Übersicht Analytische Geometrie Stand 26.6.2015

(Die Aufstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit!)

F	**Vektorrechnung**
F1	Ortsvektoren und Vektorketten a) Mittelpunkt b) Schwerpunkt c) Sonstige (Ergänze zum Parallelogramm; restliche Punkte des Quaders ermitteln; Teile Strecke im bestimmten Verhältnis; … d) Zeichnung erstellen
F2	Skalarprodukt a) zum Nachweis von senkrechter Lage b) sonst
F3	Längen von Vektoren berechnen
F5	Besonderes Viereck nachweisen
G	**Geraden und Ebenen im Raum**
G1	a) PF von Geraden aufstellen b) Punktprobe Gerade c) Punktprobe Strecke
G2	Lagebeziehung von Geraden: a) Schnitt b) windschief c) echt parallel d) identisch
G3	a) PF von Ebenen ermitteln sowie überprüfen b) Punktprobe c) Bilden drei Punkte eine Ebene?
G4	a) NF/KF/HNF für Ebenen ermitteln b) Achsenabschnitte c) Zeichnung
G5	Lage Gerade und Ebene: a) Schnittpunkt b) echt parallel c) g in E
G6	Ebenen auf ihre gegenseitige Lage untersuchen a) Schnittgerade b) echt parallel c) identisch d) 3 Ebenen e) Besondere Lage
G8	Die Hesse'sche Normalenform aufstellen.
	Abstände, Volumina im Raum
H2	Flächeninhalt / Volumen a) Dreieck b) Viereck c) Volumen einer Pyramide d) Volumen Quader o. Ä.
H4	Abstand Punkt – Gerade
H5	Abstand a) … b) Ebene – Ebene
H6	Mithilfe des Vektorprodukts Normalenvektoren bestimmen.

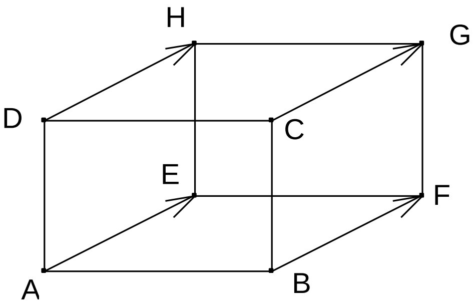
Hilfreich können auch Mathemtik-Filme auf youtube.com sein. Empfehlenswert:
simple maths Analytische Geometrie (27 Videos)
beckuplearning Analytische Geometrie (43 Videos)

Aufgaben im Klausurstil:
S. 271 A. 13, 14
S. 236 f. A. 7, 9, 12

Übergreifende Aufgaben
Lösungen „Pyramide mit farbiger Glasplatte“
Lösungen Flugzeugaufgabe
Erste Übungen zur Vektorrechnung F1
Aufklärungsflugzeug G2 G2 F3 H4 G5 F3 F1
Drachenprisma F1d F3 G2 F1c H2 F1c F1a F3
Berechnungen am Tetraeder F1, F3, F5, H4
Lückentext zur Hesse’schen Normalenform H3
Richtig oder falsch? Verbessere die falschen Aussagen.
Aufgaben aus dem Lehrbuch Lambacher Schweizer LK 2011 zu Ebenen
Abituraufgabe HT4 2013
3. Klausur Q1
4. Klausur Q1
Wiederholende Fragen mit Lösungen

F1 Verschiebungen durch Vektoren sowie Punkte im Raum durch Ortsvektoren und Vektorketten beschreiben und damit realitätsnahe Situationen mathematisch modellieren.

Regeln



Ein Vektor ist Menge aller Pfeile, die parallel, gleich lang und gleich orientiert sind.

Den Vektor $\overrightarrow{AB}$ kann man als eine **Verschiebung** interpretieren, die den Punkt A auf den Punkt B abbildet.
Im Quader rechts gehören jeweils 4 Pfeile zum gleichen Vektor. Z. B. ist $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{DC}$

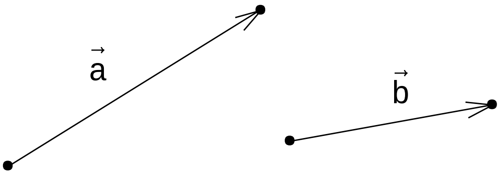
Allgemein ist ein Vektor eine **gerichtete Größe,** wobei die
Länge des Vektors die Maßzahl der Größe und die Richtung des Vektors die Richtung der Größe angibt.
Beispiele: gerichtete Kraft, Bewegungsvektor eines Flugzeuges
Zu einem Punkt A nennt man den $\overrightarrow{OA}$ den **Ortsvektor** von A
In der analytischen Geometrie ermittelt man meistens einen Punkt P, indem man den Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ mit Hilfe einer **Vektorkette** ermittelt, z.B. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}$.
Unter dem **Gegenvektor** $-\vec{a}$ eines Vektors $\vec{a}$ ersteht man den Vektor, der in Länge und Richtung mit $\vec{a}$ übereinstimmt, aber die entgegengesetzte Orientierung hat. Es gilt $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

Dreiecksregel: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;

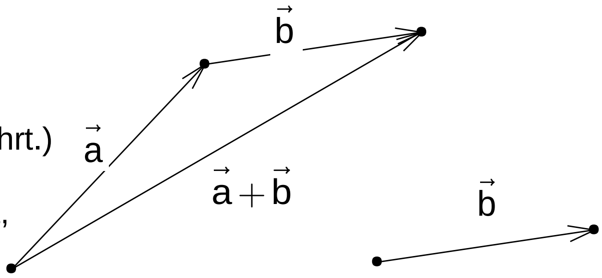
Anwendungsbeispiel: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$

Addition / Subtraktion zweier Vektoren

Gegeben sind zwei Pfeile, die jeweils einen Vektor /eine Verschiebung repräsentieren.

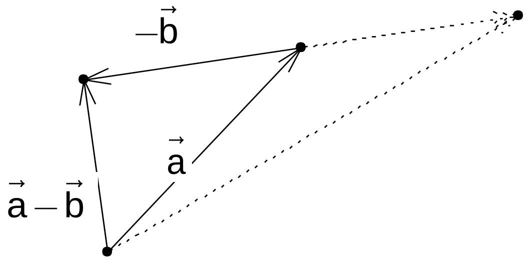


Grafische Addition
Es wird der Pfeil zum zweiten Vektor gezeichnet, dessen Fußpunkt an der Spitze des ersten liegt. (Die Verschiebungen werden hintereinander ausgeführt.)



Der Summenvektor wird durch den Pfeil repräsentiert, der vom Fußpunkt des ersten zur Spitze des zweiten Pfeils führt.

Ein Vektor wird subtrahiert, indem man den Gegenvektor addiert: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$



Typische Anwendungsaufgaben

- Drei Punkte einer Ebene zu einem Parallelogramm ergänzen.
- Restliche Eckpunkte eines Körpers (z. B. Quaders, Prismas) ermitteln.
- Überprüfen, ob ein spezielles Viereck vorliegt (Parallelogramm; Raute; Rechteck; Quadrat; Drachenviereck, (symmetrisches) Trapez
- Überprüfen, ob ein spezielles Dreieck (rechtwinklig, gleichschenklig; gleichseitig) vorliegt.
- Mittelpunkte, Schwerpunkte bestimmen

Beachte:

Für den Mittelpunkt M einer Strecke AB gilt: $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$,

(Koordinaten des Mittelpunktes = jeweils der Durchschnitt der Koordinaten.)

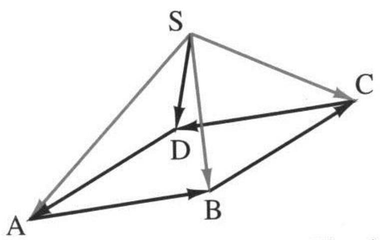
Beispiele:

- A(3|4|–2); B(5| –6 | 7) $\Rightarrow$ M_{AB}(4|–1|2,5))
- Für den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC: $\overrightarrow{OS}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$

  (Koordinaten des Mittelpunktes = jeweils der Durchschnitt der Koordinaten der Eckpunkte)
  A(3|4|–2); B(5| –6 | 7); C(4|–4|10) $\Rightarrow$ S((3+5+4):3|(4–6–4):3|(–2+7+10):3) $\Rightarrow$ S(4|–2|5)
- Vektorkette beginnt (zunächst) im Ursprung $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{O...}+...$
- Richtung des Vektors beachten

1. Beispiel:

Die nebenstehende Figur zeigt eine quadratische Pyramide, d. h. das Viereck ABCD ist ein Quadrat.
Drücke die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$. $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{SD}$ durch die Vektoren $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ und $\overrightarrow{SC}$ aus.



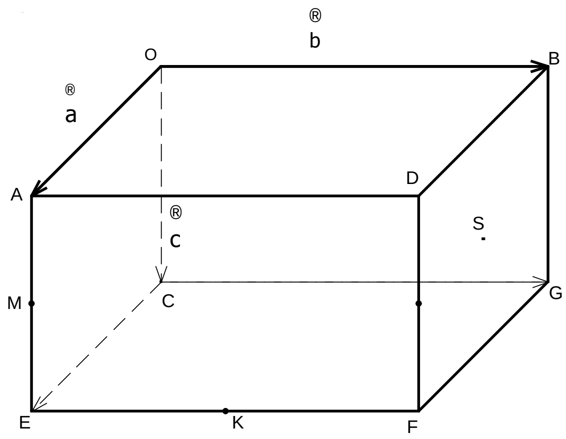
Lösung

$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$; $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}$;

$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}$;

Beispiel:

Im Quader rechts sind K und M Mittelpunkte von Kanten, S der Mittelpunkt der seitlichen Fläche.



a) Drücke durch $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aus:

(i) $\overrightarrow{AK} =$ (ii) $\overrightarrow{OD} =$ (iii) $\overrightarrow{CS} =$

b) Drücke umgekehrt folgende Vektoren durch Eckpunkte aus:

(i) $\vec{b} + \vec{c} =$ (ii) $\vec{c} - \vec{a}$ (iii) $\vec{a} + \vec{c} + 0{,}5\vec{b}$

c) Nun sei für den achsenparallelen Quader F(3|5|–2) und O(0|0|0). Ermittle die Koordinaten der Punkte A, B, C, M, S, K.

d) Überprüfe rechnerisch, ob sich die Geraden g(M,S) und h(B,K) schneiden.

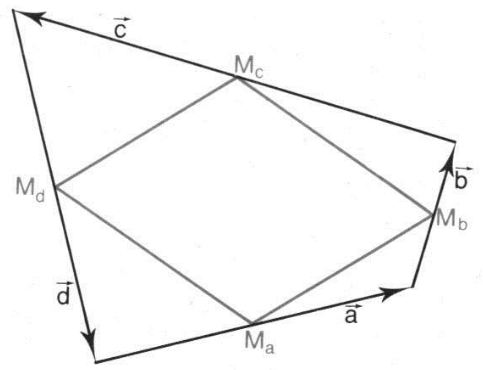
Lösung: a) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ (ii) $\overrightarrow{OD} = \vec{a} + \vec{b}$ (iii) $\overrightarrow{CS} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

b) (i) $\vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OG}$ (ii) $\vec{c} - \vec{a} = \overrightarrow{AC}$ (iii) $\vec{a} + \vec{c} + 0{,}5\vec{b} = \overrightarrow{OK}$

c) A(3|0|0), B(0|5|0), C(0|0|–2), M(3|0|–1), S(1,5|5|–1), K(3|2,5|–2)

3. Beispiel:

In der nebenstehenden Figur sind die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks verbunden.



a) Drücke die Vektoren $\overrightarrow{M_aM_b}$ und $\overrightarrow{M_dM_c}$ durch die Seitenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ aus.

b) Zeige, dass die Strecken M_aM_b und M_dM_c parallel und gleich lang sind.

d) $\overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ e) $\overrightarrow{EM_{CG}} = \vec{c} - \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

Lösung:

$\overrightarrow{M_aM_b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$; $\overrightarrow{M_cM_d} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d})$;

Da $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$ ist, sind die Vektoren gleich, also sind die Strecken parallel und gleich lang.

4. Beispiel: (aus Zentralabitur)

Gegeben sind A(13 | −5 | 3), B (11 | 3 | 1), C (5 | 3 | 7) und S_1 (13 | 1 | 9)

Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte P_6 und P_8 des abgebildeten Würfels, falls die Eckpunkte des Oktaeders auf den Mittelpunkten der Seitenflächen liegen.

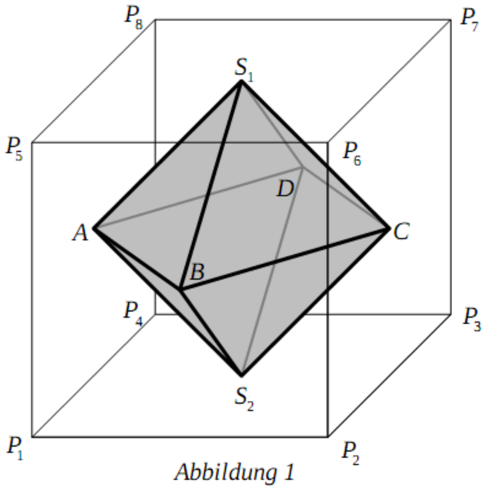


Abbildung 1

Lösung: $\overrightarrow{OP_6} = \overrightarrow{OS_1} + \overrightarrow{S_1P_6} = \overrightarrow{OS_1} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow P_6(11|9|7)$

$\overrightarrow{OP_8} = \overrightarrow{OS_1} + \overrightarrow{S_1P_8} = \overrightarrow{OS_1} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow P_8(15|-7|11)$

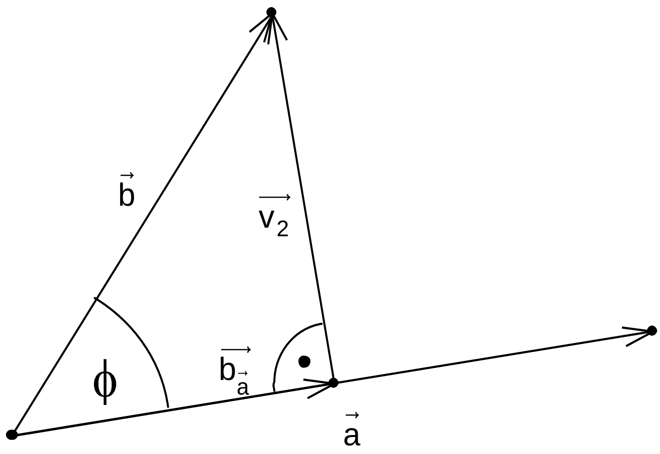
F2 Das Skalarprodukt (SP) zweier Vektoren berechnen und damit entscheiden, ob die Vektoren zueinander orthogonal sind.

Regeln

Rechnerische Ermittlung des SP:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = ad + be + cf$$

Grafische Ermittlung: Länge des einen Vektors multipliziert mit der (orientierten) Länge der senkrechten Projektion des anderen auf den einen.



Skalarprodukt = 0 ⇔ Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

Bei Formulierungen wie senkrecht oder orthogonal sollte man immer an diesen Satz denken.

Typische Anwendungsaufgaben

- Zeige, dass das Viereck ein Rechteck ist / ein Drachenviereck ist.
  (Beim Drachenviereck stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander (und die eine halbiert die andere).)
- *Zeige, dass sich zwei Geraden senkrecht schneiden.*
- Zeige, dass die Gerade parallel zur Ebene verläuft.
  (NV und RV müssen senkrecht aufeinander stehen.)
- …

Beachte:

Das **Skalar**produkt ergibt (im Unterschied zum Vektorprodukt) immer eine Zahl, nie einen Vektor.

1. Beispiel:(„Skalarprodukt = 0 ⇔ Vektoren senkrecht" ausnutzen.)

Gegeben sind: A(80 |400 | 2), B(100 | 400 | 2), C(100 |1200 | 6) und D(80 | 1200 | 6)

Untersuche, ob ABCD ein besonderes Viereck ist.

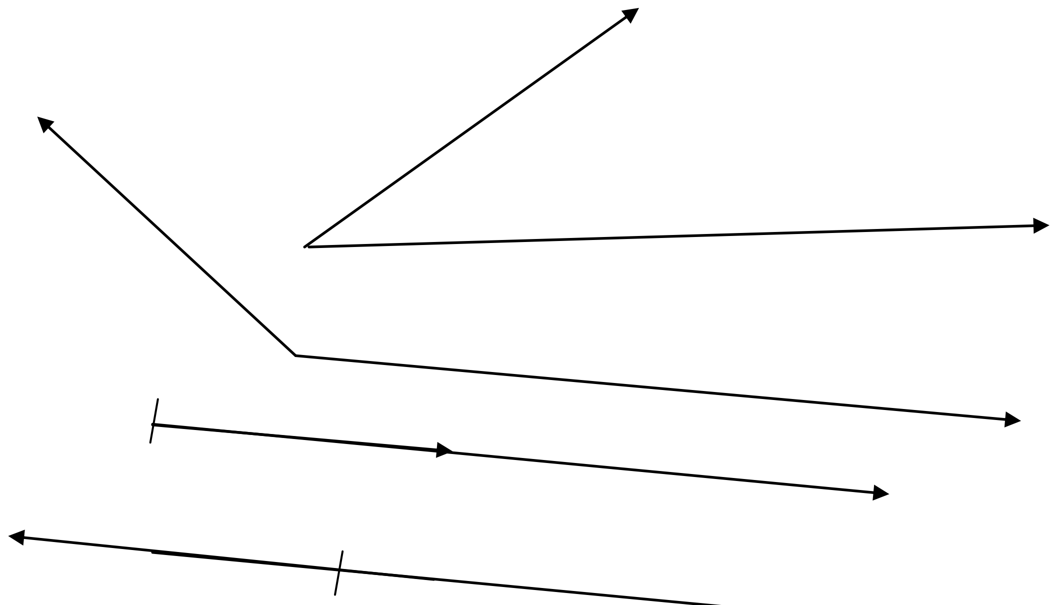
Lösung:

$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow$ ABCD ist ein Parallelogramm.

Zusätzlich gilt: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 800 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ ABCD ist ein Rechteck.

Zusätzlich gilt: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} \neq 0 \Rightarrow$ ABCD ist kein Quadrat.

2. Beispiel:
Ermittle das ungefähre Skalarprodukt der Vektoren (ohne ein KOS einzuzeichnen).



F3: Längen von Strecken im Raum und den Betrag von Vektoren berechnen.

Regeln

Die **Länge**/der **Betrag** eines Vektors berechnet sich mit

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \text{ im IR}^3 \text{ bzw. } \left|\vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a^2+b^2} \text{ im IR}^2.$$

Tipp: Das Vorzeichen der Komponenten spielt keine Rolle, da jeweils quadriert wird. Deshalb gibt man besser nur nicht-negative Zahlen in den TR eingeben.

Beispiel: $\left|\begin{pmatrix} -15 \\ 13 \\ -12 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{15^2+13^2+12^2}$, statt $\sqrt{(-15)^2+13^2+(-12)^2}$;

Falsch ist die Eingabe $\sqrt{-15^2+13^2+-12^2}$

Wenn man einen Vektor $\vec{a}$ durch seine Länge dividiert, erhält man den **Einheitsvektor** $\overrightarrow{a_0}$, d.h. denjenigen Vektor, der mit $\vec{a}$ in Richtung und Orientierung übereinstimmt, aber die Länge 1 hat.

$\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$. **(Normierung eines Vektors)**

Entsprechend ist $k \cdot \overrightarrow{a_0}$ ein Vektor, der mit $\vec{a}$ in Richtung und Orientierung übereinstimmt, aber die Länge k hat.

