Analytische Geometrie
Übungsaufgaben 2 Gesamtes Stoffgebiet

Pflichtteil (ohne Formelsammlung und ohne GTR):

P1:

a) Prüfe, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist: A(3/7/2), B(-1/5/1), C(2/3/0)

b) Prüfe, ob das Dreieck ABC rechtwinklig ist: A(5/1/0), B(1/5/2), C(-1/1/6)

P2:

Gegeben sind die Punkte A(4/2/3), B(1/8/5) und C(-2/1/-3).

a) Bestimme den Punkt D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.
b) Bestimme den Punkt D* so, dass das Viereck ABD*C ein Parallelogramm ist.
c) Bestimme den Punkt D' so, dass das Viereck AD'BC ein Parallelogramm ist.

P3:

Für welchen Wert von a sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$ linear abhängig ?

P4:

Löse die linearen Gleichungssysteme. Deuten die Lösungen jeweils geometrisch.

a) $\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 &= 2 \\ 2x_1 - 9x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + x_3 &= 9 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

P5:

Begründe, dass die Gerade g: $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$

parallel zur Verbindungsgeraden h der Punkte P(2/-1/3) und Q(0/3/1) ist.
Gib eine Gleichung für die Mittelparallele von g und h an.

P6:

Beschreibe, welche unterschiedlichen Lagen zwei verschiedene Geraden g und h im Raum zueinander haben können.
Erläutere die einzelnen Fälle jeweils durch selbst gewählte Beispiele.

P7:

Die Punkte O(0/0/0), P(3/0/0), Q(0/5/0) und R(0/0/3) sind die Eckpunkte eines Quaders.
Stelle den Quader in einem Koordinatensystem dar und gib die Koordinaten der übrigen Quaderecken an.
Die Ebene E: $12x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 60$ schneidet den Quader in einer Fläche. Zeichne diese Schnittfläche in die Figur ein. Beschreibe kurz deine Vorgehensweise.

P8:
Welche Punkte der x_3 – Achse haben von der Ebene E: $2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$ den Abstand 1 ?

Wahlteil (mit Formelsammlung und mit GTR):

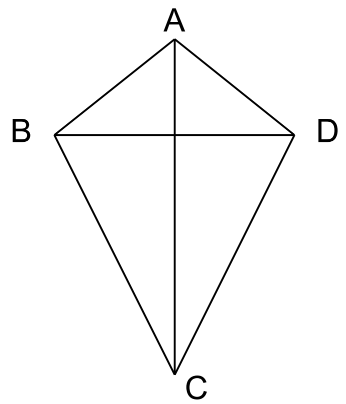
W1:

a) Durch die Punkte A(0/0/0), B(10/0/0), C(10/6/0), D(0/8/0), E(0/0/10), F(10/0/11), G(10/6/8) und H(0/8/6) sind die Eckpunkte einer Hütte mit Pultdach gegeben (1 LE = 1 m).
Zeichne ein Schrägbild der Hütte in ein geeignetes Koordinatensystem.

b) Zum Anbringen von Solarzellen sollte die Dachneigung bezüglich der x_1x_2-Ebene mindestens 25° betragen. Prüfe, ob dieser Wert eingehalten wird und berechne die mögliche Solarzellenfläche, wenn 80% der Dachfläche mit Solarzellen bestückt werden.

Für a>0 verläuft vom Punkt P(20/10/a) zum Punkt Q(-5/5/a) eine geradelinige Stromleitung.
Bestimme a so, dass die Stromleitung von der Dachfläche einen Abstand von mindestens 5m hat.

c) Zeige, dass in einem ebenen Drachen ABCD die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.



Analytische Geometrie
Übungsaufgaben 2 Gesamtes Stoffgebiet
Musterlösungen

P1:

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$ $\qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$; zwei Seiten sind gleich lang, es st gleichschenklig.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Es gilt $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = 8 - 16 + 8 = 0$, also liegt ein rechtwinkliges Dreieck vor. Der 90°-Winkel befindet sich in B.

