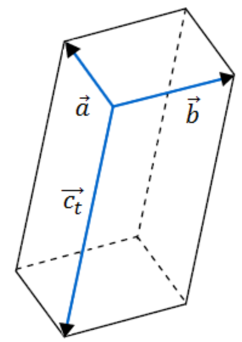
Bestimmen Sie die Koordinaten von N und L.

(*Teilergebnis:* $N(7,2|8|7)$)

Lösung

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Die Vektoren $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{c_t} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$ spannen für jeden Wert von t mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ einen Körper auf. Die Abbildung zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von t.



Zeigen Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1a

Skalarprodukt

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 + 2 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{c_t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} = 8t + 2t - 10t = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{c_t}$$

$$\overrightarrow{b} \circ \overrightarrow{c_t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} = -4t + 4t + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{c_t}$$

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

Die Vektoren $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ und $\overrightarrow{c_t}$ stehen jeweils senkrecht aufeinander. Die aufgespannten Körper sind somit alle Quader.

Alternative Lösung

1. $\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 + 2 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$

2. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{c_t}$ für $(t = -1) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{c_t} \perp \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$

Teilaufgabe Teil A 1b (3 BE)

Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die der jeweils zugehörige Quader das Volumen 15 besitzt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 1b

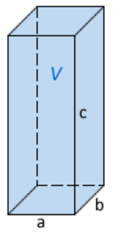
Volumen eines Quaders

Volumen des Quaders bestimmen:

Erläuterung: *Volumen eines Quaders*

Das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c ist gegeben durch:

$V = a \cdot b \cdot c$



$V = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot |\overrightarrow{c_t}|$

$$V = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}\right|$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$V = \sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+4+0} \cdot \sqrt{16t^2 + 4t^2 + 25t^2}$

$V = 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{45t^2}$

Es soll gelten: $V = 15$

$15 = 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{45t^2}$

$\frac{15}{3\sqrt{5}} = \sqrt{45t^2} \qquad | \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{5} = \sqrt{45t^2}$

$5 = 45t^2$

$t = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} = \pm\frac{1}{3}$

Alternative Lösung

Bestimmung des Volumens über das Spatprodukt:

$$V = \left| \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \right) \circ \overrightarrow{c_t} \right|$$

$$V = \left| \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} \right|$$

$$V = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} \right|$$

$V = |-16t - 4t - 25t| = |-45t|$

1. Fall: $15 = -45t \quad \Rightarrow \quad t_1 = -\frac{1}{3}$

2. Fall: $15 = -(-45t) \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{1}{3}$

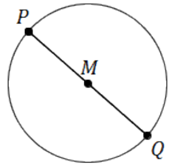
Teilaufgabe Teil A 2a (3 BE)

Eine Kugel besitzt den Mittelpunkt $M(-3|2|7)$. Der Punkt $P(3|4|4)$ liegt auf der Kugel.

Der Punkt Q liegt ebenfalls auf der Kugel, die Strecke $[PQ]$ verläuft durch deren Mittelpunkt. Ermitteln Sie die Koordinaten von Q.

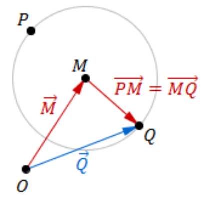
Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2a

Lage eines Punktes



$M(-3|2|7)$; $P(3|4|4)$

Erläuterung: *Vektoraddition*



Da die Strecke $[PQ]$ durch M geht, ist $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$.

$\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{M} + \overrightarrow{PM}$

$\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{M} + \left[\overrightarrow{M} - \overrightarrow{P}\right]$

$$\overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

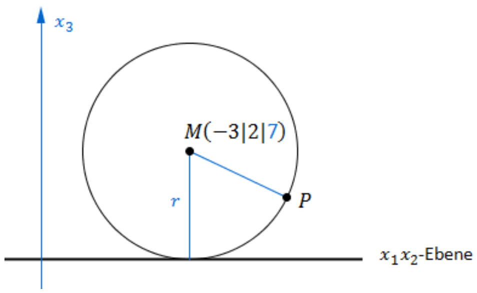
$\Rightarrow \quad Q(-9|0|10)$

Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

Weisen Sie nach, dass die Kugel die $x_1 x_2$-Ebene berührt.