Typische Anwendungsaufgaben

- Untersuche, ob ein Quadrat (ein regelmäßiges Sechseck, eine Raute, ein Trapez, ein Rechteck, ein Drachenviereck, ...) vorliegt.
- Zeige, dass das Dreieck gleichschenklig/gleichseitig ist.
- Einen Vektor $\vec{n}$ normieren (auf die Länge 1 bei gleicher Richtung bringen): $\overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}$
- Zu einem Vektor $\vec{a}$ einen Vektor $\vec{b}$ mit gleicher Richtung, aber der Länge k finden. $\vec{b} = k \cdot \frac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$
- Geschwindigkeit v bei einer Fluggeraden $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$ bestimmen: $v = \left|\vec{u}\right| \frac{LE}{ZE}$

1. Beispiel:

Gegeben sind die Punkte A(–5|2|4), B(3|8|7), C(8|–5|6) .

a) Überprüfe, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist, d.h. gleich lange Seiten hat.

b) Bestimme D so, dass ABCD ein Parallelogramm ist.

c) Untersuche, ob der Mittelpunkt M_{AC} gleich dem Mittelpunkt M_{BD} ist.

d) Bestimme den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC.

e) E teilt BC von B aus im Verhältnis 3:1. Ermittle E.

f) Damit drei Punkte ein echtes Dreieck bilden dürfen sie nicht auf einer Geraden liegen. Beschreibe ein Verfahren, wie man mit Hilfe der Vektorrechnung rechnerisch überprüfen kann, ob drei Punkte E, F und G auf einer Geraden liegen.

Lösung:

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}8\\6\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{64+36+9} = \sqrt{109}$; $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix}13\\-7\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{222}$ $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\-13\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{195}$

Alle Seiten sind verschieden lang.

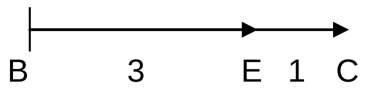
b) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-5\\2\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\-13\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-11\\3\end{pmatrix}$; D(0|–11|3)

c) $\overrightarrow{OM_{AC}} = \begin{pmatrix}1{,}5\\-1{,}5\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OM_{BD}} = \begin{pmatrix}1{,}5\\-1{,}5\\5\end{pmatrix}$ Die beiden Mittelpunkte sind gleich,

d.h. die Diagonalen halbieren sich. Damit ist das Viereck ein Parallelogramm.

d) $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \begin{pmatrix}2\\5/3\\17/3\end{pmatrix}$ $S(2|\frac{5}{3}|\frac{17}{3})$

e) $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}3\\8\\7\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix}5\\-13\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6{,}75\\-1{,}75\\6{,}25\end{pmatrix}$; E(6,75|–1,75|6,25)



f) Die Vektoren $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{FG}$ müssen in die gleiche Richtung zeigen, d. h. es muss $\overrightarrow{EF} = k \cdot \overrightarrow{FG}$ für eine Zahl k gelten (die Vektoren müssen kollinear sein).

2.Beispiel:

Wir betrachten den geradlinigen Horizontalflug eines Sportflugzeuges. Von einem Tower (Koordinatenursprung) aus wird die Flugbewegung beobachtet.

Zum Zeitpunkt t = 0 (Sekunden) befindet sich das Flugzeug am Punkt P_0 (–7000| –3000| 4000), 10 Sekunden später in P_{10}(–6200|–2400|4000) (Angaben in m).

a) Stelle eine Geradengleichung $\vec{x}(t)$ für die Bewegung des Flugzeuges auf, wobei t die Sekunden seit dem Punkt P_0 angibt.
b) Ermittle die Geschwindigkeit v des Flugzeuges in km/h sowie die Entfernung d zum Tower zum Zeitpunkt t=0.
c) An welcher Position P befand sich das Flugzeug 10 Minuten vor t=0?
d) Nach 20 Minuten wird der Pilot aufgefordert, auf eine Flughöhe von 3000 m Höhe zu wechseln. Er behält seine Horizontalgeschwindigkeit bei (d. h. x– und y–Koordinate des Bewegungsvektors bleiben unverändert) und sinkt zusätzlich um 5 m/s .
   Ermittle die Sinkfluggerade $\vec{y}(t)$, die Koordinaten der Punkte B zu Beginn und E zu Ende des Sinkfluges sowie die Dauer des Sinkfluges.

Lösung: a) $\vec{x}(t) = \overrightarrow{0P_0} + \frac{1}{10}\overrightarrow{P_0P_{10}} = \begin{pmatrix} -7000 \\ -3000 \\ 4000 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$; t in Minuten

b) v = $\sqrt{80^2+60^2}$ m/s = 100 m/s = 360 km/h. d(O, P_0) = $\sqrt{7^2+3^2+4^2}$ km ≈ 8,60 km

c) 10 min = 600 s; $\vec{x}(-600) = \begin{pmatrix} -7000 \\ -3000 \\ 4000 \end{pmatrix} - 600\begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -55000 \\ -39000 \\ 4000 \end{pmatrix}$; P(–55000|–39000|4000)

d) 20 min = 1200 s; $\overrightarrow{OB} = \vec{x}(1200) \Rightarrow$ B(89000|69000|4000); $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 89000 \\ 69000 \\ 4000 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 80 \\ 60 \\ -5 \end{pmatrix}$

Der Sinkflug dauert 1000:5 s = 200 s.

Ende des Sinkfluges: $\overrightarrow{OE} = \vec{y}(200) \Rightarrow$ E(105000|81000|3000)

3. Beispiel:

Für jedes t ≠0 sind die Punkte A(1|0|0), B(5|6|0) und S(t|3|2t); gegeben.
Berechne t so, dass die Seiten AS und BS gleich lang sind.

Lösung:

$|\overrightarrow{AS}| = |\overrightarrow{BS}| \Leftrightarrow \sqrt{(t-1)^2+9+4t^2} = \sqrt{(t-5)^2+9+4t^2} \Leftrightarrow (t-1)^2=(t-5)^2$ (da beide Radikanden positiv sind) $\Leftrightarrow t^2-2t+1=t^2-10t+25 \Leftrightarrow 8t=24 \Leftrightarrow t=3$

4. Beispiel:

A(80 |400 | 2), B(100 | 400 | 2), C(100 |1200 | 6) und D(80 | 1200 | 6)
Untersuche, ob ABCD ein besonderes Viereck ist.

Lösung:

$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow$ ABCD ist ein Parallelogramm. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 800 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ ABCD ist ein Rechteck. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{400} \neq \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{640004} \Rightarrow$ ABCD ist kein Quadrat.

5. Beispiel:

Gegeben sind zwei Flugbahnen $h: \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 53 \\ -410 \\ 43{,}75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -30 \\ 4 \end{pmatrix}$ $g: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 100 \\ -2550 \\ 228{,}75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 22 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$

t in min seit 12.00 Uhr, $\vec{x}(t), \vec{y}(t)$ in m.

a) Berechne die Positionen P und Q, in denen sich die beiden Flugzeuge um 12.50 Uhr befinden.

b) Berechne außerdem den Abstand der beiden Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt.

Lösung:

a) P(95|–1450|153,75) Q(153|–1910|243,75)

b) $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{58^2 + 460^2 + 90^2} \approx 472{,}30$ [m]

F5 Überprüfen, ob ein besonderes Viereck (Parallelogramm, Rechteck, Raute, Quadrat, (symmetrisches) Trapez, Drachenviereck) vorliegt.

Vierecke werden über Längen, Orthogonalität oder Parallelität definiert.
(Siehe Formelsammlung)
Diese Eigenschaften lassen sich mit Hilfe der entsprechenden Vektoren (Länge von Seitenvektoren; Skalarprodukt gleich null; Kollinearität) nachweisen:

Ein Viereck ABCD ist genau dann ein(e) …
… Parallelogramm, falls $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ oder $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ist (Nachweis einer Gleichung genügt!)
… Rechteck, wenn es ein Parallelogramm ist und zusätzlich gleich lange Diagonalen besitzt.
… [Alternative: Rechteck, wenn es ein Parallelogramm ist und einen rechten Winkel besitzt.]
… Trapez, falls zwei Seitenvektoren kollinear sind.
… Raute, wenn es ein Parallelogramm ist und zwei aneinander liegende Seitenvektoren gleich lang sind.
… [Alternative: Raute, wenn es ein Parallelogramm ist und die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.]
… Quadrat, wenn es eine Raute ist und einen rechten Winkel besitzt.
… [Alternative: Quadrat, wenn es eine Raute ist und die Diagonalen gleich lang sind.]

… Drachenviereck, wenn jeweils zwei nebeneinanderliegende Seiten gleich lang sind.

Beispiele siehe F2 3. Beispiel und 5. Beispiel

G1 Parameterdarstellungen für Geraden aus zwei gegebenen Punkten ermitteln sowie überprüfen, ob ein Punkt auf einer gegebenen Gerade liegt (Punktprobe) und die Ergebnisse im Sachzusammenhang interpretieren.

Regeln

Parameterform einer Geraden durch A und B: g(A,B): $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}$, r ε IR.

Punktprobe: ein Punkt C liegt auf g, wenn $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ erfüllt ist, d.h. wenn es einen Wert für den Parameter gibt, so dass alle drei Koordinatengleichungen erfüllt sind.

Spezialfall: liegt ein Punkt auf einer **Strecke**?

Ein Punkt C liegt auf AB, wenn $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ für $0 \le r \le 1$ erfüllt ist.

1. Beispiel: Liegt der Punkt M(2|4|2) auf der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Lösung: $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ t= 1,25 $\wedge$ t= 0,5 [$\wedge$ t =2] M liegt nicht auf g.

G2 Geraden auf ihre gegenseitige Lage untersuchen und möglicherweise vorhandene Schnittpunkte bestimmen.

Regeln

Mögliche Lagen von Geraden zueinander: echt parallel, identisch, schneidend oder windschief

Vorgehen, um die Lage von $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ und $h: \vec{x} = \vec{c} + r \cdot \vec{d}$ zueinander zu untersuchen:

Sind die RV kollinear (das kann man i. A. ohne Rechnung sehen), so sind die Geraden parallel. Die zusätzliche Punktprobe $\vec{c} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ zeigt dann, ob sie echt parallel oder identisch sind.

Sind die RV nicht kollinear, so versucht man den Schnittpunkt zu ermitteln:
hat das LGS aus 3 Gleichungen und 2 Unbekannten eine Lösung, so schneiden die Geraden sich, ansonsten verlaufen sie windschief.
Beachte: 3. Gleichung muss kontrolliert werden.

Typische Anwendungsaufgaben

- Fluggeraden ermitteln
- Untersuchen, ob sich die Bahnen kreuzen
- Untersuchen, ob es (trotzdem nicht) zu einem Zusammenstoß kommt.
- Untersuchen, ob sich Diagonalen/Strecken in einem Körper schneiden.

Unnötige Arbeit: Obwohl nur Parallelität nachgewiesen werden soll, wird auch noch untersucht, ob sogar Identität vorliegt.

Beachte:

Bei der Untersuchung von zwei Geraden müssen ggf. die Parameter unterschiedlich benannt werden.

1.Beispiel:

Untersuche die Lagebeziehung zwischen g und h und berechne ggf. den Schnittpunkt S.

$$h: \vec{y}(r) = \begin{pmatrix} 53 \\ -410 \\ 43{,}75 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -30 \\ 4 \end{pmatrix} \quad g: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 100 \\ -2550 \\ 228{,}75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 22 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

RV sind nicht kollinear (2=(–20)·(–0,1); 4 ≠(-20)·(–1,5))

$g \cap h$: $-0{,}1t-2r=-47 \wedge 22t+30r=2140 \wedge -1{,}5t-4r=-185 \Leftrightarrow t=70 \wedge r=20 \wedge 2140=2140$

Die Geraden schneiden sich im Punkt S(93|–1010|123,75).

2.Beispiel:

Gegeben sind die Flugbahnen zweier Flugzeuge

$g: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 100 \\ -2550 \\ 228{,}75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 22 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$; $h: \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 53 \\ -410 \\ 43{,}75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -30 \\ 4 \end{pmatrix}$; t in min; $\vec{x}(t)$ und $\vec{y}(t)$ in km, gleiche Zeitrechnung

a) Zeige, dass die Flugbahnen sich kreuzen.
b) Begründe, ob es zu einem Zusammenstoß beider Flugzeuge kommt.

Lösung:

a) Einen Parameter umbenennen, z. B. $\vec{x}(r)$!

LGS aus den ersten beiden Gleichungen (TR):r=70 $\wedge$ t=20

3. Gleichung 123,75=123,75 $\Rightarrow$ S(93|–1010|123,75)

b) Das erste Flugzeug erreicht den Schnittpunkt nach 70 Minuten, das zweite nach 20. Es besteht keine Kollisionsgefahr.

3. Beispiel:

Untersuche die Lagebeziehung von g, h und k

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};\ h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix};\ k:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ und $\overrightarrow{u_3}$ seien die Richtungsvektoren der drei Geraden g, h und k.

Man sieht, dass $\overrightarrow{u_2} = -2 \cdot \overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_3} = 3 \cdot \overrightarrow{u_1}$ ist. $\Rightarrow$ die RV sind kollinear und damit sind die Geraden g, h und k parallel.

Gilt g=h?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r=-2 \wedge r=-\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \text{g und h sind echt parallel.}$$

Gilt g=k?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r=\frac{2}{3} \wedge r=\frac{5}{6} \quad \Rightarrow \text{g und k sind echt parallel.}$$

Gilt h=k?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r=-\frac{2}{3} \wedge r=\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \text{h und k sind echt parallel.}$$

G3: *Parameterdarstellungen für Ebenen aus drei gegebenen Punkten ermitteln sowie überprüfen, ob ein Punkt auf einer gegebenen Ebene liegt (Punktprobe) und die Ergebnisse im Sachzusammenhang interpretieren.*

Regeln

Drei Punkte A, B, C, die nicht auf einer Geraden liegen (d. h. $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind nicht kollinear), legen eine Ebene E fest.

E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$, r, s ε IR. (Parameterform der Ebene)

Es gibt somit unendliche viele verschiedene Parameterdarstellungen für eine Ebene, da man beliebig andere Punkte der Ebene wählen kann.

Der SV wird häufig auch mit $\overrightarrow{x_0}$, die RV mit $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bezeichnet, also E: $\vec{x} = \overrightarrow{x_0} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

Um herauszufinden, ob ein Punkt in einer bestimmten Ebene liegt, führt man eine **Punktprobe** durch: man untersucht, ob der Ortsvektor des Punktes die Ebenengleichung erfüllt.

Sonderfälle

Wenn man den Definitionsbereich für die Parameter auf Intervalle einschränkt, erhält man Halbebenen oder Parallelogramme (siehe Zeichnung)

E: $\overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$; λ, μ ε IR.

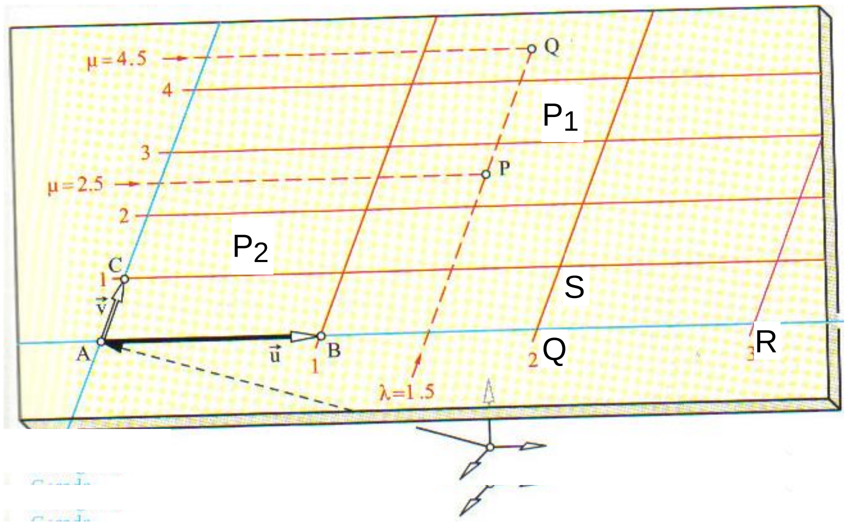
Rechte Halbebene E: $\overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$; $\lambda \geq 0$, μ ε IR

Untere Halbebene E: $\overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$; λ ε IR, $\mu \leq 0$

Parallelogramm P_1: $\overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$; $1{,}5 \leq \lambda \leq 2$; $3 \leq \mu \leq 4$

Parallelogramm P_2: $\overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$; $0 \leq \lambda \leq 1$; $1 \leq \mu \leq 2$

Dreieck QRS: D_{QRS}: $\overrightarrow{OQ} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$; $\lambda + \mu \leq 1 \wedge \lambda, \mu \geq 0$



Beispiel für eine Punktprobe

Gegeben ist die Ebene: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\-2\\-2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\-1\\5\end{pmatrix}$ und der Punkt P (10|–3|10). Liegt P auf E?

Lösung:

Man setzt den Ortsvektor des Punktes mit der Ebene gleich und erhält ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten. Wenn dieses eindeutig lösbar ist (man also Werte für r und s erhält und diese durch Probe bestätigt werden) so liegt der Punkt auf der Ebene, **sonst nicht.**

(I) $10 = 4 + 4r - 2s \Leftrightarrow 6 = 4r - 2s$ (II) $-3 = 2 - 2r - 1s \Leftrightarrow -5 = -2r - 1s$

(III) $10 = 1 - 2r + 5s \Leftrightarrow 9 = -2r + 5s$

Man kann jetzt zum Beispiel die zweite und dritte Gleichung addieren, um das r zu eliminieren.
Hierbei erhält man 4s = 4 ⇔ **s = 1**
Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhält man dann 8 = 4r ⇔ r **= 2**
Probe mit der zweiten Gleichung geht auf: –5 = –4 –1 Das Gleichungssystem ist lösbar.
Der Punkt P liegt also auf der Ebene.

Alternative Lösung mit TR (hier Gleichungen I und II): TR $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$; r= –0,75; s=1,5

Probe für die 3. Gleichung: 9 = 1,5+7,5 (w)

Beachte:
3. Gleichung muss überprüft werden
Nur die Richtungsvektoren darf man verkürzen, nicht den Stützvektor

Umständliches Vorgehen
Richtungsvektoren werden nicht verkürzt, obwohl es weniger Arbeit ist.
Allerdings: bei Fluggeraden wird mit Änderung des RV auch die Zeiteinheit geändert!

Typische Anwendungsaufgaben
- Seiten– und Schnittflächen von Körpern
- Schattengebilde

1. Beispiel:
A(80 |400 | 2), B(100 | 400 | 2), C(100 |1200 | 6) und D(80 | 1200 | 6)
Stelle eine Parameterform der Ebene E durch A, B und C auf und zeige, dass D in der Ebene E liegt.

Lösung:
4 Punkte A,B,C,D liegen in einer Ebene, wenn (z. B.) D in der von A, B und C aufgespannten Ebene liegt.
(Vergleiche: 3 Punkte A,B,C liegen auf einer Geraden, wenn (z. B.) C auf der Geraden durch A und B liegt.)

E: $\overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 80 \\ 400 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 800 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 1200 \\ 6 \end{pmatrix}$ ⇔ s= 1 ∧ r =–1 ∧ 2+4=6 ⇒ D ε E.

2. Beispiel:
Gegeben sind A(80 |400 | 2), B(100 | 400 | 2), D(80 | 1200 | 6) und L(85 | 750 | 3,75)
Liegt L im Parallelogramm ABCD?
Lösung:

E: $\overrightarrow{OA} + r' \cdot \overrightarrow{AB} + s' \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 80 \\ 400 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 800 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85 \\ 750 \\ 3{,}75 \end{pmatrix}$ ⇔ r = 0,25 ∧ s = $\frac{7}{16}$ ∧ 2+1,75=3,75 (w)

Da beide Parameter zwischen 0 und 1 liegen, liegt L innerhalb des Parallelogramms.