P2:

a) Für D(x/y/z) soll gelten: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-x \\ 1-y \\ -3-z \end{pmatrix}$ und daraus folgt D(1/-5/-5).

b) Für D*(x/y/z) soll gelten: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD^*} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ z+3 \end{pmatrix}$ und daraus folgt D*(-5/7/-1).

c) Für D'(x/y/z) soll gelten: $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-4 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ und daraus folgt D'(7/9/11).

P3:

Die Vektoren sind linear unabhängig, wenn das Gleichungssystem

$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als einzige Lösung die Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ besitzt.

Gibt es unendlich viele Lösungen, sind die Vektoren linear abhängig.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3-a & 0 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem besitzt für a = 3 unendliche viele Lösungen, da aufgrund der dann entstehenden Nullzeile in der letzten Zeile die letzte Zeile entfällt und dann nur noch 2 Gleichungen mit 3 Variablen übrig bleiben. Für a = 3 sind die Vektoren linear abhängig.

P4:

a) Umschreiben des Gleichungssystems in Matrixschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & -9 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 1 & 15 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & 39 \end{array}\right)$$

$13x_3 = 39 \Rightarrow x_3 = 3$

$-1x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow -x_2 + 3 = 2 \Rightarrow x_2 = 1$

$-1x_1 + 4x_2 = 2 \Rightarrow -1x_1 + 4 = 2 \Rightarrow x_1 = 2$ also Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{ (2/1/3) \}$

Geometrische Deutung:
Jede Zeile des Gleichungssystems stellt anschaulich die Koordinatengleichung einer Ebene dar. Die Lösung des Gleichungssystems bedeutet einen Schnitt dieser drei Ebenen.
Die Lösung bedeutet, dass die drei Ebenen sich in genau einem Punkt S(2/1/3) schneiden.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 13 & -5 & -3 \end{array}\right)$

Das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen, da die Anzahl der Variablen größer ist als die Anzahl der Gleichungen.

Setze $x_3 = 13t$ mit $t \in \mathbb{R}$

$13x_2 - 5 \cdot 13t = -3 \Rightarrow 13x_2 = -3 + 65t \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{13} + 5t$

$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow 2x_1 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{13} + 5t\right) + 13t = 1 \Rightarrow 2x_1 + \frac{9}{13} - 2t = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{13} + t$

also Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{ \left(\frac{2}{13} + t / -\frac{3}{13} + 5t / 13t\right) ;\ t \in \mathbb{R} \}$

Die Lösungsmenge kann auch als Geradengleichung geschrieben werden:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{13} \\ -\frac{3}{13} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Geometrische Deutung:
Jede Zeile des Gleichungssystems stellt anschaulich die Koordinatengleichung einer Ebene dar. Die Lösung des Gleichungssystems bedeutet einen Schnitt der zwei Ebenen.
Die Lösung bedeutet, dass die zwei Ebenen die gemeinsame Schnittgerade g besitzen.

P5:

Geradengleichung von h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

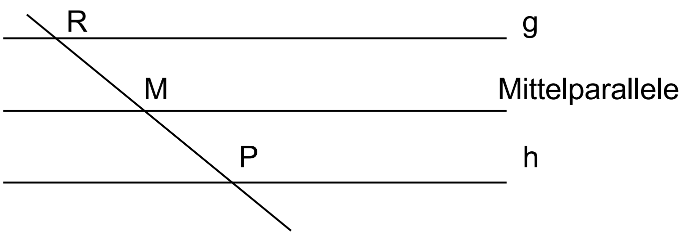
Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ von g ist ein Vielfaches des Richtungsvektors $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ der Geraden g. Folglich sind die Geraden entweder echt parallel oder identisch.

Nun wird geprüft, ob der Punkt P(2/-1/3) von h auch auf g liegt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus der 1.Zeile ergibt sich s = 1, aus der 3.Zeile s = 3. Aufgrund des Widerspruches liegt P nicht auf g, folglich sind die Geraden echt parallel.

Die Mittelparallele von g und h besitzt den gleichen Richtungsvektor wie g (oder einen Vielfachen davon).



Nun wird noch ein Punkt der Mittelparallelen benötigt.
Hierzu werden zwei beliebige Punkte auf g (z.B. R(0/0/0)) und h (z.B. P(2/-1/3)) gewählt.
Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PR}$ liegt auf der Mittelparallele, wie die Skizze zeigt.