Lösung zu Teilaufgabe Teil A 2b

Lagebeziehung Ebene und Kugel



$M(-3|2|7)$; $P(3|4|4)$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{P} - \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Radius der Kugel bestimmen:

> Erläuterung: *Betrag eines Vektors*
>
> Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:
>
> $$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

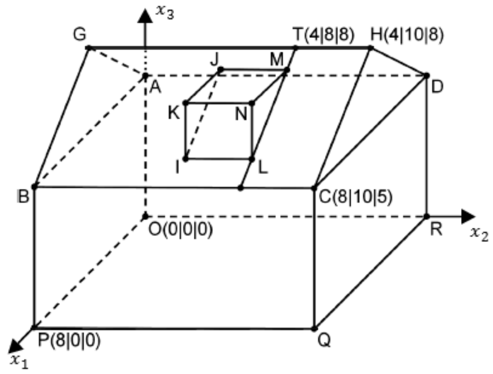
$$r = \left|\overrightarrow{MP}\right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7$$

Der Radius der Kugel entspricht der x_3-Koordinate des Mittelpunktes M.

$\Rightarrow$ Die Kugel berührt die $x_1\,x_2$-Ebene.

Teilaufgabe Teil B a (2 BE)

Die Abbildung zeigt modellhaft ein Einfamilienhaus, das auf einer horizontalen Fläche steht. Auf einer der beiden rechteckigen Dachflächen soll eine Dachgaube errichtet werden. Die Punkte A, B, C, D, O, P, Q und R sind die Eckpunkte eines Quaders. Das gerade dreiseitige Prisma $L\,M\,N\,I\,J\,K$ stellt die Dachgaube dar, die Strecke $[G\,H]$ den First des Dachs, d. h. die obere waagrechte Dachkante. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m, d. h. das Haus ist 10 m lang.



Berechnen Sie den Inhalt derjenigen Dachfläche, die im Modell durch das Rechteck $B\,C\,H\,G$ dargestellt wird.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B a

Länge eines Vektors

$C(8|10|5)$; $H(4|10|8)$

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{H} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

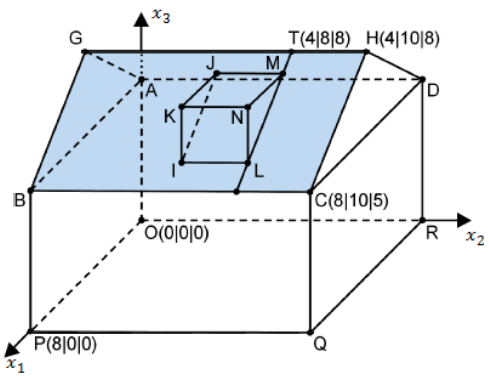
Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\left|\overrightarrow{CH}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+0+9} = \sqrt{25} = 5$$

Flächeninhalt eines Rechtecks



Erläuterung:

Die Länge des Vektors $\overrightarrow{BC}$ entspricht der x_2-Koordinate von C.

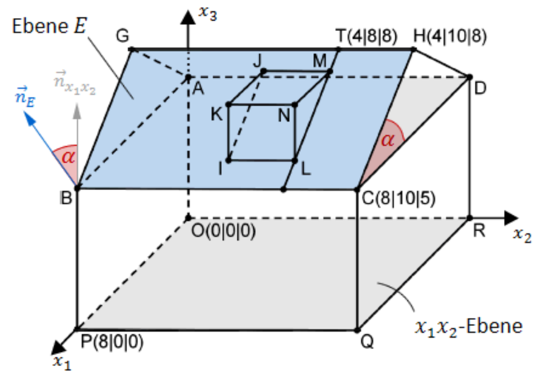
$$A_{BCHG} = \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CH}\right| = 10 \cdot 5 = 50 \text{ m}^2$$