G4 Normalenform / Koordinatenform einer Ebene ermitteln

Regeln

Eine Ebene ist durch einen Punkt und zwei nicht kollineare RV festgelegt (siehe G3)

Kennt man zu einer Ebene einen Normalenvektor (NV) $\vec{n}$, also einen Vektor, der senkrecht zur Ebene verläuft, sowie einen Punkt P der Ebene, so liegt irgendein Punkt X genau dann auf der Ebene, wenn der Vektor $\overrightarrow{PX}$ senkrecht zum NV verläuft, wenn also gilt:

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PX}=0 \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\left(\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP}\right)=0 \Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{OX}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}= \vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}=c$

Alle Punkte der Ebene – und nur diese – bilden mit dem NV also das gleiche SP.

Schreibt man $\vec{n}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, so erhält man

die Koordinatenform: $n_1\cdot x_1 + n_2\cdot x_2 + n_3\cdot x_3 = c$ oder $n_1\cdot x + n_2\cdot y + n_3\cdot z = c$.

Beispiel:

Gesucht ist eine Gleichung der Ebene, die durch den NV $\vec{n}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und den

Punkt P(2|4|–8) festgelegt ist.

Lösung: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}=56$; E: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}\cdot\vec{x}=56$ (Normalenform) $\Leftrightarrow$ $2x + 3y - 5z = 56$ (Koordinatenform)

Vorteile der Normalenform/Koordinatenform

Punktprobe wird zur Kopfrechenaufgabe (bei der PF musste ein LGS mit 3x2 LGS gelöst werden). Beispiel:

R(1|2|19) liegt nicht auf E, da die Koordinaten die Ebenengleichung nicht erfüllen:

$2\cdot1+3\cdot2+10\cdot5 = 56$ (f)

Achsenabschnitte kann man im Kopf angeben: setze zwei Koordinaten 0 und berechne die dritte:

$y=z=0 \Rightarrow S_x(28|0|0)$; $x=z=0 \Rightarrow S_y(0|18\frac{2}{3}|0)$ $x=y=0 \Rightarrow S_z(0|0|-11,2)$

Die Lagebeziehung Gerade – Ebene und Ebene – Ebene zu bestimmen, geht sehr einfach.

$\rightarrow$ G5, G6

Wie wandelt man die 3 Ebenformen (PF, NF, KF) jeweils in die anderen um?

a) Von der Parameterform E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ in die Normalenform:

Man ermittelt einen Normalenvektor als Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren

$\vec{n} = \vec{u} \text{ x } \vec{v}$; Es gilt nun E: $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA}$ = c ⇔ $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 z = c$.

Beispiel: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -8 \end{pmatrix} = (-4) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 22$

[Kontrolle: der NV steht senkrecht auf beiden RV, da das SP jeweils 0 ergibt.)

E: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 22$ ⇔ $3x + 4y + 2z = 22$

[Kontrolle: bilde die Punkte für r=s=0 (4|2|1), r=1; s=0 (8|0|–1) und r=0; s=1 (2|1|6) und mache im Kopf die Punktprobe.]

b) Von der Normalenform ind die Koordnatenform und umgekehrt:
Die Koeffizienten von x, y und z bilden den Normalenvektor.

c) Von der Normalenform in die Parameterform:

man ermittelt drei Punkte A, B und C z. B. die Achsenabschnitte: $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

a) Gegeben sind drei Punkte A, B, C:

Zunächst ermittelt man eine Parameterform (PF) der Ebene, z. B. E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

Nun ermittelt man einen Normalenvektor als Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{AC}$; Es gilt nun E: $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA}$ = c ⇔ $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 z = c$.

b) Gegeben sind eine Gerade und ein Punkt P, der nicht auf der Geraden g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{u}$ liegt.

$E_{P,g}$: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{u} + r \cdot \overrightarrow{AP}$

c) Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{u}$ und h: $\vec{x} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \vec{v}$

$E_{P,g}$: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{u} + r \cdot \vec{v}$ (Man kann auch $\overrightarrow{OS}$ oder $\overrightarrow{OB}$ als SV nehmen:)

d) Gegeben sind zwei echt parallele Geraden g: $\vec{x} = \overrightarrow{p_0} + \lambda \vec{u}$ und h: $\vec{x} = \overrightarrow{q_0} + \mu \vec{u}$

$E_{g,h}$: $\vec{p}_0 + \lambda \vec{u} + \mu (\overrightarrow{p_0} - \overrightarrow{q_0})$

e) Ebene verläuft senkrecht zu einer Gerade sowie durch P.

Man nimmt den RV der Geraden als NV und $\overrightarrow{OP}$ als SV.

f) Ebene verläuft senkrecht zu einer Ebene E sowie durch P

Man nimmt einen Vektor, der senkrecht zum NV von E verläuft, als NV und $\overrightarrow{OP}$ als SV.
Weiter wie in a).

Beachte:

Drei Punkte, die auf einer Geraden liegen, bilden keine Ebene.
(Den Fehler bemerkt man i. a. dann, wenn der mit Vektorprodukt gebildete NV gleich dem Nullvektor ist.)

Umständliches Vorgehen:

- RV werden vor der Weiterrechnung nicht „verkürzt“ (siehe in G4-2 die Gerade g_{xy}).
  (Ausnahme Fluggeraden, wenn dadurch die Zeiteinheit geändert wird.)
- Man erkennt nicht, dass ein NV gegeben ist und nimmt den langwierigen Weg über a)
- Koordinatenebenen und deren Parallelen werden nach a) ermittelt anstatt sie ohne Rechnung anzugeben, z.B.: die xy-Ebene hat die Gleichung z=0.

Typische Anwendungsaufgaben

- Seiten– und Schnittflächen von Körpern
- Begrenzungsebenen bei Flughäfen

Gegeben sind die Punkte B(3 | 3 | 7), C (−3 | 3 | 7) und S(0 | 0 |13)

(1) Berechne eine Gleichung der Ebene E durch B, C und S in Normalenform.
    [Zur Kontrolle: E: $2x_2 + x_3 - 13 = 0$]
(2) Die Ebene E enthält den Punkt C (−3 | 3 | 7) und ist orthogonal zur Geraden durch A (3 | −3 | 7) und S(0 | 0 |13). Ermittle eine Gleichung der Ebene E.
    [Zur Kontrolle: E: $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 20$]

G5 Schnittprobleme zwischen Geraden und Ebenen in Sachzusammenhängen (z.B. bei Schattenwürfen) untersuchen.

Regeln

Mögliche Lagebeziehungen:

- Gerade liegt in der Ebene
- Gerade verläuft echt parallel zur Ebene
- Gerade schneidet die Ebene

Das Vorgehen hängt davon ab, in welcher Form die Ebene gegeben ist.

Ebene ist in KF oder NF gegeben

Ob Parallelität vorliegt, kann man sofort sehen und sollte deshlab als Erstes untersucht werden: *Gerade und Ebene verlaufen parallel, wenn der RV senkrecht auf dem NV steht.*
Eine Punktprobe entscheidet in diesem Fall, ob echte Parallelität vorliegt oder die Gerade in der Ebene verläuft.
Steht der RV nicht senkrecht auf dem NV, so gibt es einen Schnittpunkt. Diesen ermittelt man, indem man die Gerade als einen Vektor schreibt, die x/y/z–Koordinate in die Ebenengleichung einsetzt und die lineare Gleichung mit einer Variablen löst.

Ebene ist in PF gegeben

Hier sollte man entscheiden, ob es sich nicht lohnt, die PF in eine NF umzuwandeln.
Falls es sich nicht lohnt:

Man versucht den Schnittpunkt zu ermitteln (LGS mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten $\rightarrow$ TR)
Falls es keinen Schnittpunkt gibt, entscheidet eine Punktprobe über die Art der Parallelität.

Typische Anwendungsaufgaben

- Geraden als Umrisse von Schatten
- Eckpunkte des Schattenumrisses sind Schnittpunkte der Geraden.
- Lotgeraden / Höhengeraden

1. Beispiel:

Zeige, dass jede Ebene der Schar $E_r : \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 2r + 4$, r ε IR, die Gerade durch R(0 | 2 | 4) und S(4 | 2 | 0) enthält.

2. Beispiel: Eine von einem Punkt M (0 | 7 | 15) ausgehende Gerade, die in Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ -2{,}5 \\ -5 \end{pmatrix}$ zeigt, durchstößt die Ebene E_{BCS} mit B(3 | 3 | 7), C (−3 | 3 | 7) und S(0 | 0 |13) im Punkt M*.
Ermittle die Koordinaten des Punktes M^*.

3. Beispiel

Untersuche, wie die Gerade k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, t ε IR, zur xy-Ebene verläuft.

Lösung: k verläuft wegen z=13 (echt) parallel in einem Abstand von 13 LE zur xy-Ebene.

4. Beispiel

Durch E_a: $2x_1 + x_2 + 2x_3 + 9 \cdot (2a - 5) = 0$, $a \varepsilon IR$, sei eine Schar von Ebenen E_a gegeben; h sei die Gerade, die durch die Punkte $S_1(13 \mid 1 \mid 9)$ und $S_2(5 \mid -3 \mid 1)$ verläuft.

Zeigen Sie, dass jede Ebene E_a der Schar orthogonal zur Geraden h verläuft.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt P_a der Ebene E_a mit der Geraden h.

[Zur Kontrolle: $P_a(13- 4a \mid 1- 2a \mid 9- 4a)$]

G6 Ebenen auf ihre gegenseitige Lage untersuchen und möglicherweise vorhandene Schnittgeraden bestimmen.

Mögliche Lagebeziehungen von **zwei** Ebenen

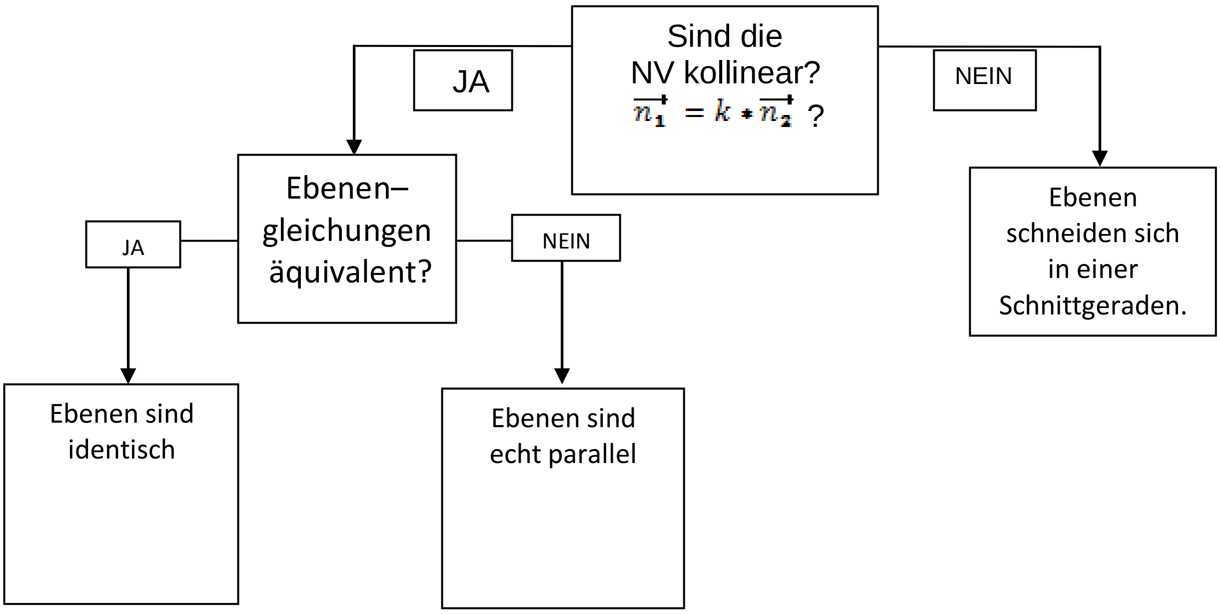
- Es gibt eine gemeinsame Schnittgerade
- Die Ebenen verlaufen echt parallel
- Die Ebenen sind identisch

Anschauungshilfe: wenn man das Tafelwerk aufklappt, ergeben sich zwei Ebenen, der Buchrücken verläuft auf der Schnittgeraden.

Ermittlung der Lagebeziehung

Sind die Ebenen in KF oder NF gegeben, so sind sie **parallel**, wenn die NV kollinear sind.
Sind die Ebenengleichungen sogar äquivalent, so sind die Ebenen **identisch**.
Sind die NV nicht kollinear, gibt es eine **Schnittgerade.**
Verlaufen die NV der Ebenen senkrecht zueinander, schneiden sich auch die Ebenen senkrecht.

Geraden und Ebenen im Raum; Flussdiagramm für die Lagebeziehung:



Beispiel:

Untersuche die folgenden Ebenen auf besondere Lagebeziehung (identisch, parallel, senkrecht schneidend).

E_1: $2x - 3y + 6z = -14$	E_2: $-3x + 2y = 12$	E_3: $2x - y + 2z = 0$
E_4: $2(x+1) - 3(y+4) = -24 - 6z$	E_5: $-5x + 3y - 12z = 13$	E_6: $3x - 1{,}5y + 3z = -18$
E_7: $10x - 15y + 30z = 70$	E_8: $z = -2$	E_9: $4y - 3z = 10$

Lösung:

Löst man bei E_4 die Klammern auf und fast zusammen, so erhält man E_4: $2x - 3y + 6z = -14$
Damit gilt $E_1 = E_4$; $E_7 = 2x - 3y + 6z = 14$ ist zu E_1 bzw. E_4 echt parallel.
E_3 und E_6 sind echt parallel, da (nur) die NV kollinear sind.
Das SP der NV ergibt bei E_2 und E_8 null, so dass sich diese Ebenen senkrecht schneiden.

Berechnung der Schnittgerade von zwei Ebenen (Beispiel)

Beispiel: Gegeben sind die Ebenen E_1: $6x_1+2x_2-2x_3 = -3$ und E_2: $-3x_1+4x_2-5x_3 = -6$

Die NV $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ sind nicht kollinear, also schneiden sich die Ebenen.

Ermittlung der Schnittgerade g_S: Lösung des LGS mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten:

1. Schritt Aus den beiden Ebenengleichungen mit je 3 Unbekannten eine Gleichung mit 2 Unbekannten ermitteln. (I)+2·(II): $10x_2-12x_3 = -15$
2. Schritt Man drückt zwei Unbekannte jeweils durch die dritte aus:
   $x_2= -\frac{3}{2} +\frac{6}{5} x_3$; Einsetzen in E_1: $x_1= -\frac{1}{15} x_3$
3. Schritt Lösungsmenge: $IL = \{(-\frac{1}{15}x_3 \,|\, -\frac{3}{2}+\frac{6}{5}x_3 \,|\, x_3) \,|\, x_3 \in IR\}$

   Schnittgerade: g_S: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{15}x_3 \\ -\frac{3}{2}+\frac{6}{5}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} \\ \frac{6}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix}$

Lagebeziehungen zwischen drei Ebenen

Methode 1:
Man schneidet die ersten beiden Ebenen und dann das Schnittgebilde mit der 3. Ebene.
Methode 2
Man löst das LGS mit 3 Gleichungen und drei Unbekannten.

Beachte:
Das Lösen eines LGS mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten kann man als Schnitt dreier Ebenen. (Daher kann ein solches LGS auch nicht genau zwei Lösungen haben.)

Typische Aufgaben

- Schnitt zweier Flächen
- Schnittgeraden einer Fläche mit der xy-, xz- und yz-Ebene
- Ebenenscharen

Unnötige Arbeit
Wenn eine der beiden gegebenen Ebenen nur zwei Variablen enthält, braucht man nicht eine Gleichung mit 2 Variablen herzuleiten.

$4x+2y+z=6 \wedge 2x-z=4 \Rightarrow z=2x-4 \Rightarrow y= -3x+2 \Rightarrow IL=\{(x|-3x+5|2x-4)$; g_S: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

H2 Den Flächeninhalt eines Dreiecks und das Volumen von Pyramiden und Prismen (auch nach elementaren Methoden) bestimmen.

Regeln

Es gibt mehrere Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks.
Je nach Gegebenheiten sollte man sich die günstigere aussuchen.
Falls keine Besonderheiten vorliegen, wird (IV) der schnellste Weg sein.

(I) $A = \frac{1}{2} g \cdot h$ (halbes Produkt aus einer Grundseite und zugehöriger Höhe)

(II) $A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$ (halbes Produkt zweier Seitenlängen mal dem Sinus **des eingeschlossenen** Winkels)

Beachte: Es gibt drei verschiedene Grundseiten und drei zugehörige Höhen.
Eine Grundseite muss nicht unten liegen.

Bei **rechtwinkligen Dreiecken** nimmt man eine Kathete als Grundseite, die andere Kathete ist dann die zugehörige Höhe.
Bei gleichschenkligen Dreiecken trifft die eine Höhe mitten auf die Basis.
Für die Höhe h gilt also $h = \left|\overrightarrow{M_{AB}C}\right|$, falls AB die Basis des Dreieck ist.
(Kommt häufig vor, wenn eine quadratische, gerade Pyramide gegeben ist.)

H4 Den Abstand eines Punktes P von einer Geraden g: $\vec{a} + r \cdot \vec{u}$ berechnen.

1. Man setzt den Lotfußpunkt F variabel an (Gerade als einen Vektor schreiben), bildet den variablen Vektor $\overrightarrow{PF} = \vec{a} + r\cdot\vec{u} - \overrightarrow{OP}$, fasst $\vec{a} - \overrightarrow{OP}$ zusammen und ermittelt den Parameter mit Hilfe der Bedingung,dass $\overrightarrow{PF}$ senkrecht auf dem RV der Geraden stehen muss: $(\vec{a} + r\cdot\vec{u} - \overrightarrow{OP})\cdot\vec{u} = 0$

2. Man setzt den Lotfußpunkt F wie in 1. variabel an (Gerade als einen Vektor schreiben), bildet den variablen Vektor $\overrightarrow{PF}$ und berechnet seine Länge in Abhängigkeit vom Parameter. Zu dieser Abstandsfunktion berechnet man mit Mitteln der Differentialrechnung das Minimum. Da die Abstandsfunktion die Wurzel aus einer quadratischen Funktion ist, genügt es die Parabel unter der Wurzel zu minimieren.

Typische Anwendungsaufgaben

Höhe in einem Dreieck, Parallelogramm berechnen
Abstand einer Kirchturmspitze / Flugballons / … von einer Flugbahn
Länge von senkrecht verlaufenden Stützstäben

1. Beispiel

Bestimme den Abstand der Flugbahn $g: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 100 \\ -2550 \\ 228{,}75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 22 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$

vom Tower in T(0 | 0 | 8) sowie den Punkt F der Flugbahn, an dem der Pilot dem Tower am nächsten kommt

Lösung: (Methode 1)

$$\left|\overrightarrow{TF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 100-0{,}1t \\ -2550+22t \\ 220{,}75-1{,}5t \end{pmatrix}\right|; \quad \overrightarrow{TF}\cdot\begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 22 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -10+0{,}01t-56100+484t-331{,}125+2{,}25t = 0$$

$\Leftrightarrow$ 486,26t= 56441,125 $\Leftrightarrow$ t≈ 116,07; Einsetzen in $\left|\overrightarrow{TF}\right|$ ergibt d ≈ 100 [LE].