In diesem Fall wäre M(1/-0,5/1,5).

Also gilt für die Gleichung der Mittelparallele: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

P6:
Zwei Geraden g und h können vier verschiedene Lagen zueinander besitzen:

1. identisch:

Beispiel: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$

Begründung: Der Punkt P(1/2/3) von g liegt auch auf h und Richtungsvektoren sind linear abhängig (Vielfache).

2. echt parallel:

Beispiel: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$

Begründung: Der Punkt P(1/2/3) von g liegt nicht auf h und Richtungsvektoren sind linear abhängig (Vielfache).

3. sich schneidend:

Beispiel: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Begründung: Der Punkt P(1/2/3) liegt auf und auf h (also gemeinsamer Punkt) die Richtungsvektoren sind jedoch linear unabhängig, somit sind die Geraden nicht parallel.

4. windschief:

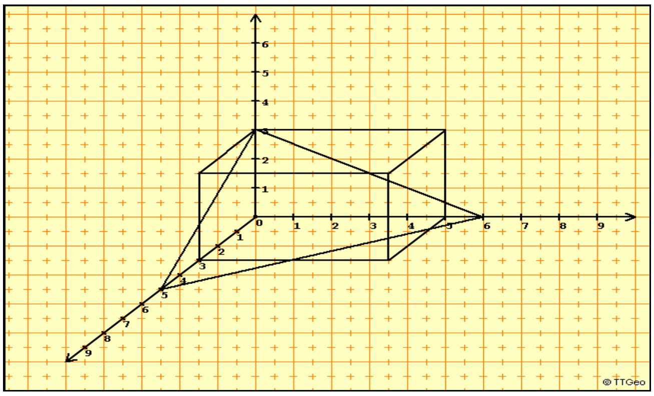
Beispiel: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

Begründung: Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig (also nicht parallel) und beim Schnitt der Geraden ergibt sich ein Widerspruch, also schneiden sich die Geraden nicht.

P7:
Die übrigen Quaderecken haben die Koordinaten S(3/5/0), T(0/5/3), U(3/0/3), V(3/5/3).

Die Ebene E: $12x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 60$ schneidet den Quader in einer Fläche. Zeichne diese Schnittfläche in die Figur ein. Beschreibe kurz deine Vorgehensweise.
Die Ebene E schneidet die Koordinatenachsen in folgenden Punkten:
$S_1(5/0/0)$ und $S_2(0/6/0)$ und $S_3(0/0/3)$.
Die Verbindungsstrecken dieser Punkte sind die so genannten Spurgeraden der Ebene.

Bei der Schnittfigur des Quaders mit der Ebene handelt es sich um ein Fünfeck.



P8:

Ein Punkt der x_3 – Achse hat die Koordinate P(0/0/s).

Es handelt sich dabei um ein Abstandsproblem Punkt – Ebene, weshalb die Hesse'sche Normalenform angewandt wird.

HNF von E: $\frac{2x_1 - x_2 + 2x_3 - 1}{3} = 0$

Einsetzen von P: $d(P,E) = \left|\frac{2s-1}{3}\right| = 1$ (Wichtig ist hier das Betragszeichen !!)

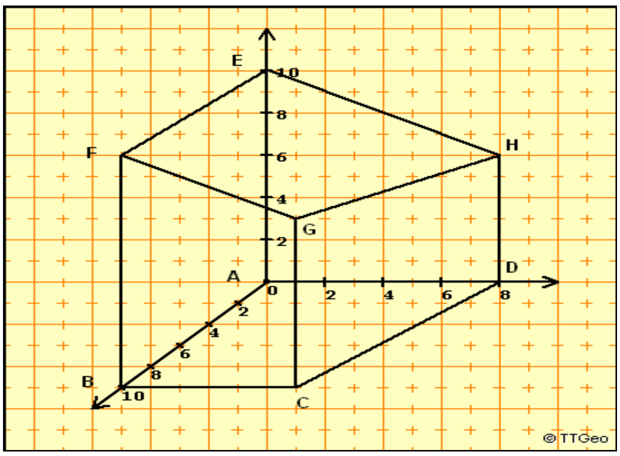
Diese Betragsgleichung muss nun gelöst werden. Es ergeben sich 2 Fälle:

1.Fall: $\frac{2s-1}{3} = 1 \Rightarrow s = 2$ also P(0/0/2).