Teilaufgabe Teil B b (3 BE)

In der Stadt, in der das Einfamilienhaus steht, gilt für die Errichtung von Dachgauben eine Satzung, die jeder Bauherr einhalten muss. Diese Satzung lässt die Errichtung einer Dachgaube zu, wenn die Größe des Neigungswinkels der Dachfläche des jeweiligen Hausdachs gegen die Horizontale mindestens 35° beträgt. Zeigen Sie rechnerisch, dass für das betrachtete Einfamilienhaus die Errichtung einer Dachgaube zulässig ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B b

Winkel zwischen zwei Vektoren



Aus dem Bild der Angabe sind die Koordinaten der Punkte zu entnehmen:

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Der Punkt D hat die gleiche x_1-Koordinate wie der Punkt R und die gleiche x_3-Koordinate wie der Punkt C.

$C(8|10|5)$; $D(0|10|5)$

Vektoren $\overrightarrow{CH}$ und $\overrightarrow{CD}$ bestimmen:

$$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{(s. Teil B Aufgabe a)}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Winkel α zwischen den Vektoren $\overrightarrow{CH}$ und $\overrightarrow{CD}$ bestimmen:

Erläuterung: *Skalarprodukt, Winkel zwischen zwei Vektoren*

Aus der allgemeinen Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos \underbrace{\measuredangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}_{\alpha}$$

folgt für den Winkel α zwischen den beiden Vektoren:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$$

(Formel zur Winkelberechnung zwischen 2 Vektoren)

$$\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}$$

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{32 + 0 + 0}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{64}} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1} \frac{4}{5} \approx 36{,}87°$$

Winkel zwischen zwei Ebenen

Alternative Lösung

Erläuterung: *Punktkoordinaten*

Der Punkt B hat die gleiche x_1-Koordinate wie der Punkt P und die gleiche x_3-Koordinate wie der Punkt C.

$B(8|0|5)$; $C(8|10|5)$

$$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E_{BCHG} bestimmen:

Erläuterung: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ zweier Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ ist ein Vektor $\overrightarrow{n}$, der senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannte Ebene steht.

Für die komponentenweise Berechnung gilt:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: *Vereinfachen*

Die Länge eines Normalenvektors ist nicht entscheidend für die Ebene. Der Normalenvektor muss nur senkrecht zur Ebene stehen.
Vereinfachungen durch Ausklammern eines gemeinsamen Faktors bzw. Teilen durch einen Faktor sind erlaubt.

Hier wird der Normalenvektor durch 10 geteilt.

Das erleichtert das Weiterrechnen wesentlich.

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}30\\0\\40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$$

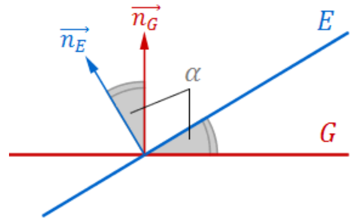
Erläuterung: *Normalenvektor*

Der Normalenvektor einer Ebene steht senkrecht auf diese Ebene und hat eine beliebige Länge.

Im Falle der x_1x_2-Ebene (Koordinatenebene) wählt man z.B. als Normalenvektor den Einheitsvektor $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, der auch Richtungsvektor der x_3-Achse ist.

Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\quad \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Erläuterung: *Winkel zwischen zwei Ebenen*



Der Winkel α zwischen zwei Ebenen E und G ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_G}$.

Winkel α zwischen den Normalenvektoren der Ebene E_{BCHG} und der x_1x_2-Ebene bestimmen:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}$$

$$\cos\alpha = \frac{0+0+4}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{1}}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \cos^{-1}\frac{4}{5} \approx 36{,}87^\circ$$

Teilaufgabe Teil B c (5 BE)

Die Dachfläche, auf der die Dachgaube errichtet wird, liegt im Modell in der Ebene $E: 3x_1 + 4x_3 - 44 = 0$.