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 100 \\ -2550 \\ 228{,}75 \end{pmatrix} + 116{,}07\cdot\begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 22 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow F(\approx 88{,}39|\approx 3{,}54|54{,}65)$$

≈

Lösung: (Methode 2)

$$\left|\overrightarrow{TF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 100-0{,}1t \\ -2550+22t \\ 220{,}75-1{,}5t \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(100-0{,}1t)^2+(22t-2550)^2+(220{,}75-1{,}5)^2}$$

$d^2(t) = 486{,}26t^2 - 112882{,}25t + 6561230{,}562$; $d^{2\prime}(t) = 972t - 11288{,}2t = 0 \Leftrightarrow t \approx 116{,}07$

$\overrightarrow{OF} = g(116{,}07) \Rightarrow F(\approx 88{,}39|\approx 3{,}54|\approx 54{,}65)$; $d_{min} \approx d(116{,}07) = 100{,}41$

2. Beispiel

Zum Dreieck ABC mit A(4|2|–1); B(10|.8|9); C(4|0|1) soll die Länge der Höhe auf BC berechnet werden.

Lösung: Die Länge der Höhe ist gleich dem Abstand von A zur Geraden g(B,C).

$$g:\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix};\ d(t) = \left|\vec{x}(t)-\overrightarrow{OA}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6t \\ -8t-2 \\ 8t+2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36t^2+64t^2+32t+4+64t^2+32t+4}$$

$= \sqrt{164t^2+64t+8}$; $d^{2\prime}(t) = 328t+64=0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{8}{41} \approx -0{,}20$

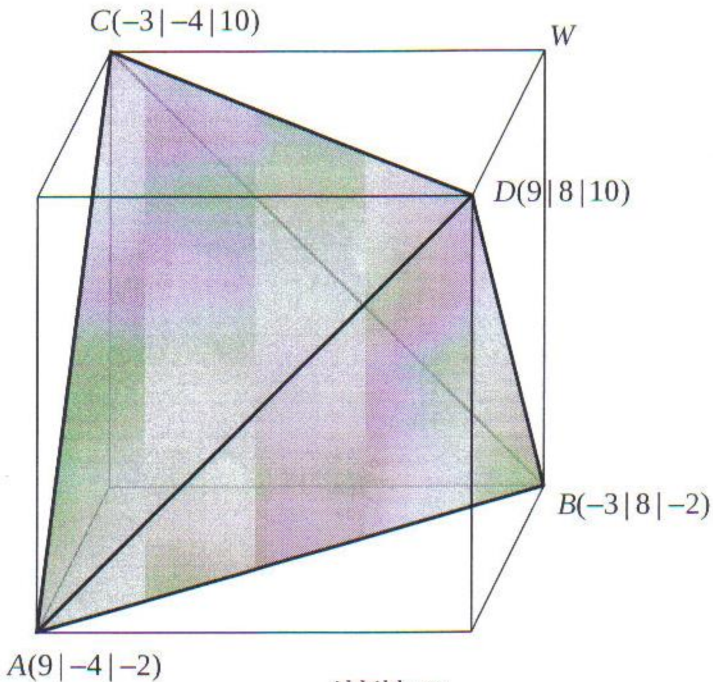
(Absolutes Minimum, da d^2 eine nach oben geöffnete Parabel ist.)

$$d\left(-\frac{8}{41}\right) \approx 1{,}33\ [LE];\ \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{8}{41}\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow F(\approx 2{,}83|\approx 1{,}56|\approx -0{,}56)\ \text{Kontrolle: } \left|\overrightarrow{AF}\right| \approx \left|\begin{pmatrix} -1{,}17 \\ -0{,}44 \\ 0{,}44 \end{pmatrix}\right| \approx 1{,}33$$

Berechnungen an einem Tetraeder

Gegeben sind die Punkte A(9|–4 |–2), B(–3 |8|–2), C(–3|–4|10), P(3|2|4) und Q(–2|–3|–1) .

a) Zeige rechnerisch, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.
b) Berechne den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC.
c) Das Dreieck ABC bildet mit dem Punkt D(9| 8 |10) eine dreiseitige Pyramide.
Untersuche, ob die Pyramide ein regelmäßiges Tetraeder ist. (Dreiseitige Pyramide, in der alle Seitendreiecke gleichseitig sind.)
d) (1) Ermittle die Koordinaten des Eckpunkts W des Würfels.
(2) Ermittle zu allen 4 Kanten des Tetraeders die Mittelpunkte M_{AB}, M_{BC}, M_{CD} und M_{DA}.
(3) Untersuche, welche speziellen Eigenschaften das Viereck $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ hat.
(4) Ermittle den Abstand des Punktes T(3|2|4) von der Kante AD.



Abbildung

Lösungen → nächste Seite

Lösungen zu „Berechnungen an einem Tetraeder“

a) Alle drei Seiten(vektoren) sind $12\sqrt{2}$ LE lang;

b) S(1|0|2) (arithmetisches Mittel der Eckpunktkoordinaten)

c) Die Seitenlängen AD, BD und CD betragen alle $\sqrt{288} = 12\cdot\sqrt{2}$ LE.

d) (1) $\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OM_{CD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ W(–3|8|10) (Achtung! Man kann W aus der Zeichnung ablesen, wenn man nachweist, dass die Kanten des Würfels parallel zu den Achsen verlaufen.)

(2) $M_{AB}(3|2|-2)$; $M_{BC}(-3|2|4)$; $M_{CD}(3|2|10)$; $M_{DA}(9|2|4)$;

(3) $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{M_{DA}M_{CD}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Das Viereck ist ein Parallelogramm.

$\overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \overrightarrow{M_{BC}M_{DA}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Diagonalen mit 12 LE gleich lang $\Rightarrow$ Rechteck.

$\left|\overrightarrow{M_{AB}M_{DA}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = 6\sqrt{2} = \left|\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}}\right| \Rightarrow$ 2 benachbarte Seiten sind gleich lang $\Rightarrow$ Quadrat

(4) T(3|2|4) ist der Mittelpunkt der Strecke AW und somit der Mittelpunkt des Würfels.
Daher ist der gesuchte Abstand eine halbe Würfellänge: d(T, AD) = 6 LE.

LK M1* 12.2 Vektorrechnung

Aufgabe 1

Der Punkt A(5|3|–1) [A(2|–5|1)] wird um $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \left[\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$ verschoben.

Bestimme mit Vektorrechnung jeweils die Koordinaten des Bildpunktes A'.

Aufgabe 2: Der Punkt A'(2|1|–3) [A'(–3|6|–2)] ist der Bildpunkt von A bei einer Verschiebung um $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \left[\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$. Ermittle die Koordinaten von A.

Aufgabe 3

Welcher Verschiebungsvektor bildet den Punkt P auf den Punkt P' ab?

a) P(3|2|–1), P'(5|4|6) b) P(2,6|–3,8|6,1) P'(–3,5|4,2|1,9)

Aufgabe 4: Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten P_1(3|0|0), P_2(0|4|0), P_3(4|5|0). Das Dreieck ist die Grundfläche eines **geraden** Prismas, von dessen Deckfläche der Punkt Q_2(0|4|9) bekannt sei.

a) Gib den Verschiebungsvektor und die Koordinaten der anderen Eckpunkte an.

b) Welche **schiefen** Prismen lassen sich bilden, wenn Q_2 irgendein Eckpunkt der Deckfläche sein soll? Gib die Koordinaten der betreffenden Eckpunkte an.

Aufgabe 5 Bestimme $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$**.**

a) A(0|0|0), B(1|2|3) b) A(3|–4|5), B(0|0|0) c) A(1|-3|-4), B(-5|3|-4) d) A(3|-4|5), B(2|2|-6)

Aufgabe 6 a) Gegeben seine 4 Punkte P, Q, R und S. Beweise: Wenn $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ gilt, dann ist auch $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$.

b) Was bedeutet die Aussage geometrisch?

Aufgabe 7 Prüfe, ob ABCD ein Parallelogramm ist.

a) A(–5|–2), B(1|–4), C(2|–1), D(–4|1) b) A(3 | –1 | 2), (1 | 0 |–2), C(2 |1 | 2), D(4 |0 | 6)

Aufgabe 8 (siehe Abbildung Quader rechts)

Es sei A(0|0|0), $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}, \vec{c} = \overrightarrow{AE}$; X,Y und Z seien die Mittelpunkte von AB, CG und HG.

a) Gib mittels der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ an:

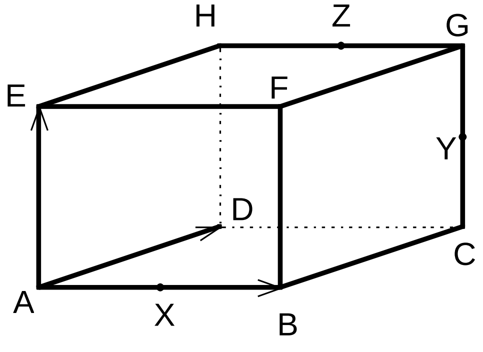
(1) $\overrightarrow{AG}$ (2) $\overrightarrow{XG}$ (3) $\overrightarrow{XY}$ (4) $\overrightarrow{XH}$

(5) $\overrightarrow{YZ}$ (2) $\overrightarrow{BZ}$ (3) $\overrightarrow{YE}$ (4) $\overrightarrow{YX}$

b) M sei der Mittelpunkt der Strecke HX.

(i) Bestimme den Punkt P so, dass G der Mittelpunkt der Strecke MP ist.

(ii) Gib den Vektor $\overrightarrow{CP}$ mit Hilfe von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ an.



Lösungen Arbeitsblatt Vektorrechnung

Aufgabe 1 Der Punkt A wir um 6 in x–Richtung, um 2 in y–Richtung und um 4 in z–Richtung verschoben; A'(5+6|3+2|–1+4)=A'(11|5|3);

$\overrightarrow{0A'} = \begin{pmatrix}11\\5\\3\end{pmatrix}$; kurz: $\overrightarrow{0A'} = \begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\5\\3\end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{0A'} = \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Aufgabe 2 $\overrightarrow{0A} = \overrightarrow{0A'} - \vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\-10\end{pmatrix}$; A(0|–3|–10) b) $\overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$; A(0|2|–1)

Aufgabe 3: a) $\vec{v} = \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix}5-3\\4-2\\6-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\7\end{pmatrix}$ b) $\vec{v} = \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix}-3{,}5-2{,}6\\4{,}2-(-3{,}8)\\1{,}9-6{,}1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6{,}1\\8\\-4{,}2\end{pmatrix}$

Aufgabe 4 Wenn das Prisma, dessen Grundfläche in der xy–Ebene liegt (da alle z– Koordinaten 0 sind) gerade sein soll, muss Q_2 das Bild von P_2 sein, denn der Verschiebungsvektor ist

$\vec{v} = \overrightarrow{P_2Q_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix}$, d. h. alle z–Koord. werden um 9 vergrößert: $Q_1(3|0|9)$; $Q_3(4|5|9)$

b) (1) Q_2 könnte das Bild von P_1 sein $\Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{P_1Q_2}$; Verschiebung der Punkte um $\begin{pmatrix}-3\\4\\9\end{pmatrix}$:

Die Bildpunkte sind (–3|8|9) und (1|9|9)

(2) Q_2 könnte das Bild von P_3 sein $\Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{P_3Q_2}$; die Bildpunkte sind in diesem Fall (–1|–1|9) und (–4|3|9)

Aufg. 5 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1-0\\2-0\\3-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\4\\-5\end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-6\\6\\0\end{pmatrix}$ d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\6\\-11\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}1\\-6\\11\end{pmatrix}$

Aufgabe 6a) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR}$ / $+\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OS} \Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} \Leftrightarrow \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$

b) **Geometrische Bedeutung**: Aus der Vektordefinition folgt: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \Rightarrow$ PQ II RS; da auch PR || QS gilt, ist das Viereck ein Parallelogramm.

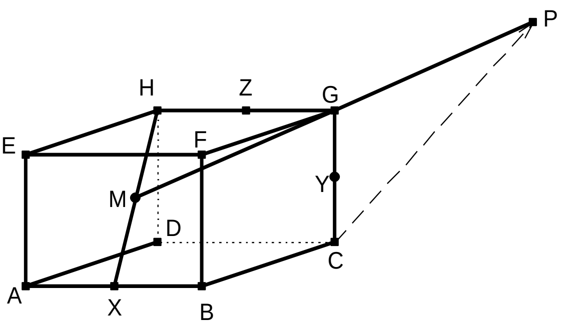
Aufgabe 7 (1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$ (2) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$ In beiden Fällen Parallelogramm.

Aufgabe 8 a) $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ $\overrightarrow{XG} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{XH} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{YZ} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$; $\overrightarrow{BZ} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$;

$\overrightarrow{YE} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{YX} = -\overrightarrow{XY} = -(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}) = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} - \frac{1}{2}c$



b) $\overrightarrow{XH} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{MH} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$;

$\overrightarrow{MG} = -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} =$

$\overrightarrow{GP}$; $\overrightarrow{CP} = \vec{c} + \overrightarrow{GP} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$

Lk Q1 M1 Analytische Geometrie: Flug eines Aufklärungsflugzeuges

Eine Aufklärungsflugzeug befindet sich zum Zeitpunkt 0 in P(–35|50|10) und nach 10 min in Q(–20|35|10). (Angaben in km; Ursprung ist der Tower eines Flughafens; der Flug wird als geradlinig bei konstanter Geschwindigkeit angenommen.)

a) Gib zu weiteren Zeiten weitere Positionen des Flugzeuges an (Wertetabelle).
b) Ist das Flugzeug im Landeanflug?
c) Wie schnell fliegt das Flugzeug?
d) Wie weit ist es zu Beginn vom Tower entfernt?
e) Wie viel Prozent ist es nach 10 Minuten näher am Tower als zu Beginn?
f) Wie weit ist das Flugzeug nach t Minuten vom Tower entfernt?
Entwickle eine Formel in Abhängigkeit von t und überprüfe die Ergebnisse aus d) und e)
g) Nach wie viel Minuten der Abstand minimal? Wie hoch ist dieser Abstand dann?
h) Als das Flugzeug in Q(–20|35|10) ist, bekommt es die Anweisung innerhalb von 15 Minuten geradlinig auf die Position R(10|10|8) zu wechseln.
(i) Gib eine Vektorgleichung für die neue Sinkfluggerade $\vec{s}(t)$ an.
Wähle den Zeitpunkt, zu dem das Flugzeug in Q ist, als Zeitpunkt null.
(ii) Um wie viel Prozent erhöht oder senkt das Flugzeug seine Geschwindigkeit?
(iii) Die Geschwindigkeit eines Flugzeuges, die es parallel zum Boden zurücklegt, heißt „Geschwindigkeit über Grund“. Wie hoch ist dies Geschwindigkeit?
(iv) Wie hoch ist die Sinkgeschwindigkeit.
(v) Der Pilot vergisst im Punkt R den Kurs wieder zu korrigieren und bleibt auf im Sinkflug. Wie lange hat er noch Zeit, seinen Fehler zu korrigieren und wo auf der Erde sollte man sich vorsichtshalber nicht aufhalten?
i) Nach dem Sinkflug fliegt der Pilot parallel zum ersten Kurs und mit der gleichen Geschwindigkeit wie im ersten Teil weiter. Stelle für die neue Fluggerade eine Vektorgleichung $\vec{v}(t)$ auf.
j) Als das Flugzeug in P ist, kommt Wind auf.
Die Richtung und wird durch den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ 18 \end{pmatrix}$ beschrieben,
die Länge des Vektors gibt die Windgeschwindigkeit in km/h an.
(i) Berechne die Windgeschwindigkeit.
(ii) Auf welchen Kurs $\vec{u}(t)$ treibt der Wind das Flugzeug ab?
(iii) Welchen $\vec{v}(t)$ Kurs müsste der Pilot steuern, damit er durch die Windeinwirkung auf dem ursprünglichen Kurs bleibt? Wie ändert sich seine Geschwindigkeit?

Lösungen

a) In 10 Minuten erfährt das Flugzeug eine „Verschiebung“ um den Vektor

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -20-(-35) \\ 35-50 \\ 10-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$; Man kann den Punkt Q um diese Verschiebung (mehrfach) weiterbewegen, also die x–Koordinate um 15 erhöhen und die y–Koordinate um 15 senken:

Zeit t	0	10	20	30	40	50
Position	P(–35|50|10)	(–20|35|10)	(–5|20|10)	(10|5|10)	(25|–10|10)	(40|–25|10)

Man muss den Bewegungsvektor pro Zeiteinheit mit der Anzahl der Zeiteinheiten multiplizieren und zum Ortsvektor der Position zum Zeitpunkt 0 addieren:

$\vec{x}(r) = \begin{pmatrix} -35 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$ (r in 10 min) oder $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -35 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t in min)

b) Nein, da die Höhe (z–Koordinate) unverändert bei 10 km bleibt.

c) Länge des Bewegungsvektors für 10 Minuten: $\left|\begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{450} \approx 21{,}21$ [km]

$\Rightarrow$ Die Geschwindigkeit beträgt $6 \cdot 21{,}21 = 127{,}26$ [km/h]

Allgemein: Ist $\vec{u}$ der Richtungsvektor auf einer geradlinigen Flugbahn, so gibt $|\vec{u}|\ \frac{LE}{ZE}$ die Geschwindigkeit an (LE= Längeneinheit des Koordinatensystems; ZE= Zeiteinheit für den $|\vec{u}|$.

c) Gesucht ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{0P}$: $|\overrightarrow{0P}| = \left|\begin{pmatrix} -35 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3825} \approx 61{,}85$ [km]

d) Entfernung des Vektors $\overrightarrow{OQ}$: $|\overrightarrow{OQ}| = \left|\begin{pmatrix} -20 \\ 35 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1725} \approx 41{,}53$ [km];

Was hinter „als“ steht, kommt in den Nenner!

$\frac{\sqrt{1725}}{\sqrt{3825}} = 67{,}16\%$; 100% – 67,16%= 32,84%.

Die Entfernung hat sich um 33 Prozent verringert.

Binomische Formeln!

f) Im Unterschied zu d) und e) muss jetzt die Entfernung allgemein in Abhängigkeit von t berechnet werden: Allgemeiner Positionsvektor nach t Minuten ist :

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -35 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 + t \cdot 1{,}5 \\ 50 - 1{,}5t \\ 10 \end{pmatrix}$$

Länge dieses Vektors: $\left\| \begin{pmatrix} -35 + t \cdot 1{,}5 \\ 50 + t \cdot (-1{,}5) \\ 10 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(1{,}5t - 35)^2 + (50 - 1{,}5t)^2 + 100} = \sqrt{4{,}5t^2 - 255t + 3825}$

[Kontrollmöglichkeit: die allgemeine Formel muss für die Spezialfälle in d) und e) das schon errechnete Ergebnis erbringen: d(0) = $\sqrt{3825}$ und d(10) = $\sqrt{1725}$ stimmen exakt mit den Werten in d) und e) überein.]

f) Das Minimum der Abstandsfunktion d(t) muss berechnet werden.

d(t) = $\sqrt{4{,}5t^2 - 255t + 3825}$ wird minimal, wenn der Radikand (Term unter der Wurzel) minimal wird. Also genügt es die Zeit zu bestimmen, an der $d^2(t) = 4{,}5t^2 - 255t + 3825$ minimal wird.