2.Fall $\frac{2s-1}{3} = -1 \Rightarrow s = -1$ also P(0/0/-1).

W1:

a)



Prüfung, ob die Punkte E,F,G,H in einer Ebene liegen:

Ebenengleichung durch E,F,G: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Kontrolle, ob H(0/8/6) auf Ebene E liegt: $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

aus der 2.Zeile: $8 = 6s \Rightarrow s = \frac{4}{3}$

aus der 1.Zeile: $0 = 10r + 10s \Rightarrow 0 = 10r + \frac{40}{3} \Rightarrow r = -\frac{4}{3}$

eingesetzt in 3.Zeile: $6 = 10 + r - 2s \Rightarrow 6 = 10 - \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow 6 = 6$ wahre Aussage

Also liegt H auf E und damit liegen alle 4 Punkte E,F,G,H in einer Ebene.

Hinweis: Alternativ hierzu hätte man auch prüfen können, ob die Vektoren $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EG}$ und $\overrightarrow{EH}$ linear abhängig sind.

b) Berechnung des Schnittwinkels zwischen der Ebene E und der $x_1 - x_2$-Ebene:

Normalenvektor der $x_1 - x_2$-Ebene (Koordinatengleichung $x_3 = 0$): $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor $\overrightarrow{n_2}$ der Ebene E: $\overrightarrow{n_2} \bullet \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 10n_1 + n_3 = 0 \quad (1)$

$$\overrightarrow{n_2} \bullet \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 10n_1 + 6n_2 - 2n_3 = 0 \quad (2)$$

Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen:

Setze $n_1 = 1$. Damit folgt $n_3 = -10$ und $n_2 = -5$. Also $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Schnittwinkel: $\cos\alpha = \dfrac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{126}} = \dfrac{10}{\sqrt{126}} \Rightarrow \alpha = 27{,}02°$

Somit wird die geforderte Dachneigung von mehr als 25° eingehalten.

Fläche des Vierecks EFGH:
Zunächst ist zu prüfen, um welche Art von Viereck es sich hier handelt.

Dies geschieht dadurch, dass die Seiten des Vierecks als Vektoren berechnet werden:

Es gilt: $\overrightarrow{EH}=\begin{pmatrix}0\\8\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{HG}=\begin{pmatrix}10\\-2\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{GF}=\begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{FE}=\begin{pmatrix}-10\\0\\-1\end{pmatrix}$

Die Vektoren $\overrightarrow{EH}$ und $\overrightarrow{GF}$ sind Vielfache, also sind diese parallel.
Die Vektoren $\overrightarrow{HG}$ und $\overrightarrow{FE}$ sind nicht Vielfache und somit auch nicht parallel.
Da es sich somit um ein Viereck mit einem parallelen Seitenpaar handelt, ist es ein Trapez.

Dachfläche = $A_{Trapez}=\dfrac{\overline{EH}+\overline{GF}}{2}\cdot h_{Trapez}$

Es gilt: $\overline{EH}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}$ und $\overline{GF}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}$

Die Höhe des Trapezes entspricht dem Abstand der parallelen Geraden durch (EH) und (GF).
Der Abstand zweier paralleler Geraden entspricht dem Abstand eines beliebigen Punktes der einen Geraden von der anderen Geraden.
Somit wird der Abstand des Punktes H(0/8/6) von der Geraden (GF) berechnet.

Gerade durch (GF): $g_{GF}:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\6\\8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix}$

Um den Abstand von H(0/8/6) auszurechnen, wird eine Hilfsebene K benötigt.
Die Hilfsebene K steht senkrecht zur Geraden und enthält den Punkt H.
(Der Richtungsvektor der Geraden entspricht dem Normalenvektor der Ebene)

$K:\ -6x_2+3x_3=-30$ (-30 erhält man durch Einsetzen von H in die Ebene)

Schnittpunkt von K mit der Geraden:

$-6(6-6t)+3(8+3t)=-30 \Rightarrow 45t=-18 \Rightarrow t=-\frac{2}{5}$ und somit $S(10/\frac{42}{5}/\frac{34}{5})$.