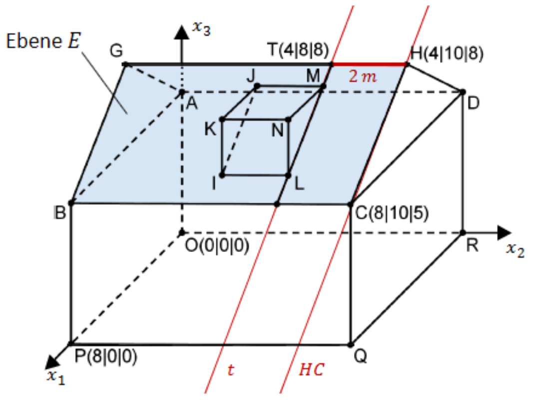
Die Dachgaube soll so errichtet werden, dass sie von dem seitlichen Rand der Dachfläche, der im Modell durch die Strecke $[HC]$ dargestellt wird, den Abstand 2 m und vom First des Dachs den Abstand 1 m hat. Zur Ermittlung der Koordinaten des Punkts

M wird die durch den Punkt $T(4|8|8)$ verlaufende Gerade $t: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, betrachtet.

Begründen Sie, dass t in der Ebene E verläuft und von der Geraden HC den Abstand 2 besitzt.

[Lösung zu Teilaufgabe Teil B c]

Lagebeziehung Gerade - Ebene



$E: 3x_1 + 4x_3 - 44 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$t: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{RV}}, \lambda \in \mathbb{R}$

Skalarprodukt zwischen Normalenvektor der Ebene E und Richtungsvektor $\overrightarrow{RV}$ der Geraden t bilden:

Erläuterung: *Senkrechte Vektoren*

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, ist gleich Null.

$$\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{RV} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 12 + 0 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n_E} \perp \overrightarrow{RV}$$

Da der Normalenvektor der Ebene E senkrecht auf den Richtungsvektor der Geraden t steht und die Gerade durch den Punkt T (der in der Ebene E liegt) verläuft, verläuft t in der Ebene E.

Alternative Lösung

Ebene E und Gerade t schneiden: $\quad E \cap t$

Erläuterung: *Einsetzen*

t wird in E eingesetzt und die Gleichung wird nach λ aufgelöst.

$$\begin{aligned} E \cap t: \quad 3 \cdot (4 + 4\lambda) + 4 \cdot (8 - 3\lambda) - 44 &= 0 \\ 12 + 12\lambda + 32 - 12\lambda - 44 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Erläuterung: *Lagebeziehung von Ebene und Gerade*

Mögliche Lagen einer Gerade zu einer Ebene:
enthalten, parallel, Schnitt (Schnittpunkt)

Überprüfung: Ebene und Gerade scheiden.

Möglichkeiten:

Parameter bleibt stehen (z.B. $\lambda = 1$) $\quad \Rightarrow \quad$ **Schnittpunkt**

Parameter fällt weg und die Aussage ist wahr (z.B. $0 = 0$)
$\Rightarrow$ Gerade ist in der Ebene **enthalten**

Parameter fällt weg und die Aussage ist falsch (z.B. $2 = 1$)
$\Rightarrow$ Gerade liegt **parallel** zur Ebene

$\Rightarrow \quad t$ ist in E enthalten ($t \subset E$)

Abstand paralleler Geraden

Richtungsvektoren der Geraden t und HC vergleichen:

Erläuterung: *Richtungsvektor*

Der Richtungsvektor (RV) der Gerade t ist gleich dem Richtungsvektor der Geraden HC. Somit sind die Geraden parallel.

$$\overrightarrow{RV}_t = \overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad t \parallel HC$$

Da die Punkte T und H auf der Geraden GH liegen, gilt für den Abstand der parallelen Geraden t und HC:

$$d(t, HC) = \left|\overrightarrow{HT}\right| = \left|\overrightarrow{T} - \overrightarrow{H}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0+4+0} = 2$$