$(d^2)' = 9t - 255 = 0 \Leftrightarrow t = 28\frac{1}{3}$; $(d^2)'' = 9 > 0 \Rightarrow$ Minimum (absolutes Min. da einziger Extremwert)

Der Abstand ist nach 28 min 20 s minimal. Einsetzen dieser Zeit in die Abstandsfunktion:

Der Abstand beträgt $d(28\frac{1}{3}) = \sqrt{4{,}5(28\frac{1}{3})^2 - 255 \cdot 28\frac{1}{3} + 3825} \approx 14{,}58$ [km]

[Zusatz: Das Flugzeug befindet sich dann im Punkt

$(-35+28\frac{1}{3} \cdot 1{,}5 | 50-28\frac{1}{3} \cdot 1{,}5 | 10) = (7{,}5|7{,}5|10)$

Der zugehörige Positionsvektor ist $\vec{x}(28\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -35 \\ 50 \\ 10 \end{pmatrix} + 28\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ 7{,}5) \\ 10 \end{pmatrix}$.]

g) (i) Richtungsvektor für die 15 Minuten Sinkflug : $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{0R} - \overrightarrow{0Q} = \begin{pmatrix} 30 \\ -25 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$$\vec{s}(t) = \overrightarrow{0Q} + t \cdot \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -20 \\ 35 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 30 \\ -25 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ (t in 15 min)} \Leftrightarrow \vec{s}(r) = \begin{pmatrix} -20 \\ 35 \\ 10 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -5/3 \\ -2/15 \end{pmatrix} \text{ (r in min)}$$

Allgemein: Sind A und B zwei Punkte einer Geraden, so ist $\vec{x}(t) = \overrightarrow{0A} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ eine vektorielle Gleichung dieser Geraden *(Punkt–Richtungsform der Geraden)*.

Den **Richtungsvektor** $\overrightarrow{AB}$ kann man durch ein beliebiges Vielfaches von $\overrightarrow{AB}$ austauschen (Bei einem Flugzeug würde man dadurch nur die Zeiteinheit ändern (s.o.), die Flugbahn bleibt dieselbe.)

Den **Stützvektor** $\overrightarrow{0A}$ kann man durch einen beliebigen anderen Ortsvektor eines Punktes auf der Geraden austauschen. (Für das Flugzeug bedeutet dies nur, dass man die Position ändert, an der man mit der Zeitrechnung beginnt.)

h) (ii) Länge des Richtungssvektors für 15 Minuten: $\left\| \begin{pmatrix} 30 \\ -25 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1529} \approx 39{,}10$ [km]

$\Rightarrow$ Die Geschwindigkeit beträgt $4 \cdot 39{,}10 = 156{,}41$ [km/h]; 156,41: 127,26=1,2291
$\Rightarrow$ Die Geschwindigkeit erhöht sich um ca. 23%.

g) (iii) Die Bewegung in z-Richtung (nach unten) zählt nicht: $4 \cdot \left\| \begin{pmatrix} 30 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 4 \cdot \sqrt{1525} \approx 156{,}20$ [km/h]

Ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ der Richtungsvektor auf einer geradlinigen Flugbahn pro Zeiteinheit, so gibt

$\left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ die Geschwindigkeit über Grund in dieser Zeiteinheit an.

g) (iv) Es zählt nur die z–Komponente: in 15 Minuten sinkt das Flugzeug um 2 km
$\Rightarrow$ Sinkgeschwindigkeit von 8 km/h.

Ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ der Richtungsvektor einer geradlinigen Flugbahn pro Zeiteinheit, so gibt

$|v_3|$ die Sinkgeschwindigkeit in dieser Zeiteinheit an.

g) (v) Einfachste Lösung: Der Pilot fliegt 8 km hoch ($\rightarrow$ z–Koordinate von R) und sinkt pro Viertelstunde um 2 km $\Rightarrow$ er hat noch 1 Stunde Zeit.
Wenn man vom dem Zeitpunkt ausgeht, an dem sich das Flugzeug in Q befindet, so würde der Absturz nach 15 min + 1 h = 5·15 min erfolgen. Setzt man in die Gleichung

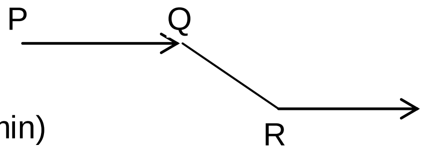
$\vec{s}(t) = \overrightarrow{0Q} + t \cdot \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -20 \\ 35 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 30 \\ -25 \\ -2 \end{pmatrix}$ für t den Wert 5 ein, erhält man $\vec{s}(5) = \begin{pmatrix} 130 \\ -90 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Man sollte sich nicht in S(130|–90|0) aufhalten.
Alternative: Beim Aufschlagpunkt muss die z–Koordinate null sein, d. h. 10+t·(–2) = 0 $\Leftrightarrow$ t=5
Setzt man t= 5 ein, so erhält man die obigen Koordinaten.

Um den Schnittpunkt einer Geraden $\vec{x}(t) = \overrightarrow{0A} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

mit der xy–Ebene zu erhalten, setzt man die z–Koordinate gleich 0 [$a_3 + t \cdot v_3 = 0$],
löst die Gleichung nach t auf und setzt den Wert in die Geradengleichung ein.

(i) Da die Richtung und die Geschwindigkeit des Flugzeuges gleich bleiben, kann man den **Richtungsvektor** der ersten Geradengleichung übernehmen, Als Stützvektor nimmt man den Ortsvektor von R, weil dieser ein Punkt der neuen Flugbahn ist.



$$\vec{v}(t)=\begin{pmatrix}10\\10\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}15\\-15\\0\end{pmatrix} \text{ (t in 10 min) oder } \vec{v}(t)=\begin{pmatrix}10\\10\\8\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1{,}5\\-1{,}5\\0\end{pmatrix} \text{ (t in min)}$$

j) (i) $\left\|\begin{pmatrix}12\\-18\\18\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{792}\approx 28{,}14$ [km/h]

Gleiche Zeiteinheit beachten!

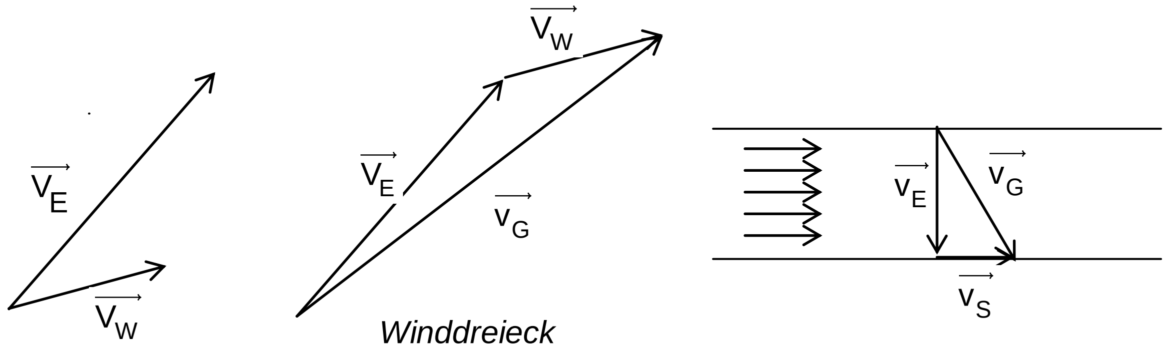
j) (ii) Am Flugzeug „ziehen“ pro Minute die Kräfte $\begin{pmatrix}1{,}5\\-1{,}5\\0\end{pmatrix}$ und $\frac{1}{60}\begin{pmatrix}12\\-18\\18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}2\\-0{,}3\\0{,}3\end{pmatrix}$

Die resultierende Kraft ergibt sich als Addition dieser Vektoren: $\begin{pmatrix}1{,}5\\-1{,}5\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0{,}2\\-0{,}3\\0{,}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}7\\-1{,}8\\0{,}3\end{pmatrix}$

Neue Flugbahn des Flugzeuges $\vec{u}(t)=\begin{pmatrix}-35\\50\\10\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1{,}7\\-1{,}8\\0{,}3\end{pmatrix}$ (t in min)

Beschreibt der Vektor $\overrightarrow{v_W}$ Richtung und seine Länge die Geschwindigkeit des Windes und der Vektor $\overrightarrow{v_E}$ die Richtung, in der das Flugzeug gesteuert wird, sowie die Länge von $\overrightarrow{v_E}$ die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges, so beschreibt der Vektor $\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{v_E} + \overrightarrow{v_W}$ die tatsächliche Richtung und seine Länge die tatsächliche Geschwindigkeit des Flugzeuges.

Die nachfolgende Skizze beschreibt diesen mit „Winddreieck“ benannten Zusammenhang:



Zum Vergleich: ein Schwimmer, der einen Fluss überqueren will und geradewegs auf das gegenüberliegende Ufer mit einer bestimmten Geschwindigkeit zuschwimmt, wird von der Strömung abgetrieben werden, seine tatsächliche Richtung und Geschwindigkeit wird durch $\overrightarrow{v_G}$ wiedergegeben.

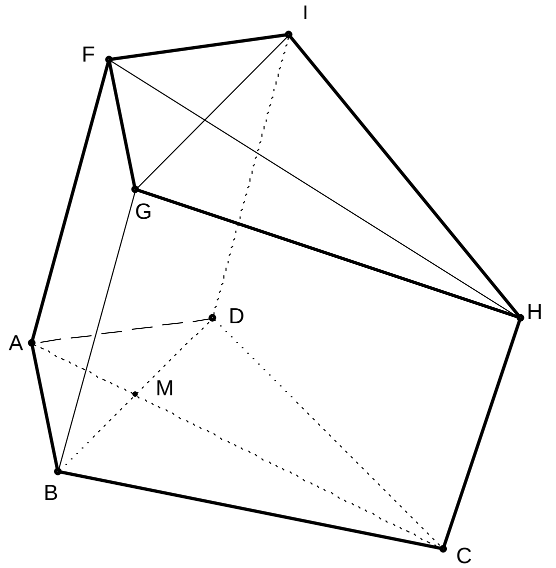
j) (iii) Der Pilot wird nicht tatenlos zusehen, wie ihn der Wind vom gewünschten Kurs wegtreibt. Da er in der Schule bei der Vektorrechnung aufgepasst hat und in seiner Ausbildung das Winddreieck kennengelernt hat, wird er seinen Kurs und seine Geschwindigkeit $\overrightarrow{v_E}$ so bestimmen, dass $\overrightarrow{v_G}$ genau mit seinem gewünschten Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ übereinstimmt:

$$\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{v_E} + \overrightarrow{v_W} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{v_E} + \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ -0{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_E} = \begin{pmatrix} 1{,}3 \\ -1{,}2 \\ -0{,}3 \end{pmatrix};\ \left|\begin{pmatrix} 1{,}3 \\ -1{,}2 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}\right| \approx 1{,}79 \text{ km/min} = 107{,}67 \text{ km/h}$$

(Das Flugzeug hat also eher Rückenwind und kann seine Geschwindigkeit um ca. 20 km/h drosseln, um mit der alten Geschwindigkeit in die gewünschte Richtung zu fliegen.)

Aufgabe 1 (Drachenprisma)

Gegeben sind die Punkte
A(4|–1|1), B(7|1|0), C(4|7|–3), D(1|1|0) und F(3|0|6).



a) Zeichne zunächst das Viereck ABCD in ein Standard–Koordinatensystem.
b) Zeige rechnerisch, dass die Dreiecke ABD und BCD gleichschenklig sind.
c) Berechne den Schnittpunkt M der Geraden g(B,D) und h(A,C).
Welche besondere Lage hat M?
d) Bestimme den Punkt E so, dass BEDA ein Parallelogramm ist.
Welches besondere Parallelogramm liegt vor?
e) Untersuche rechnerisch, ob der Punkt P(4|3|–1) auf der Geraden h(A,C) liegt.
f) Ermittle den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.
g) Durch das Viereck ABCD und den Punkt F wird ein Prisma festgelegt (siehe Zeichnung; die Flächen ABCD und FGHI sind parallel). Bestimme die Koordinaten der Punkte G, H und I und trage die Punkte in deine Zeichnung ein.
Verbinde so wie in der Skizze zu einem Prisma.
h) Ermittle die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke BH.
i) Untersuche, ob das Viereck BCHG ein Rechteck ist.
j) Um wie viel Prozent ist die Strecke AM kürzer als die Strecke AC?

Lösung Aufgabe Drachenprisma

a) Zur Kontrolle: Koordinaten der Punkte im xy–Koordinatensystem:
A'(–3|–1); B'(–2,5|–3,5); C'(5|–5); D'(0,5|–0,5); F'(–1,5|4,5)

b) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{14}$; $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{14}$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{54}$; $\left|\overrightarrow{DC}\right| = \left|\begin{pmatrix}3\\6\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{54}$

c) Nach b) ist ABCD ein Drachenviereck, sodass M auf der Mitte von BD liegt $\Rightarrow$ M(4|1|0)

d) $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix}$; E(4|3|–1). DA ABED ein Parallelogramm ist und zudem nach Aufgabe b) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right|$ gilt, muss ABED (mindestens) eine Raute sein.

Ist das Viereck sogar ein Quadrat? Dazu müssten zusätzlich die Diagonalen gleich lang sein:

$\left|\overrightarrow{AE}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{20} \neq \left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 6$ $\Rightarrow$ ABED **kein** Quadrat.

e) Da das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist, und P gleich E ist, muss der P auf der Diagonalen liegen.

f) $A_{\text{Drachenviereck}} = \frac{1}{2} e \cdot f$ (halbes Produkt der Diagonalen):

$A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{80} \cdot 6 = 3 \cdot \sqrt{80} \approx 26{,}83$ FE

g) Alle Punkte des Drachens werden mit dem Vektor $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ verschoben:

$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AF}$; G(6|2|5) ; $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AF}$; H(3|8|2) ; $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AF}$; I(0|2|5) h) M_{BH}(5|4,5|1)

i) $\left|\overrightarrow{BH}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{69} \neq \left|\overrightarrow{CG}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{93} \Rightarrow$ Diagonalen verschieden lang $\Rightarrow$ kein Rechteck

j) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{80}$ (s. o.); $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \sqrt{5}$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{80}} = 0{,}25$; AM ist um 75% kürzer als AC.

Lösungen zu Aufgabe 2 „Berechnungen an einem Tetraeder“

a) Alle drei Seiten sind $12\sqrt{2}$ LE lang; b) S((9–3–3):3|(–4+8–4):3|(–2–2+10):3) = S(1|0|2)

c) Die Seitenlängen AD, BD und CD betragen alle $\sqrt{288} = 12\cdot\sqrt{2}$ LE.

d) (1) $\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OM_{CD}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ W(–3|8|10) (Achtung! Man kann W aus der Zeichnung ablesen, wenn man nachweist, dass die Kanten des Würfels parallel zu den Achsen verlaufen.)

(2) M_{AB}(3|2|–2); M_{BC}(–3|2|4); M_{CD}(3|2|10); M_{DA}(9|2|4);

(3) $\left|\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}}\right| = \sqrt{72} = \left|\overrightarrow{M_{DA}M_{CD}}\right| \Rightarrow$ Das Viereck ist ein Parallelogramm.

Diagonalen: $\left|\overrightarrow{M_{AB}M_{CD}}\right| = \left|\overrightarrow{M_{BC}M_{SDA}}\right| = 12 \Rightarrow$ Rechteck;

2 benachbarte Seitenlängen: $\left|\overrightarrow{M_{AB}M_{AD}}\right| = \left|\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}}\right| = 12\cdot\sqrt{2} \Rightarrow$ Quadrat

$= \overrightarrow{M_{BC}M_{DA}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Diagonalen mit 12 LE gleich lang $\Rightarrow$ Rechteck.

$\overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

(3) $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{M_{DA}M_{CD}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Das Viereck ist ein Parallelogramm.

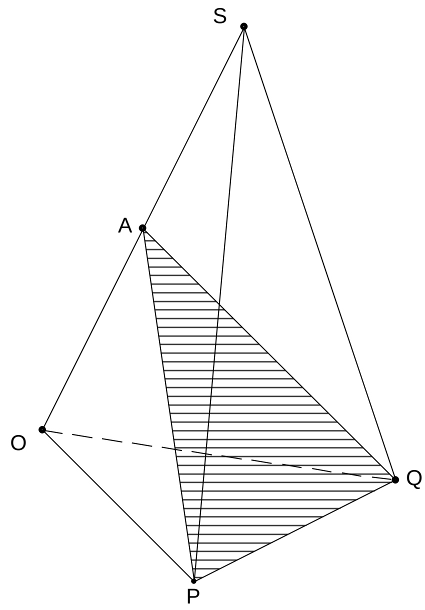
$\overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \overrightarrow{M_{BC}M_{DA}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Diagonalen mit 12 LE gleich lang $\Rightarrow$ Rechteck.

$\left|\overrightarrow{M_{AB}M_{DA}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right| = 6\sqrt{2} = \left|\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}}\right| \Rightarrow$ 2 benachbarte Seiten sind gleich lang $\Rightarrow$ Quadrat

(4) T(3|2|4) ist der Mittelpunkt der Strecke AW und somit der Mittelpunkt des Würfels.
Daher ist der gesuchte Abstand eine halbe Würfellänge : d(T, AD) = 6 LE.

Aufgabe 1

Ein Architekturbüro entwirft für ein Museum eine dreiseitige Pyramide, die durch eine farbige Glasplatte unterbrochen wird. Die Pyramide OPQS ist gegeben durch O(0|0|0), P(6|6|0), Q(2|8|0) und S(4|6|10) [Angaben in m], die Glasplatte durch P(6|6|0), Q(2|8|0) und den Mittelpunkt A der Strecke OS.



a) Berechne die Koordinaten vom A.

b) Zeige, dass das Dreieck PQA gleichschenklig, aber nicht rechtwinklig ist und bestimme den Flächeninhalt der Glasplatte sowie deren Kosten, falls 1 m^2 150 € kostet.

d) Der Punkt F(2|2|6) liegt in der Dreiecksebene PQA. (Nachweis nicht nötig.) Zeige: FS ist eine Höhe der Pyramide OPQA ist.

e) In welchem Verhältnis unterteilt die Glasplatte das Volumen der Pyramide?

f) Bei Dunkelheit wird die Pyramide durch einen Strahler angestrahlt, wobei das Licht in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ fällt. Berechne den Schattenpunkt S* der Pyramidenspitze S auf dem Boden.

h) Zeige, dass S* auf der Verlängerung der Pyramidenkante PQ liegt. Beschreibe anhand der Grafik oben, wo S* liegt.

Lösungen

a) $A=M_{OS} \Rightarrow A(2|3|5)$

b) $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left\|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{50}$; $\left|\overrightarrow{AQ}\right| = \left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{50}$; (gleichschenkliges Dreieck);

$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \left|\overrightarrow{M_{PQ}A}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\|\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{20} \cdot \sqrt{45} = 15\ m^2$; Die Kosten betragen 2250 €.

d) $\overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{SF} \cdot \overrightarrow{AP} = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot (-5) = 0$ und $\overrightarrow{SF} \cdot \overrightarrow{AQ} = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot (-5) = 0$; da $\overrightarrow{SF}$ auf zwei Seiten des Dreiecks senkrechts steht, steht der Vektor senkrecht auf der Dreiecksfläche, damit ist $h = \left|\overrightarrow{SF}\right| = 6$ die Länge der Höhe der Pyramide APQS.

e) Obere Pyramide: $V_{APQS} = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 6 = 30\ [m^3]$

Die gesamte Pyramide OPQA hat das Dreieck OPQ aus Grundfläche und da diese Grundfläche in der xy–Ebene liegt, ist der z–Wert von S die Höhenlänge, also h = 10.
Das Grunddreieck ist nicht gleichschenklig, also muss man die Höhe (z.B.) von O auf PQ berechnen, indem man den Punkt G auf g(P,Q) bestimmt, für den $\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{PQ}$ ist.

$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -12 + r \cdot 20 = 0 \Leftrightarrow r = 0{,}6$; $h = \left|\overrightarrow{OG}\right| = \left\|\begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 7{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \frac{18 \cdot \sqrt{5}}{5}$.

$A_{OPQ} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \frac{18 \cdot \sqrt{5}}{5} = 18\ [m^2]$. $V_{OPQA} = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 10 = 60\ [m^3]$.

Die Glasplatte halbiert die Pyramide.

g) Schattengerade: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$; Für den Punkt S* auf dem Boden gilt

$z=0 \Leftrightarrow 10-5t=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow S^*(10|4|0)$;

h) Punktprobe: h(PQ): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $S^* \varepsilon\ h \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = -1$;

wenn man PQ über P hinaus um $\left|PQ\right|$ verlängert, erhält man S*.