$$h_{Trapez}=\overline{SH}=\left|\overrightarrow{SH}\right|=\left|\begin{pmatrix}-10\\-\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}\right|=\sqrt{100+\frac{4}{25}+\frac{16}{25}}=10{,}04\text{ m}$$

$$A_{Trapez}=\frac{\sqrt{80}+\sqrt{45}}{2}\cdot 10{,}04=78{,}57\text{ m²}$$

80% der Dachfläche = $0{,}8\cdot 78{,}57=62{,}86$ m²

Geradengleichung der Stromleitung: $\vec{x}=\begin{pmatrix}20\\10\\a\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}25\\5\\0\end{pmatrix}$

Ein allgemeiner Punkt auf der Stromleitung lautet $L(20+25r/10+5r/a)$.
Dieser Punkt L soll von der Dachfläche (Ebene E) einen Abstand von mindestens 5 Metern besitzen, also $d(L,E)\geq 5$.

Für die Abstandsberechnung benötigt man die Hesse'sche Normalenform (HNF)

Die Koordinatengleichung von E lautet:
$E:\ x_1 - 5x_2 - 10x_3 = -100$ (Normalenvektor wurde bereits ermittelt, -100 erhält man durch Einsetzen eines beliebigen Ebenenpunktes).

$x_1 - 5x_2 - 10x_3 + 100 = 0 \Rightarrow -x_1 + 5x_2 + 10x_3 - 100 = 0$

HNF von E: $\dfrac{-x_1 + 5x_2 + 10x_3 - 100}{\sqrt{1 + 25 + 100}} = 0$

$d(L,E) = \left| \dfrac{-(20 + 25r) + 5(10 + 5r) + 10a - 100}{\sqrt{126}} \right| \geq 5$

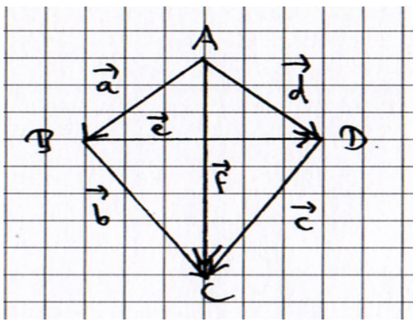
$\Rightarrow \left| \dfrac{10a - 70}{\sqrt{126}} \right| \geq 5$

1.Fall: $\dfrac{10a - 70}{\sqrt{126}} \geq 5 \Rightarrow 10a \geq 5\sqrt{126} + 70 \Rightarrow a \geq 12{,}61$

2.Fall: $\dfrac{10a - 70}{\sqrt{126}} \leq -5 \Rightarrow 10a \leq -5\sqrt{126} + 70 \Rightarrow a \leq 1{,}39$

Da die Stromleitung oberhalb der Dachfläche verläuft und a den x_3-Wert der Punkte angibt, kommt nur der Fall $a \geq 12{,}61$ in Frage.

c)



Es soll gezeigt werden, dass $\vec{e} \cdot \vec{f} = 0$

Voraussetzung: Es gilt $|\vec{a}| = |\vec{d}|$ und $|\vec{b}| = |\vec{c}|$

$|\vec{a}| = |\vec{d}| \Rightarrow |\vec{f} - \vec{b}| = |\vec{f} - \vec{c}| \Rightarrow |\vec{f} - \vec{b}|^2 = |\vec{f} - \vec{c}|^2 \Rightarrow (\vec{f} - \vec{b})^2 = (\vec{f} - \vec{c})^2$ (es gilt $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$)

$\Rightarrow \vec{f}^2 - 2 \cdot \vec{b} \cdot \vec{f} + \vec{b}^2 = \vec{f}^2 - 2 \cdot \vec{f} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2$ (nun gilt $\vec{b}^2 = \vec{c}^2$, da $|\vec{b}| = |\vec{c}|$)

$\Rightarrow -2 \cdot \vec{b} \cdot \vec{f} = -2 \cdot \vec{f} \cdot c \Rightarrow -2 \cdot \vec{f} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \vec{f} \cdot \vec{e} = 0 \Rightarrow \vec{f} \cdot \vec{e} = 0$ was zu zeigen war.