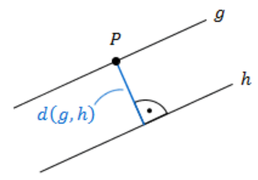
Alternative Lösung

$d(t, HC) = d(T, HC)$

Erläuterung: *Abstand zweier Geraden*

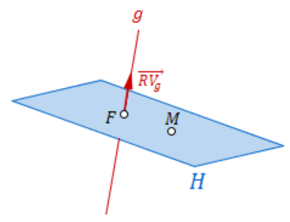
Sind zwei Geraden g und h parallel, so ist ihr Abstand gleich dem Abstand von einem beliebigen Punkt P auf einer der Geraden zu der anderen Geraden.

Ist z.B. P ein Punkt auf der Gerade g, so gilt: $\quad d(g;h) = d(P,h)$



Abstand von T zu HC bestimmen:

Erläuterung: *Hilfsebene*



Um den Abstand zwischen einer Geraden g und einen Punkt M bestimmen zu können, bildet man eine Hilfsebene H die den Punkt M beinhaltet und senkrecht zur Geraden g steht.

Diese Ebene schneidet dann die Gerade g in einem Punkt F. Der Abstand entspricht dann der Länge der Strecke $[MF]$.

Hilfsebene E' durch H senkrecht zu HC aufstellen:

Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*

Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.

$E: \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$

Hier (H ist Aufpunkt und $\overrightarrow{n_{E'}} = \overrightarrow{HC}$):

$$E': \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{HC}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{H}}$$

$E': 4x_1 - 3x_3 = 16 + 0 - 24$

$E': 4x_1 - 3x_3 + 8 = 0$

Hilfsebene E' und Gerade t schneiden: $E' \cap t$

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade*

Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{Q} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.

$$\begin{array}{rlcl} E' \cap t: & 4 \cdot (4 + 4\lambda) - 3 \cdot (8 - 3\lambda) + 8 & = & 0 \\ & 16 + 16\lambda - 24 + 9\lambda + 8 = 0 & = & 0 \\ & 25\lambda & = & 0 \\ & \lambda & = & 0 \end{array}$$

$\lambda = 0$ in t einsetzen und Schnittpunkt F bestimmen:

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$F(4|8|8)$

Der Schnittpunkt F ist gleich dem Punkt T.

Erläuterung: *Betrag eines Vektors*

Die Länge (bzw. der Betrag) $|\overrightarrow{a}|$ eines Vektors $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$|\overrightarrow{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$d(t, H) = d(T; H) = \left| \overrightarrow{TH} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0 + 4 + 0} = 2$$

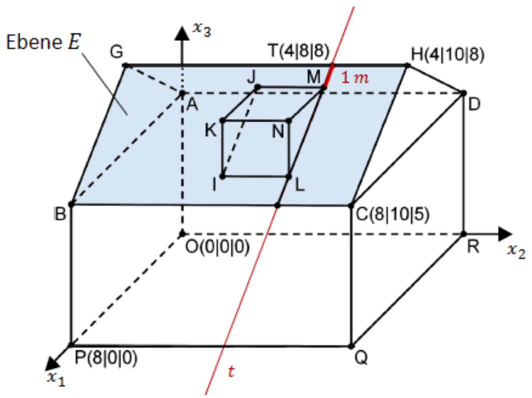
Teilaufgabe Teil B d (3 BE)

Auf der Geraden t wird nun der Punkt M so festgelegt, dass der Abstand der Dachgaube vom First 1 m beträgt. Bestimmen Sie die Koordinaten von M.