Aufgabe

Vom Tower eines Flughafens aus wird die Bewegung der Flugzeuge beobachtet. Ihre Positionen werden anhand der Koordinaten eines dreidimensionalen Koordinatensystems beschrieben, dessen Ursprung im Tower liegt.

Alle Koordinaten sind in der Einheit 100m angegeben.

a) Ein Flugzeug bewegt sich geradlinig im Horizontalflug. Es durchfliegt zunächst den Punkt P(-510|441|40) und 100 Sekunden später den Punkt Q(490|–241|40).

i) Stellen Sie eine vektorielle Gleichung der Geraden g auf, die die Bewegung des Flugzeugs beschreibt.

ii) Welche Geschwindigkeit in m/s hat das Flugzeug über Grund?

iii) Wie viel Kilometer ist das Flugzeug im Punkt P vom Tower entfernt?

b) Der Pilot bekommt die Anweisung, auf Sinkflug zu gehen. Dieser soll eine Minute nach Durchfliegen des Punktes Q beginnen und innerhalb von 2,5 Minuten geradlinig auf die verminderte Höhe 2800m führen. Dabei soll die Horizontalgeschwindigkeit unverändert bleiben. Ermittle die Koordinaten des Punktes R, den das Flugzeug mit dem Ende des Sinkfluges erreicht.

c) Beim Durchfliegen des Punktes R(-202|177|24) beginnt die letzte Phase des Landeanfluges. Der Zeitmesser des Bordcomputers wird in R auf Null gesetzt und das Flugzeug bewegt sich auf der Geraden h mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -202 \\ 177 \\ 24 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ -0{,}6 \\ -0{,}08 \end{pmatrix}$ (t = Zeit in Sekunden).

Während dieses Landeanfluges startet eine andere Maschine im Punkt V(-27|123|0) ; sie bewegt sich geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit und erreicht nach 50 Sekunden den Punkt W(-32|93|2).

i) Kreuzen sich beide Flugbahnen? Wenn ja, in welchem Punkt?

ii) Der Start der zweiten Maschine geschieht 100 Sekunden nach dem Zeitpunkt, in dem die erste Maschine die Position R durchfliegt. Warum gibt es keine Kollision?

iii) Wie groß ist der geringste Abstand beider Maschinen?

iv) Unter welchem Winkel startet die zweite Maschine?

Lösungen

a) (i) Geradengleichung: $g:\ \vec{x}(t) = \overrightarrow{0P} + t\cdot\frac{1}{100}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0P} + t\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}-510\\441\\40\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}10\\-6{,}82\\0\end{pmatrix}$;

(ii) Geschwindigkeit: $v = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{10^2 + 6{,}82^2} \approx$ 12,1· 100 m /s = 1210 m/s [= 4356 km/h !!!]

(iii)Abstand zum Tower: $d_P = \left|\overrightarrow{0P}\right| = \sqrt{510^2 + 441^2 + 40^2} \approx 675{,}4117 \triangleq 67541{,}17$ m $\approx 67{,}54$ km

b)

Positionen	P	Q	T
Sekunden ab P	0	100	160

Berechnung von T: g(160) = $\overrightarrow{0T} = \overrightarrow{0P} + 160\cdot\vec{v} \Rightarrow T(1090|-650{,}2|40)$.

Sinkgeschwindigkeit: in 2,5 min = 150 s von 4000 m auf 2800 m $\triangleq$ 12 LE in 150 s

Sinkgerade $s:\vec{x}(r) = \overrightarrow{OT} + r\cdot\vec{w} = \begin{pmatrix}1090\\-650{,}2\\40\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}10\\-6{,}82\\-0{,}08\end{pmatrix}$; r in s seit T.

Ende des Sinkfluges: $\overrightarrow{0R} = s(150) = \begin{pmatrix}2590\\-1673{,}2\\28\end{pmatrix} \Rightarrow$ R(2590|–673,2|28).

Alternative: g(160+150)= g(310) = $\begin{pmatrix}2590\\-1673{,}2\\40\end{pmatrix}$ (Position ohne Sinken)

$\Rightarrow$ R(2590|–673,2|40–12=28).

c) (i) 2. Maschine auf $k:\vec{x}(r) = \overrightarrow{0V} + r\cdot\frac{1}{50}\overrightarrow{VW} = \begin{pmatrix}-27\\123\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-0{,}1\\-0{,}6\\0{,}04\end{pmatrix}$;

h $\cap$ k: $\left\{\begin{array}{c}0{,}7t + 0{,}1r = 175\\ -0{,}6t + 0{,}6r = -54\\ -0{,}08t - 0{,}04r = -24\end{array}\right\} \Leftrightarrow$ t=230 $\wedge$ r=140; Schnittpunkt S(–41|39|5,6)

c)(ii) Keine Kollision, da das erste Flugzeug S nach 230 s, das zweite aber nach 140+100=240 s, also 10 s später erreicht.

c)(iii) Minimaler Abstand: Einheitliche Zeitmessung:

$$k:\vec{y}(r+100) = \begin{pmatrix}-202\\177\\24\end{pmatrix} + (r+100)\begin{pmatrix}0{,}7\\-0{,}6\\-0{,}08\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-132\\117\\16\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0{,}7\\-0{,}6\\-0{,}08\end{pmatrix};$$

Es genügt, den quadratischen Abstand d^2 zu minimieren.

$$d^2(r) = \left|\vec{x}(r) - \vec{y}(r)\right| = \left\|\begin{pmatrix}105 - 0{,}8r\\6\\-16 + 0{,}12r\end{pmatrix}\right\| = (105 - 0{,}8r)^2 + 6^2 + (0{,}12r - 16)^2 = 0{,}6544r^2 - 171{,}84r + 11317$$

d^2'(r) = 1,3088t–171,84 = 0 $\Leftrightarrow$ t $\approx$ 131,3 ; d^2''(131,3)>0 $\Rightarrow$ Min. d(131,3) $\approx$ 6,005 $\triangleq$ 600,5 m

Alternative: Zeitrechnung von F_1: F_2 100 s zurück: $F_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -17 \\ 183 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -0{,}1 \\ -0{,}6 \\ 0{,}04 \end{pmatrix}$

$d(t) = |g(r) - h(r)| = \left\| \begin{pmatrix} -185 \\ -6 \\ 28 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0 \\ -0{,}12 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-185 + 0{,}8t)^2 + 36 + (28 - 0{,}12t)^2}$

Es genügt $f(t)=d^2(t)$ zu minimieren. $f(t)= 0{,}6544t^2–307{,}72t+35045$; $f'(t)= 1{,}3088t–307{,}72=0$
$\Leftrightarrow t \approx 231{,}30$ $d(231{,}3) \approx 6{,}005$ [100 m] = 600,5 m

(iv) Dreieck VW’W mit W’(–32|93|0) $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{25+900}} \Rightarrow \alpha \approx 3{,}76°$

Lückentext zur Hesse'schen Normalenform

1. Eine Gleichung der Form $\vec{n}\cdot\vec{x} = d$ ist eine HNF, falls ...

Eine HNF liegt bei den folgenden Beispielen vor im Fall...

a) $\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{pmatrix}\vec{x}=-5$ b) $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\vec{x}=-5$ c) $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\vec{x}-5=0$ d) $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\vec{x}-5=0$

2. In der HNF zeigt der NV $\vec{n}$, vom Ursprung aus gesehen,.................

3. In der HNF gibt die Zahl d .... an.

4. E_1 : $\vec{n_1}\cdot\vec{x} - d_1 = 0$ und E_2 : $\vec{n_2}\cdot\vec{x} - d_2 = 0$ seien die HNFen zweier Ebenen.

a) E_1 ist zu E_2 parallel, falls ...

b) E_1 ist mit E_2 identisch, falls ...

5. Ist E_1 : $\vec{n_1}\cdot\vec{x} - d_1 = 0$ die HNF einer Ebene, so lautet die HNF der anderen,

zu E_1 parallelen Ebene, die den gleichen Abstand zum Nullpunkt besitzt: E :

6. Verdeutliche anhand einer Schnittzeichnung (Ebenen werden als Geraden gezeichnet) die Lage der Ebenen aus Aufgabe 1 zueinander.

7. Ist $\vec{n}\cdot\vec{x} - d = 0$ eine HNF und F der Fußpunkt des Lotes vom Nullpunkt auf die Ebene, so gilt $\overrightarrow{OF} =$

8. Ist $\vec{n}\cdot\vec{x} - d = 0$ eine HNF und P ein beliebiger Punkt, so gilt für den Abstand d(P, E) des Punktes von der Ebene: d(P,E) =

9. Ist $\vec{n}\cdot\vec{x} - d = 0$ eine HNF, P ein Punkt, der nicht auf der Seite der Ebene liegt, in der der Ursprung O liegt, und F der Fußpunkt des Lotes von P auf die Ebene E, so gilt: $\overrightarrow{OF} =$

10. $\vec{n}\cdot\vec{x} - d = 0$ eine HNF, P ein Punkt, der auf der Seite der Ebene liegt, in der der Nullpunkt liegt, und F der Fußpunkt des Lotes von P auf die Ebene E, so gilt: $\overrightarrow{OF} =$

11. Zwei in Normalenform (nicht unbedingt HNF !)gegebene Ebenen sind parallel, falls...

10. Um zu einer Parameterform E : $\vec{x} = \vec{x_0} + r\vec{a} + s\vec{b}$ einer Ebene eine NF zu ermitteln, geht man folgendermaßen vor:

11. Um zu einer Normalenform E : $\vec{n}\cdot\vec{x} - d = 0$ einer Ebene eine Parameterform zu ermitteln, geht man folgendermaßen vor:

Lückentext zur Hesse'schen Normalenform: Lösungen

1a) Eine Gleichung der Form $\vec{n}\cdot\vec{x}$ = d ist eine HNF, falls $|\vec{n}|=1$ und d $\geq$0 ist.

Eine HNF liegt bei den folgenden Beispielen vor im Fall d)

[bei a) und b) ist d<0; bei c) ist $|\vec{n}|=3$]

2. In der HNF zeigt der NV $\vec{n}$, vom Ursprung aus gesehen, zur Ebene hin.

3. In der HNF gibt die Zahl d den Abstand der Ebene zum Ursprung an.

4. E_1 : $\vec{n_1}\cdot\vec{x}$ – d_1 =0 und E_2 : $\vec{n_2}\cdot\vec{x}$ – d_2 =0 seien die HNFen zweier Ebenen.

a) E_1 ist zu E_2 parallel, falls $\vec{n_1}=\vec{n_2}$ oder $\vec{n_1}=-\vec{n_2}$ gilt.

b) E_1 ist mit E_2 identisch, falls die Gleichungen identisch sind.

5. Ist E_1 : $\vec{n_1}\cdot\vec{x}$ – d_1 =0 die HNF einer Ebene, so lautet die HNF der anderen, zu E_1 parallelen Ebene, die den gleichen Abstand zum Nullpunkt besitzt: E_2 : $-\vec{n_1}\cdot\vec{x}$ – d_1 =0

6. Verdeutliche anhand einer Schnittzeichnung (Ebenen werden als Geraden gezeichnet) die Lage der Ebenen aus Aufgabe 1 zueinander.

7. Ist $\vec{n}\cdot\vec{x}$ -d =0 eine HNF und F der Fußpunkt des Lotes vom Nullpunkt auf die Ebene, so gilt $\overrightarrow{OF}=$

8. Ist $\vec{n}\cdot\vec{x}$ – d =0 eine HNF und P ein beliebiger Punkt, so gilt für den Abstand d(P, E) des Punktes von der Ebene: d(P,E) =

9. Ist $\vec{n}\cdot\vec{x}$ – d =0 eine HNF, P ein Punkt, der nicht auf der Seite der Ebene liegt, in der der Ursprung O liegt, und F der Fußpunkt des Lotes von P auf die Ebene E, so gilt: $\overrightarrow{OF}=$

10. $\vec{n}\cdot\vec{x}$ – d =0 eine HNF, P ein Punkt, der auf der Seite der Ebene liegt, in der der Nullpunkt liegt, und F der Fußpunkt des Lotes von P auf die Ebene E, so gilt: $\overrightarrow{OF}=$

11. Zwei in Normalenform (nicht unbedingt HNF !)gegebene Ebenen sind parallel, falls ihre Normalenvektoren parallel/kollinear sind.

10. Um zu einer Parameterform $E:\ \vec{x}=\vec{x_0}+r\vec{a}+s\vec{b}$ einer Ebene eine Normalenform zu ermitteln, geht man folgendermaßen vor: man berechnet mit $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$ einen Normalenvektor und setzt ihn in die Formel $\vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\vec{x_0}$ ein.

11. Um zu einer Normalenform E : $\vec{n}\cdot\vec{x}$ – d =0 einer Ebene eine Parameterform aufzustellen, ermittelt man 3 Punkte A, B und C, die alle auf der Ebene (aber nicht auf einer Geraden) liegen und bildet die Gleichung $\vec{x}=\overrightarrow{OA}+r\cdot\overrightarrow{AB}+s\cdot\overrightarrow{AC}$

Richtig oder falsch? Verbessere die falschen Aussagen.

(Abkürzungen: SV = Stützvektor; RV = Richtungsvektor; NV = Normalenvektor; PF=Parameterform; NF=Normalenform; KF=Koordinatenform)

1. Zwei Geraden verlaufen parallel zueinander, falls ihre Richtungsvektoren kollinear sind.

2. Zwei Geraden schneiden sich, falls ihre RV nicht kollinear sind.

3. Zwei Geraden schneiden sich senkrecht, wenn das SP der SV null ist.

4. Zwei Geraden, die zwei gemeinsame Punkte haben, haben auch drei gemeinsame Punkte.

5. Ebenen sind parallel, wenn ihre RV kollinear sind.

6. Zu einer Ebene gibt es eine eindeutige Koordinatenform.

7. Bei zwei Ebenen unterscheidet man 3 verschiedene Lagebeziehungen zueinander.

8. Bei zwei Geraden unterscheidet man 3 verschiedene Lagebeziehungen zueinander.

9. Ebenen haben mindestens zwei Achsenabschnitte.

10. Hat der NV einer Ebene nur eine von 0 verschiedene Komponente, so liegt eine Koordinatenebene (d.h. xy–, xz– oder yz–Ebene) vor.

11. Eine Gerade verläuft senkrecht zu einer Ebene, wenn das SP aus RV und NV 0 ist.

12. Alle RV einer Gerade sind kollinear.

13. Alle NV einer Ebene sind kollinear.

14. Wenn man bei der KF einer Ebene eine Äquivalenzumformung vornimmt, ändert sich die Ebene.

15. Drei Ebenen haben keine oder unendlich viele gemeinsame Punkte.

16. Zwei Ebenen können genau einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

17. Wenn die NV zweier Ebenen kollinear sind, schneiden sich die Ebenen senkrecht.

18. Wenn die KF zweier Ebenen nicht äquivalent sind, sind die NV nicht kollinear.

19. Die Schnittpunkte der Ebene E: $\vec{n} \cdot \vec{x} = c$ und der Gerade $g : \vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v}$ sind die Lösungen der Gleichung $\vec{n} \cdot \vec{u} + t \cdot (\vec{n} \cdot \vec{v}) = c$.

20. Das Kreuzprodukt zweier senkrecht aufeinander stehender Vektoren ist 0.

Richtig oder falsch? Verbesserung der falschen Aussagen.

1. Zwei Geraden verlaufen parallel zueinander, falls ihre Richtungsvektoren kollinear sind.
2. Zwei Geraden schneiden sich **oder sind windschief**, falls ihre RV nicht kollinear sind.
3. Zwei sich schneidende Geraden schneiden sich senkrecht, wenn das SP der RV null ist.
4. Zwei Geraden, die zwei gemeinsame Punkte haben, sind identisch (und haben demnach auch drei gemeinsame Punkte).
5. Ebenen sind parallel, wenn ihre RV der einen Ebene jeweils eine Linearkombination der RV der anderen Eben sind: $\vec{u_1} = a \cdot \vec{u_2} + b \cdot \vec{v_2}$ und $\vec{v_1} = c \cdot \vec{u_2} + d \cdot \vec{v_2}$
6. Zu einer Ebene gibt es unendlich viele Koordinatenform, die aber alle äquivalent sind.
7. Bei zwei Ebenen unterscheidet man 3 verschiedene Lagebeziehungen zueinander: echt parallel, identisch oder schneidend.
8. Bei zwei Geraden unterscheidet man 4 verschiedene Lagebeziehungen zueinander: echt parallel, identisch, (senkrecht) schneidend oder windschief
9. Ebenen haben mindestens einen Achsenabschnitt.
10. Hat der NV einer Ebene nur eine von 0 verschiedene Komponente, so liegt eine Ebene parallel zu einer Koordinatenebene (xy–, xz– oder yz–Ebene) vor.
11. Eine Gerade verläuft senkrecht zu einer Ebene, wenn das SP aus RV und NV 0 ist.
12. Alle RV einer Gerade sind kollinear.
13. Alle NV einer Ebene sind kollinear.
14. Wenn man bei der KF einer Ebene eine Äquivalenzumformung vornimmt, ändert sich die Ebene nicht.
15. Drei Ebenen haben keinen ($\rightarrow$ echt parallel) einen oder unendlich viele (Schnittgerade oder identische Ebenen) gemeinsame Punkte. (siehe Abbildungen Buch S. 226)
16. Zwei Ebenen haben entweder keinen Schnittpunkt gemeinsam ($\rightarrow$ echt parallel) oder unendlich viele Schnittpunkte gemeinsam ($\rightarrow$ identisch oder gemeinsame Schnittgerade)
17. Wenn die NV zweier Ebenen kollinear sind, dann verlaufen die Ebenen parallel zueinander.
18. Wenn die KF zweier Ebenen nicht äquivalent sind, können die NV kollinear oder nicht kollinear sein (Lage echt parallel oder schneidend).
19. Die Schnittpunkte der Ebene E: $\vec{n} \cdot \vec{x} = c$ und der Gerade $g: \vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v}$ sind die Lösungen der Gleichung $\vec{n} \cdot \vec{u} + t \cdot (\vec{n} \cdot \vec{v}) = c$. $g \cap E$: $\vec{n} \cdot (\vec{u} + t \cdot \vec{v}) = c \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} + t \cdot (\vec{n} \cdot \vec{v}) = c$
(DG; AG der Skalarmultiplikation)
20. Das **Skalarprodukt** zweier senkrecht aufeinander stehender Vektoren ist 0.
(Das Kreuzprodukt ist ein Vektor und damit niemals eine Zahl.)

Vergleich Parameterform und Normalform/Koordinatenform
Lösungen von Aufgaben aus dem Buch Lambacher Schweizer LK 2011

S. 207 A. 4a) TR $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ r=s=1; 3. Gleichung: 2+7+2 = 14 (w); A ε E; B $\notin$E; C ε E

S. 216 A. 2 E: 2x – 5y + 7z = –15 a) $2\cdot2+7\cdot(-5)+1\cdot7 = -24 \neq -15$ A $\notin$ E

Entsprechend: B und C liegen auf E, D nicht.

S. 216 A. 3a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (PF); $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1$;

E: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = -1$ (NF) $\Leftrightarrow$ -z = -1 $\Leftrightarrow$ z = 1 (KF) ; D $\notin$ E, da $z_D = 3 \neq 1$.

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (PF); $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$

E: x + 2z = –1 (KF); $1\cdot(-7)+2\cdot3 = -1$ (w); D ε E.

S. 208 A.12a) TR $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ r=1 $\wedge$ t=0; 3. Gl.: $2 + 1\cdot1 = 3 + 0\cdot1$ (w) S(3|4|3)

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) S(0|–2|0); E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

S. 221 A. 1a) $x_1 = 4+t$; $x_2=6+2t$; $x_3 = 2+3t$ Einsetzen in E:
2(4+t)+4(6+2t)+6(2+3t)=16 $\Leftrightarrow$ 44+28t=16 $\Leftrightarrow$ t = –1 $\Rightarrow$ S(3|4|–1)

b) 5(6+2t)–7(2+3t)=13 $\Leftrightarrow$ 16–11t=13 $\Leftrightarrow$ t = $\frac{3}{11}$ $\Rightarrow$ S$(4\frac{3}{11}|6\frac{6}{11}|2\frac{9}{11})$

c) $\Rightarrow$ a) d) 3(4+t)–(2+3t)=10 $\Leftrightarrow$ 10=10 $\Rightarrow$ g liegt in E
e) 3(4+t)–(2+3t)=12 $\Leftrightarrow$ 10=12 $\Rightarrow$ g verläuft echt parallel zu E

f) 4(4+t)–5(6+2t)=11 $\Leftrightarrow$ –14–6t=11 $\Leftrightarrow$ t = $-\frac{25}{6}$; S$\left(-\frac{1}{6} \,|\, -2\frac{1}{3} \,|\, -10\frac{1}{2}\right)$

S. 221 A. 3a) b) Wie Aufgabe 1; Lösung im Buch

S. 243 A. 1a) Lotgerade l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1+3t \\ 7+4t \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 3$; $x_2 = -1+3t$; $x_3 = 7+4t$;

Eins. in E: $3\cdot(-1+3t)+4\cdot(7+4t)=0$ $\Leftrightarrow$ 25t +25=0 $\Leftrightarrow$ t = –1 $\Rightarrow$ F(3|–4|3) $|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{9+16} = 5$ [LE]

b) E:12x+6y–4z=13; $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+12t \\ 6t \\ 3-4t \end{pmatrix}$; Einsetzen in E:

$12(-2+12t)+6\cdot6t-4(3-4t)=13$ $\Leftrightarrow$ 196t –36 =13 $\Leftrightarrow$ t = 0,25; F(1|1,5|2); $|\overrightarrow{AF}| = 3{,}5$ [LE]

c) NV zu E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; Lotgerade: l: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; E $\cap$ g: TR $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -5 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow$ t=–3 $\Rightarrow$ F(2|1|–2); $|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{0^2+3^2+15^2} = \sqrt{234} \approx 15{,}30$

S. 221 A. 2a) r=5; s=4; t=1; S(5|9|10);
b) keine eindeutige Lösung: g liegt entweder in E oder g verläuft echt parallel zu E.

Punktprobe: TR $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 20 \\ -7 & 4 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow r=5 \wedge s = 7 \Rightarrow (22|-18|-7)\ \varepsilon\ E \Rightarrow$ g liegt in E.

S.221 A. 2a) TR $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 & -3 \\ -1 & 0 & -8 & .-3 \\ 1 & 3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 1;\ S(5|9|10)$ b) TR $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 20 \\ -7 & 4 & -1 & -19 \\ 1 & -3 & 5 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow$ keine eindeutige Lösung $\Rightarrow$ g liegt entweder in E oder g verläuft echt parallel zu E.

Punktprobe: TR $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 20 \\ -7 & 4 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow r=5 \wedge s = 7 \Rightarrow (22|-18|-7)\ \varepsilon\ E \Rightarrow$ g liegt in E.

S. 221 A. 1 $x_1 = 4+t$; $x_2=6+2t$; $x_3 = 2+3t$ Einsetzen in E:

a) $2(4+t)+4(6+2t)+6(2+3t)=16 \Leftrightarrow 44+28t=16 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow S(3|4|-1)$

b) $5(6+2t)-7(2+3t)=13 \Leftrightarrow 16-11t=13 \Leftrightarrow t = \frac{3}{11} \Rightarrow S(4\frac{3}{11}|6\frac{6}{11}|2\frac{9}{11})$

c) $\Rightarrow$ a) d) $3(4+t)-(2+3t)=10 \Leftrightarrow 10=10 \Rightarrow$ g liegt in E

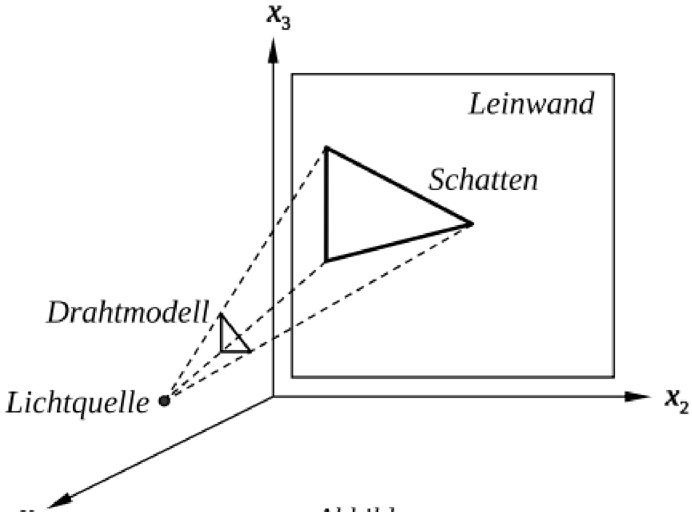
e) $3(4+t)-(2+3t)=12 \Leftrightarrow 10=12 \Rightarrow$ g verläuft echt parallel zu E

f) $4(4+t)-5(6+2t)=11 \Leftrightarrow -14-6t=11 \Leftrightarrow t = -\frac{25}{6}$; $S\left(-\frac{1}{6}\,|\,-2\frac{1}{3}\,|\,-10\frac{1}{2}\right)$

An einer Schule wird eine Mathematikausstellung unter dem Motto „Mathematik zum Anfassen und Mitmachen“ ausgerichtet.
Eines der ausgestellten Experimente besteht aus einer annähernd punktförmigen Lichtquelle, einer Leinwand, auf die verschiedene unregelmäßige Dreiecke gezeichnet sind, und einem Drahtmodell eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks. Dieses Drahtmodell gilt es so zwischen Lichtquelle und Leinwand zu halten, dass sein Schatten exakt mit einem der Dreiecke auf der Leinwand zur Deckung gebracht wird.
Die Abbildung zeigt eine Prinzipdarstellung des Experiments.

In dieser Aufgabe ist die Leinwand Teil der x_2x_3 -Ebene, die Position der Lichtquelle ist L(40 |10 |10), die Längeneinheit 1 dm.

Das Drahtmodell wird zunächst so zwischen Lichtquelle und Leinwand gehalten, dass seine Ecken in den Punkten A(30 |10 |10) , B(32|11|12) und C(31|12| 8) liegen.



Abbildung

a) (1) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ABC.
(2) Bestimmen Sie die Position des rechten Winkels im rechtwinkligen Dreieck ABC und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. (10 Punkte)

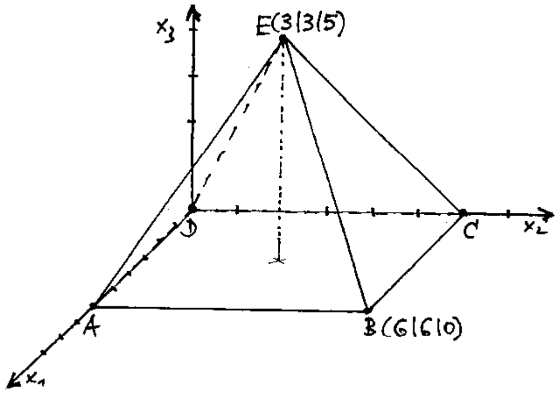
b) (1) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte A‘, B‘ und C‘ des Schattens, den das Drahtmodell auf die Leinwand wirft.
(2) Zeigen Sie, dass bei der Projektion des Dreiecks ABC auf das Schattendreieck A‘ B‘ C‘ die Größen aller Innenwinkel verändert werden.

[Zur Kontrolle: A‘(0 |10 |10), B‘(0 |15| 20), C'$\left(0\,|\,\frac{170}{9}\,|\,\frac{10}{9}\right)$] (19 Punkte)

c) Auf der Leinwand ist das Dreieck R’S’T‘ mit den Eckpunkten R'$\left(0\,|\,\frac{22}{3}\,|\,\frac{22}{3}\right)$, S‘ und T‘ aufgezeichnet. Das Drahtmodell wird so zwischen Lichtquelle und Leinwand gehalten, dass sein Schatten mit dem Dreieck R’S’T‘ auf der Leinwand zur Deckung kommt.
Die Positionen S(26 |11|7) und T(23| 8 |7) der beiden 45°-Ecken des Drahtmodells werden als bekannt vorausgesetzt, während die Position R der 90°-Ecke, deren Schatten auf der Leinwand die Position R‘ hat, bestimmt werden soll.
(1) Geben Sie eine Gleichung der Geraden LR‘ an, auf der der Lichtstrahl verläuft, der von der Position L der Lichtquelle ausgeht und im Punkt R‘ auf die Leinwand trifft.
(2) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, in der alle Punkte liegen, die von den Punkten S und T gleichen Abstand haben. [Zur Kontrolle: E: $x_1 + x_2 = 34$]
(3) Berechnen Sie nun die Koordinaten der Position R der 90°-Ecke des Drahtmodells.
(4) Die Position R könnte nicht mit Hilfe der Ebene E aus (2) bestimmt werden, wenn die Position der Lichtquelle L in dieser Ebene läge.
Beschreiben Sie einen Lösungsweg zur Bestimmung der Position R der 90°-Ecke des Drahtmodells, der die Ebene E aus (2) nicht verwendet.

Aufgabe 1

Gegeben ist eine quadratische Pyramide ABCDE wie in der Zeichnung dargestellt; 1 LE $\hat{=}$ 10 m.



a) Berechnen Sie das Volumen V in m^3 und die Mantelfläche M (= Oberfläche der Seiten) der Pyramide in m^2.

b) Berechnen die Länge einer Seitenkante und ermitteln Sie, wie hoch die Pyramide sein müsste, wenn man verlangt, dass die Seitenkanten genauso lang sind wie die Seiten der Quadrates.

c) Sonnenstrahlen scheinen in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie den Schattenpunkt E' der Mastspitze E auf dem Boden.

d) Berechnen Sie zu den Seitendreiecken ABE, BCE und DCE die Schwerpunkte R,S und T. Untersuchen Sie rechnerisch, ob ein besonderes Dreieck vorliegt.

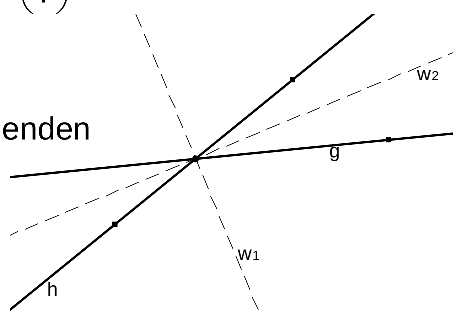
Aufgabe 2

a) Untersuchen Sie die Lagebeziehung (echt parallel; identisch; schneidend; windschief) von g und h sowie g und k. Berechnen Sie ggf. den Schnittpunkt. (Bei Lösungen mit TR Koeffizientenmatrix angeben!)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix};\ h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix};\ k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b) Geben Sie die Gleichung einer Geraden an, die die Gerade g aus a) senkrecht schneidet.

c) Beschreiben Sie, wie man zu zwei gegebenen, sich schneidenden Geraden g und h Gleichungen der Winkelhalbierenden w_1 und w_2 ermitteln kann.



Aufgabe 3

In einem Koordinatensystem sind die Punkte A(1|2|3), B(5|0|−1), C(3|4|–5) und D(−1|6|−1) gegeben.

a) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.

b) Das Quadrat ABCD ist nun die Grundfläche einer Pyramide, bei der die Spitze auf der Geraden

$$g: \vec{x}(t) = \overrightarrow{OM_{BD}} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ liegt.}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Gerade senkrecht zur Quadratfläche verläuft, indem Sie nachweisen, dass der Richtungsvektor von g sowohl senkrecht zu $\overrightarrow{AB}$ als auch senkrecht zu $\overrightarrow{AD}$ verläuft.

(ii) Das Volumen der Pyramide soll 60 VE betragen. Bestimmen Sie Länge der Pyramidenhöhe sowie die Koordinaten der beiden möglichen Pyramidenspitzen S_1 und S_2.

→ Seite 2

Aufgabe 4

Ein Erdsatellit, der außer Kontrolle geraten ist, bewegt sich im letzten Teil seines Fluges auf geradliniger Bahn zur Erde. Seine Position wird zunächst in Punkt P(188|–94|224) und ein Viertelstunde später im Punkt Q(80|–40|170) ausgemacht (Angaben in km).
Es wird angenommen, dass er sich mit etwa konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Die Bewegung des Satelliten soll durch eine Geradengleichung erfasst werden, bei der t die Zeit in Stunden nach dem Durchflug durch P misst.

a) Begründen Sie, dass g: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 188 \\ -94 \\ 224 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -432 \\ 216 \\ -216 \end{pmatrix}$ die gesuchte Gleichung ist.

b) Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit v_B und die Geschwindigkeit v_G „über Grund" in km/h.

c) Beim Fallschirmsprung fällt ein Springer mit etwa 180 km/h zur Erde („Sinkgeschwindigkeit"). Um wie viel Prozent ist die Sinkgeschwindigkeit v des Satelliten größer oder kleiner als die des Fallschirmspringers?

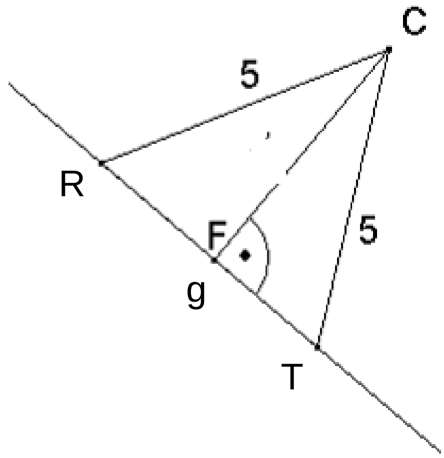
d) Berechnen Sie, wann und wo der Satellit auf die Erde aufschlagen würde.

e) Von einer Beobachtungsstation in C(–255|130|2) auf einem Berg wollen Wissenschaftler den Flug des Satelliten beobachten.

(i) Wie nahe kommt der Satellit der Beobachtungsstation? Berechnen Sie dazu den Abstand der Geraden g vom Punkt C. [Kontrolle Lotfußpunkt F(–256| 128|2)]

(ii) Gute Aufnahmen erfordern es, dass der Satellit näher als 5 km an C herankommt. Berechnen Sie die beiden Punkte R und T auf g, die von C 5 km entfernt sind.

(iii) Berechnen Sie, wie viel Sekunden der Satellit für die Strecke RT braucht.



Um eine Gefährdung der Bevölkerung zu vermeiden, entschließt man sich, den Satelliten von einer Bodenstation in B(80|60|0) (Angabe in km) aus abzuschießen.
Die Bahn dieser Rakete wird ebenfalls als geradlinig angenommen, die Geschwindigkeit der Rakete beträgt 1,64 km/s, die Abschussrampe ist in Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$ ausgerichtet.

f) Berechnen Sie für den Abschusswinkel α der Raketenbahn gegenüber dem Boden (xy–Ebene). (Betrachten Sie dazu ein rechtwinkliges Dreieck BT'T wobei T ein Punkt der Raketenbahn und T' die senkrechte Projektion von T auf die xy–Ebene ist.)

g (i) Zeigen Sie, dass sich Satellitenbahn g und die Raketenbahn h in einem Punkt S kreuzen und ermitteln Sie diesen Punkt.

(ii) Jemand behauptet: der Punkt S ist der Punkt auf g, an dem der Satellit der Bodenstation am nächsten ist. Überprüfen Sie diese Behauptung mit einer einfachen Rechnung (keine Abstandsberechnung d(B,g).)

Viel Erfolg!

Aufg. 1a) A(6|0|0), B(6|6|0), C(0|6|0), D(0|0|0); E(3|3|5); V = $\frac{1}{3}\cdot G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 6^2\cdot 5 = 60$ VE

$\Rightarrow$ V = 60 000 m³. Der Mantel besteht aus 4 kongruenten, gleichschenkligen Dreiecken.

M = 4· $\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{M_{AB}E}\right|$ = 2·6· $\sqrt{3^2+5^2}$ = 12· $\sqrt{34} \approx 69{,}71$ FE = 6971 m².

b) $\left|\overrightarrow{DE}\right| = \sqrt{3^2+3^2+25} = \sqrt{43} \approx 6{,}56$ LE = 65,6 m.

$\sqrt{3^2+3^2+h^2} = 6 \Leftrightarrow h^2 = 18 \Leftrightarrow h = \sqrt{18} \approx 4{,}24$ LE = 42,4 m.

c) Schattengerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$; z=0 $\Leftrightarrow$ 5–1,5t = 0 $\Leftrightarrow$ t = $3\frac{1}{3}$; S'($6\frac{1}{3}$|–2|0)

d) R(5|3|5/3); S(3|5|5/3), T(1|3|5/3); $\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{RS}\right| = \left|\overrightarrow{ST}\right| = \sqrt{8}$; $\left|\overrightarrow{ST}\right| = 4$;

$\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{ST}$ =0 $\Rightarrow$ gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck.

Aufg. 2 a) g und h: RV sind kollinear: $\vec{v} = (-2)\cdot\vec{u}$; Punktprobe: $\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ r=2 $\wedge$ 1+2·1=4 (f) $\Rightarrow$ g und h verlaufen echt parallel.

(ii) g und k: RV nicht kollinear: k=–2 $\wedge$ k=4; $\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\6\\10\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$ TR $\begin{pmatrix}-2 & -1 & 8\\1 & -4 & 5\end{pmatrix}$

r= –3 $\wedge$ t = –2 Kontrolle der 3. Gleichung: 8–3·4=10–2·7 $\Leftrightarrow$ –4 = –4 (w)
Einsetzen von r=–3 in g oder s = –2 in k ergibt S(8|–2|–4)

b) SP der RV muss 0 sein; z. B. $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\-1\end{pmatrix}$, da 0·(–2) + 8·1 + (–2)·4 = 0

c) Ist S der Schnittpunkt, so ist $\overrightarrow{OS}$ ein Stützvektor. Wenn man die RV $\vec{u}+\vec{v}$ der Geraden normiert, dann ist $\vec{u_0}+\vec{v_0}$ ein RV der einen, und $\vec{u_0}-\vec{v_0}$ ein RV der anderen Winkelhalbierenden. w_1:
$\vec{x} = \overrightarrow{OS} + t\cdot(\vec{u_0}+\vec{v_o})$; w_2: $\vec{x} = \overrightarrow{OS} + t\cdot(\vec{u_0}-\vec{v_o})$

Aufg. 3 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\Rightarrow$ ABCD ist ein Parallelogramm; Zusätzlich:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ =4·(–2)+(–2)·4+(–4)·(–4) = 0 $\Rightarrow$ ABCD ist ein Rechteck;
Zusätzlich: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 6 = \left|\overrightarrow{AD}\right|$ $\Rightarrow$ ABCD ist ein Quadrat

c) $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix} = 8-4-4 = 0$; $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\-4\end{pmatrix} = -4+8-4 = 0$; $\left|\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right|$ =3 $\Rightarrow$ $\vec{v} = \frac{5}{3}\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right| = 5$

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 60 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot h = 60 \Leftrightarrow h = 5$; $M_{BD}(3|3|-1)$;

$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM_{BD}} \pm \vec{v} \Rightarrow S_1(6\frac{1}{3}|6\frac{1}{3}|\frac{2}{3})$; $S_2(-\frac{1}{3}|-\frac{1}{3}|-2\frac{1}{3})$

Aufg. 4a) Da $\overrightarrow{PQ}$ der Bewegungsvektor für eine Viertelstunde ist, ist $4 \cdot \overrightarrow{PQ}$ der RV für eine Stunde. $\overrightarrow{OP}$ ist der Stützvektor, weil t=0 für den Durchflug durch P gelten soll.

b) $v_B = \left|\begin{pmatrix}-432\\216\\-216\end{pmatrix}\right| = \sqrt{432^2 + 2 \cdot 216^2} = \sqrt{279936} \approx 529{,}09$ [km/h]; $v_G = \left|\begin{pmatrix}-432\\216\\0\end{pmatrix}\right| \approx 482{,}99$ km/h.

c) Fallgeschw.: 216 km/h. 216/180=1,2. Der Satellit bewegt sich 20% schneller auf die Erde zu.

d) Setze in g_S z=0 $\Rightarrow$ 224 – 216 = 0 $\Leftrightarrow$ t = $1\frac{1}{27}$ $\Rightarrow$ A(–260|130|0).

e)(i) $\overrightarrow{0F} = \begin{pmatrix}188\\-94\\224\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-432\\216\\-216\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix}443\\-224\\222\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-432\\216\\-216\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow -287712 + t \cdot 279936 = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{37}{36}$; $g(\frac{37}{36}) = \begin{pmatrix}188\\-94\\224\end{pmatrix} + \frac{37}{36}\begin{pmatrix}-432\\216\\-216\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-256\\128\\2\end{pmatrix} \Rightarrow F(-256|\ 128|2)$

$\left|\overrightarrow{CF}\right| = \sqrt{5} \approx 2{,}236$ Der Satellit kommt auf ca. 2,2 km an die Station heran.