(*Ergebnis:* $M(4,8|8|7,4)$)

Lösung zu Teilaufgabe Teil B d

Lage eines Punktes



Normierter Richtungsvektor der Geraden t bestimmen:

Erläuterung: *Einheitsvektor*

Ein Einheitsvektor (normierter Vektor) hat die Länge 1.
Um den Einheitsvektor zu einem gegebenen Vektor zu bestimmen, muss durch den Betrag des Vektors geteilt werden:

$$\overrightarrow{a}^0 = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}$$

Der Einheitsvektor $\overrightarrow{a}^0$ zeigt in dieselbe Richtung wie $\overrightarrow{a}$, hat aber die Länge 1.

$$\overrightarrow{RV_t}^0 = \frac{1}{\left|\overrightarrow{RV_t}\right|} \cdot \overrightarrow{RV_t}$$

Erläuterung: *Richtungsvektor*

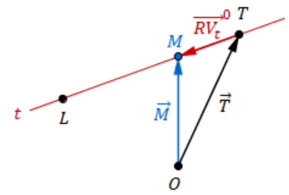
$$\overrightarrow{RV_t} = \overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{(s. Teilaufgabe c)}$$

$$\left|\overrightarrow{HC}\right| = 5 \quad \text{(s. Teilaufgabe a)}$$

$$\overrightarrow{RV_t}^0 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Punkt M bestimmen:

Erläuterung: *Punktkoordinaten*



Um zum Punkt M zu gelangen, bewegt man sich vom Punkt T aus entlang der Geraden t. Der normierte Richtungsvektor $\overrightarrow{RV_t}^0$ der Geraden hat Länge 1 und zeigt vom Punkt T aus in Richtung M.

Da der Punkt M einen Abstand von $1\,m$ vom Punkt T haben soll, passt der normierte Richtungsvektor 1-mal zwischen T und M rein.

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{T} + 1 \cdot \overrightarrow{RV_t}^0$$

$$\overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ 8 \\ \frac{37}{5} \end{pmatrix}$$

$M(4,8|8|7,4)$

Alternative Lösung

$M \in t \quad \Rightarrow \quad M(4 + 4\lambda|8|8 - 3\lambda)$

Es soll gelten: $\quad d(M,T) = 1$

$$d(M,T) = \left|\overrightarrow{MT}\right| = \left| \begin{pmatrix} 4-4-4\lambda \\ 8-8 \\ 8-8+3\lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4\lambda \\ 0 \\ 3\lambda \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16\lambda^2 + 0 + 9\lambda^2} = \sqrt{25\lambda^2}$$

$$\sqrt{25\lambda^2} = 1$$

$25\lambda^2 = 1$

$\lambda = \pm\frac{1}{5}$

$\Rightarrow \quad M_1\left(4+\frac{4}{5}|8|8-\frac{3}{5}\right) \quad ; \quad M_2\left(4-\frac{4}{5}|8|8+\frac{3}{5}\right)$

M_1 ist gesuchter Punkt, da M_2 höher liegt als T (vergleiche x_3-Koordinaten).

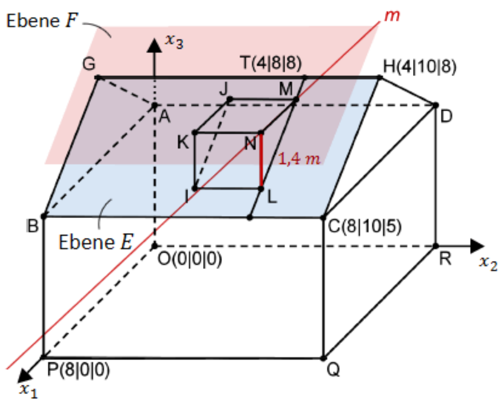
Teilaufgabe Teil B e (3 BE)

Die Punkte M und N liegen auf der Geraden $m: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 8 \\ 7,4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$, die im Modell die Neigung der Dachfläche der Gaube festlegt. Die zur x_3-Achse parallele Strecke $[NL]$ stellt im Modell den sogenannten Gaubenstiel dar; dessen Länge soll $1,4$ m betragen. Um die Koordinaten von N und L zu bestimmen, wird die Ebene F betrachtet, die durch Verschiebung von E um $1,4$ in positive x_3-Richtung entsteht.

Begründen Sie, dass $3x_1 + 4x_3 - 49,6 = 0$ eine Gleichung von F ist.