(ii) $\left|\overrightarrow{FR}\right| = \sqrt{5^2 - \sqrt{5}^2} = \sqrt{20}$ [km]; Dauer: $\sqrt{20} : 529{,}09 \approx 0{,}0085$ h. Mit $\overrightarrow{OF} \pm 0{,}0085 \cdot \begin{pmatrix}-432\\216\\-216\end{pmatrix}$ erhält man die Punkte R(–252,35|126,17|3,83) und T(–259,65|129,83|0,17).

(iii) 2· 0,0085 h $\approx$ 61 s.

Abschusswinkel: r: $\vec{x}(r) = \begin{pmatrix}80\\60\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-8\\-6\\13\end{pmatrix}$; $\vec{x}(1) = \begin{pmatrix}72\\54\\13\end{pmatrix}$; Rechtwinkliges Dreieck mit B(80|60|0), T'(72|54|0) und T(72|54|13) und Katheten 13 und 10. tan (α)= $\frac{13}{10} \Rightarrow \alpha \approx 52{,}43°$

a) $g \cap h: \left\{\begin{matrix}-432t + 8r = -108\\216t + 6r = 154\\-216t - 13r = -224\end{matrix}\right\}$ TR $\begin{pmatrix}-432 & 8 & -108\\216 & 6 & 154\end{pmatrix} \Rightarrow$ t $\approx$0,4352 $\wedge$ r = 10

Kontrolle 3. Gleichung –216·0,435–13·10 = –224 (w) $\Rightarrow$ S(0|0|130)

b) (iii) Der nächste Punkt ist das Lot von B auf g, die Geraden müssten orthogonal verlaufen. Das Skalarprodukt der RV der Geraden ergibt aber (–8)·(–432)+(–6)·216+13·(–216) ≠ 0.

Wiederholende Fragen zur Analytischen Geometrie mit Lösungen

1.	Welche Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden gibt es ?	
2.	Gegeben sind eine Gerade und eine Ebene in Parameterform im IR^3. Wie untersucht man sie auf Schnittpunkte?	
3.	Eine Gerade wird mit einer Ebene in PF gleichgesetzt, man erhält ein LGS. Wie interpretiert man die Lösung geometrisch?	
4.	Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt P. Wie bildet man eine Normalenform der Ebene, die senkrecht zu g durch P verläuft?	
6.	Wie bestimmt man die Länge eines Vektors?	
7.	Wie zeigt man mithilfe von Vektoren, dass ein Viereck ABCD ein Quadrat ist?	
8.	Wie zeigt man, dass zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen?	
9.	Wie zeigt man, dass ein Punkt P im Parallelogramm ABCD liegt?	
10.	Wie zeigt man, dass drei Punkte A, B und C auf einer Geraden liegen?	
11.	Wie zeigt man, dass vier Punkte in einer Ebene liegen?	
12.	Wie zeigt man, dass eine Gerade orthogonal zu einer Ebene steht, die in Parameterform gegeben ist (ohne eine KF zu berechnen)?	
13.	Wie zeigt man, dass ein Viereck ABCD ein Drachenviereck ist?	
14.	Wie zeigt man, dass ein Viereck ABCD ein Parallelogramm ist?	
15	Wo schneidet E: $2x - 4y + z = 6$ die Koordinatenachsen?	
16.	Wie bestimmt man das Volumen einer quadratischen Pyramide?	
17.	Wie kommt man von der PF einer Ebenengleichung zu einer Normalenform?	
18.	Wie weist man nach, dass ein Dreieck ABC gleichschenklig ist?	
19.	Wie bestimmt man den Abstand d(P,g) mit g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{u}$?	
20.	Die Geraden g und h beschreiben die Flugbahnen zweier Flugzeuge. Wie untersucht man die Möglichkeit einer (Beinahe-)Kollision?	
21.	Wie bestimmt man den Mittelpunkt einer Strecke?	
22.	Wie zeigt man, dass zwei Geraden *g* und *h* identisch sind?	
23.	Wie ermittelt man die Schnittpunkte dreier Ebenen?	
24.	Wie überprüft man die Lagebeziehung zweier Ebenen in Koordinatenform?	
25.	Wie überprüft man ob eine Pyramide gerade ist?	
26.	Wie ermittelt man eine Schnittgerade zweier Ebenen in KF?	
28.	Wie ermittelt man den y-Achsenabschnitt einer in KF gegebenen Ebene?	
29.	Wie erkennt man, dass eine Normalenform die Hessesche Normalenform ist?	
30.	Wie berechnet man den Abstand eines Punktes P von einer Ebene E: $\vec{n} \cdot \vec{x} = c$?	
31.	Wie lässt sich geometrisch das SP zweier kollinearer Vektoren erklären?	
33.	Gegeben sei eine Pyramide ABCS mit Volumen V. Wo liegen alle Punkte S' die mit ABC das gleiche Volumen V haben?	
35.	Beschreibe die Lage der Ebene x=2.	
37.	Welche geometrische Bedeutung hat das SP zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$?	
40.	Welche besondere Lage hat die Ebene x–y=0?	
41.	Wie weist man nach, dass zwei Geraden windschief zueinander verlaufen?	
42.	Spiegele den Punkt P(1|2|3) an der Ebene y=5	
43.	Wie berechnet man den Lotfußpunkt F eines Lotes von einem Punkt P auf eine Gerade g: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{u}$?	
44.	A(1|2|3); B(–1|2|4); Berechne $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$	
45.	A(1|2|3); B(–1|2|4); Berechne $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$	
46	Wie lang ist der Vektor mit den Koordinaten 8, –4 und 1?	
47.	A(1|2|3); $\vec{n} = \overrightarrow{OA}$; Ermittle eine KF der Ebene mit NV $\vec{n}$ durch P(4|0|–1)	
48.	Gib den Ansatz für eine PF der Ebene durch P, Q und R an.	

49.	Gib einen Normalenvektor $\vec{n}$ für die Ebene z=0 an.	
50.	Wann sind zwei Geraden parallel?	
52	Wie lang ist der Vektor mit den Koordinaten 1, 2 und –2?	
53	Wie nennt man ein Viereck mit vier gleich langen Seiten?	
54	Wie nennt man ein Viereck mit gleich langen Diagonalen, die senkrecht aufeinander stehen?	
55	Welche Folgerung kann man ziehen, wenn die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ kollinear sind?	
56	Welcher Vektor zeigt in die gleiche Richtung wie $\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$, hat aber die Länge 1?	
57	In einem Drachenviereck sind die Diagonalen 6 cm und 8 cm lang. Wie groß ist der Flächeninhalt?	
58	Wo liegt der Mittelpunkt der Strecke AB mit A(1|2) und B(3|4) ?	
59	Wie nennt man ein Viereck mit a) gleich langen Diagonalen, die sich halbieren? b) zwei parallelen Seiten? c) vier gleich langen Seiten?	
60	Welche Eigenschaft haben alle Richtungsvektoren einer Gerade?	
61	Wo liegt der Schwerpunkt des Dreiecks ABC mit A(1|2|3), B(2|–2|–2) und C(–3|0|–1)?	
62	Wie verlaufen zwei Geraden, die weder identisch noch windschief sind und sich auch nicht schneiden?	
63	Wie viel Kantenvektoren bei einem Quader sind jeweils gleich?	
64	Ein Eckpunkt achsenparallelen Quaders ist der Ursprung, ein zweiter Eckpunkt liegt bei P(1|2|3). Gib die Koordinaten eines weiteren Punktes an.	
65	72 km/h = ? m/s	
66	Nenne einen Richtungsvektor der x_1x_3–Ebene, der möglichst viele von null verschiedene Koordinaten besitzt.	
67	Zu welcher Ebene verläuft z=2 senkrecht?	
68	Wie nennt man den Schnitt von x_1x_2–Ebene und x_1x_3–Ebene?	
69	Wodurch kann man den SV einer Ebene ersetzen, ohne dass sich die Ebene ändert?	
70	Ein Eckpunkt eines achsenparallelen Quaders ist P(1|1|1), der von P am weitesten entfernte Punkt ist Q(5|8|5). Wie lang ist eine Raumdiagonale des Quaders?	
71	Wann verlaufen die Geraden $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ und $h: \vec{x} = \overrightarrow{OC} + t \cdot \overrightarrow{CD}$ parallel?	
72	Berechne a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$	
73	Wie löst man ein LGS mit 2 Gleichungen und 3 Variablen?	
74	Begründe, ob der Punkt P(–2|3|4) auf der Ebene E: x–2y+z= 4 liegt.	
75	Wie findet man zu einem Vektor $\vec{a}$ den zugehörigen Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$? Wie findet man zu einem Vektor $\vec{a}$ den Vektor $\vec{c}$, der bei gleicher Richtung und Orientierung die Länge x hat ?	
76	Wie berechnet man die Geschwindigkeit v eines Flugzeuges, dessen Flugbahn durch $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{u}$ beschrieben wird?	
77	Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind durch zwei Pfeile mit gemeinsamem Fußpunkt veranschaulicht. Wie verläuft ein Pfeil zum Vektor $\vec{a} - \vec{b}$?	
79	Wie weit ist die Ebene E: 4x+4y+7z= 36 vom Ursprung entfernt?	

Lösungen

1.	Schnitt, windschief, echt parallel oder identisch	
2.	Man setzt Ebene und Gerade gleich (ggf. Parameter umbenennen) und löst das LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten.	
3.	Hat das Gleichungssystem keine Lösung, sind Ebene und Gerade echt parallel; bei genau einer Lösung gibt es einen Schnittpunkt mit diesen Koordinaten; bei unendlich vielen Lösungen liegt die Gerade in der Ebene.	
4.	Man benutzt den RV der Geraden als NV und berechnet E: $\vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{OP}$.	
6	Man zieht die Wurzel aus der Summe der Quadrate der Koordinaten: $\left\|\vec{v}\right\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$ im IR^3 bzw. $\left\|\vec{v}\right\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$ im IR^2	
7.	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (Parallelogramm), $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ (Rechteck), $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{AD}\right\|$ (Quadrat)	
8.	Das Skalarprodukt der Vektoren muss den Wert 0 haben.	
9.	Man bildet die PF der Ebene $\vec{x}=\overrightarrow{OA}+r\cdot\overrightarrow{AB}+s\cdot\overrightarrow{AD}$ und macht die Punktprobe für P. Wenn sich für r und s Werte zwischen 0 und 1 ergeben, liegt P im Parallelogramm, sonst nicht.	
10.	(z. B.) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ müssen kollinear sein. (oder: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=0$)	
11.	Man bildet aus drei der Punkte eine Ebenengleichung und zeigt, dass der vierte Punkt diese Gleichung ebenfalls erfüllt. (Sollten die drei Punkte auf einer Geraden liegen, liegen die vier auf jeden Fall in einer Ebene.)	
12.	Man zeigt, dass das Skalarprodukt des Richtungsvektors der Geraden mit jedem der beiden Richtungsvektoren der Ebene den Wert 0 hat.	
13.	Man zeigt, dass die Eckpunkte in einer Ebene liegen und dass es zwei Paare von nebeneinander liegenden, gleich langen Seiten gibt.	
14.	Man zeigt, dass $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ gilt [oder dass $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ gilt]	
15.	$S_X(3\|0\|0)$, $S_Y(0\|-1{,}5\|0)$ und $S_Z(0\|0\|6)$	
16.	$V=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h$, wobei G die Fläche des Quadrats und h die Pyramidenhöhe ist.	
17.	E: $\vec{n}\cdot\vec{x}=c$; einen NV $\vec{n}$ erhält man als Kreuzprodukt der Richtungsvektoren; c ergibt sich als SP des NV mit dem SV der Ebene.	
18.	Man bildet die drei Seitenvektoren des Dreiecks und zeigt, dass zwei von ihnen die gleiche Länge haben.	
19.	Man schreibt die Gerade als variablen Punkt F, bildet den variablen Vektor $\overrightarrow{PF}$, löst die Gleichung $\overrightarrow{PF}\cdot\vec{u}=0$ nach t auf und setzt dieses t in $\left\|\overrightarrow{PF}\right\|$ ein.	
20.	Man untersucht die Lage der Geraden zueinander. Bei sich schneidenden Geraden vergleicht man, ob die Flugzeuge zum gleichen Zeitpunkt den Schnittpunkt erreichen. Bei windschiefen Geraden bestimmt man den Abstand der Flugzeuge.	

21.	Man bildet jeweils das arithmetische Mittel der Koordinaten: $\overrightarrow{OM_{AB}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$	
22.	Man zeigt, dass die Richtungsvektoren kollinear sind und dass der SV der einen Geraden die Gleichung der anderen Geraden erfüllt.	
23.	Man schneidet die erste Gerade mit der zweiten und das Schnittgebilde (i. A. eine Schnittgerade) mit der dritten Ebene. Alternative: man löst das LGS aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten (mit Einsetzungs- oder Additionsverfahren).	
24.	Wenn die Ebenengleichungen äquivalent sind, sind die Ebenen identisch. Sind nur die NV kollinear, sind die Ebenen echt parallel. Ansonsten schneiden sie sich in einer Schnittgeraden.	
25.	Ist S die Pyramidenspitze und M der Mittelpunkt der Grundfläche, so muss $\overrightarrow{MS}$ ein NV der Ebene sein, in der die Grundfläche liegt.	
26.	Man ergänzt zweimal die beiden Ebenengleichungen durch eine „Wahl" wie z.B. x=0 und x=1, ermittelt aus den 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten jeweils den Lösungspunkt und bildet die Gerade durch die beiden Punkte.	
28.	Man setzt in der Koordinatenform x=z=0 und berechnet y.	
29.	E: $\vec{n} \cdot \vec{x} = c$ Es muss $\lvert\vec{n}\rvert = 1$ (Einheitsnormalenvektor) und c $\geq$0 sein.	
30.	Schnittpunkt F der Lotgeraden durch P mit E und dann $\lvert\overrightarrow{PF}\rvert$ berechnen. oder: Formel d(P,E)= $\frac{1}{\lvert\vec{n}\rvert}\lvert\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} - c\rvert$	
31.	Produkt der Längen der Vektoren, falls die Vektoren gleich orientiert sind, sonst negatives Produkt.	
33.	Sei S' die Spiegelung von S an ABC. Die Punkte liegen auf den beiden Ebenen parallel zu ABC durch S und S'.	
35.	Ebene parallel zur yz–Ebene durch x=2 auf der x–Achse.	
37.	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}_{\vec{a}}\rvert$ Dabei ist $\vec{b}_{\vec{a}}$ die senkrechte Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$. Falls die Vektoren einen Winkel größer als 90° einschließen, muss man noch mit (–1) multiplizieren.	
40	Die Ebene verläuft parallel zur z–Achse/senkrecht zur xy–Ebene, (durch den Ursprung,) durch die 1. Winkelhalbierende der xy–Ebene.	
41.	Die Geraden sind nicht parallel (RV nicht kollinear) und es gibt keinen Schnittpunkt.	
42.	P'(1|8|3)	
43.	Man setzt $\overrightarrow{OF}$ variabel an, $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + t_F \cdot \vec{u}$, bildet den Vektor $\overrightarrow{FP}$ = $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OF} + t_F \cdot \vec{u}$, löst die Gleichung $\overrightarrow{FP} \cdot \vec{u}$=0 nach t_F auf und setzt t_F in die Gerade ein.	
44.	$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix} = = \begin{pmatrix}2\cdot4-3\cdot2\\-(1\cdot4-3\cdot(-1))\\1\cdot2-2\cdot(-1))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-7\\4\end{pmatrix}$	
45-47	45. 1·(–1)+2·2+3·4 =**15** 46. $\sqrt{8^2+4^2+1^2} = \sqrt{81} = 9$ 47. x + 2y + z = 1	
48.	$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PQ} + s \cdot \overrightarrow{PR}$	
49.	z=0 ist die xy-Ebene („Bodenebene"), zu der die z-Achse senkrecht verläuft.	

	$\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$	
50.	Wenn ihre Richtungsvektoren kollinear sind.	
52-54	52. $\sqrt{1^2+2^2+2^2}$ =9 53. Raute 54. Quadrat	
55	A, B und C liegen auf einer Geraden.	
56	$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{pmatrix}$	
57	A= 0,5·e·f (e und f sind die Längen der Diagonalen.) A = 0,5·6cm · 8 cm =24 cm^2	
58-60	58. M(2|3) 59a) Rechteck b) Trapez c) Raute 60. Sie sind kollinear.	
61-63	61. $S(0\|0\|0)$ 62. echt parallel 63. 4	
64	(1|0|0); (1|2|0); (0|2|0); (0|0|3); (1|0|3); (0|2|3)	
65	72 km/h = 72:3,6 m/s = 20 m/s	
66	Der Vektor mit den Komponenten x_1=0, x_2=1 und x_3=0	
67	Zu jeder Ebene E, die senkrecht zur xy–Ebene / parallel zur z-Achse verläuft. E: ax+by = c; a, b, c ε IR; a $\neq$0 v b $\neq$0	
68-69	x_1–Achse 69. Durch den Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene.	
70-71	70. d = $\|\overrightarrow{PQ}\|=9$ 71. Wenn die RV $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ kollinear sind-.	
72	a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\text{x}\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-7\\4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$ = 15	
73	Man löst das LGS aus 2 der 3 Gleichungen und kontrolliert die 3. Gleichung.	
74-75	74. –2–2·3+4·1= –4 $\Rightarrow$ P $\notin$ E 75. $\overrightarrow{a_0}=\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$; $\vec{c}=x\cdot\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ = $x\cdot\overrightarrow{a_0}$	
76	v = $\|\vec{u}\|\frac{LE}{ZE}$ (LE Längeneinheit für die Koordinaten; ZE= Zeiteinheit für t.	
77	Der Pfeil verläuft von der Spitze von $\vec{b}$ zur Spitze von $\vec{a}$. ($\vec{a}-\vec{b}=-\vec{b}+\vec{a}$)	
79	E: $\frac{4}{9}x+\frac{4}{9}y+\frac{7}{9}z=4$ (HNF); Der Abstand beträgt 4 LE.	