Lösung zu Teilaufgabe Teil B e

Verschiebung um einen Vektor



Normalenform der Ebene E:

> Erläuterung: *Normalenform einer Ebene*
>
> Zum Aufstellen der Normalenform einer Ebene werden nur der Normalenvektor und ein Punkt P aus der Ebene (Aufpunkt) benötigt.
>
> $E: \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{X} = \overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P}$
>
> Hier (H ist Aufpunkt):

$$E: \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{H}}$$

> Erläuterung: *Normalenvektor*
>
> Die Ebene F entsteht durch Verschiebung der Ebene E. Der Normalenvektor $\overrightarrow{n_F}$ der Ebene F ist somit gleich dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E.

Da $\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{n_F}$, ist die Normalenform der Ebene F gleich:

> Erläuterung:
>
> Als Aufpunkt der Ebene F wird der um $1,4$ Einheiten in positive x_3-Richtung verschobene Aufpunkt H der Ebene E verwendet.

$$F: \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{n_E}} \circ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 8+1,4 \end{pmatrix}$$

$F: 3x_1 + 4x_3 = 12 + 0 + 37,6$

$F: 3x_1 + 4x_3 - 49,6 = 0$

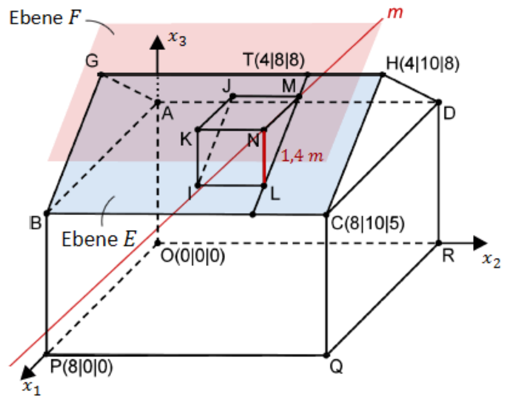
Teilaufgabe Teil B f (4 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten von N und L.

(*Teilergebnis:* $N(7,2|8|7)$)

[Lösung zu Teilaufgabe Teil B f](#)

Schnitt Ebene und Gerade



$F: 3x_1 + 4x_3 - 49,6 = 0$

$$m: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 8 \\ 7,4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ebene F und Gerade m schneiden: $\quad F \cap m$

Erläuterung: *Schnitt Ebene und Gerade, Einsetzen*

Schneidet eine Gerade $g: \overrightarrow{X} = \overrightarrow{Q} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$ eine Ebene E in einem Punkt P, dann erfüllt die Geradengleichung für ein bestimmten Wert von λ (von g) die Normalenform der Ebene E.

Man setzt g in E ein und löst nach λ auf.

$$\begin{aligned} F \cap m: \quad 3 \cdot (4,8 + 6\mu) + 4 \cdot (7,4 - \mu) - 49,6 &= 0 \\ 14,4 + 18\mu + 29,6 - 4\mu - 49,6 &= 0 \\ 14\mu &= 5,6 \\ \mu &= 0,4 \end{aligned}$$

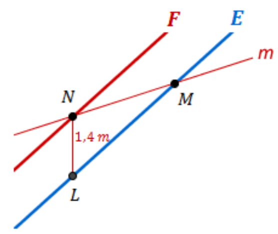
Erläuterung: *Einsetzen*

Um den Schnittpunkt zu bestimmen, wird der gefundene μ-Wert in die Geradengleichung eingesetzt.

$$\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 4,8 \\ 8 \\ 7,4 \end{pmatrix} + 0,4 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$N(7,2|8|7)$

Erläuterung: *Lage des Punktes*



Die Strecke $[NF]$ ist nach Konstruktion parallel zur x_3-Achse und $1,4$ m lang. Die x_1- und x_2 Koordinaten von N und F sind somit gleich. Für die x_3-Koordinaten von L gilt:

$x_{3_L} = x_{3_N} - 1,4$

$L(7,2|8|7 - 1,4) = (7,2|8|5,6)$