

Abituraufgaben

Berufliche Gymnasien BW

Matrizenrechnung:

Betriebliche Verflechtungen

Leontief-Modell

aus den Jahren 1982 bis 2015

Anwendungsaufgaben mit Matrizen

Mit derzeit 15 Original-Abituraufgaben aus Baden-Württemberg
und sehr ausführlichen Lösungen.

Datei 74111

Stand 14. August 2015

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Da ich die Lizenz besitze, sämtliche Aufgaben der Haupt-Abiturprüfungen aus Baden-Württemberg zu veröffentlichen, baue ich eine große Sammlung auf. Nun findet man solche Aufgaben öfters im Internet. Doch meine ausführlichen Lösungen mit intensiver Besinnung auf die Grundlagen, ist sicher einmalig und hilfreich für Schüler / und auch Lehrer bzw. Referendare. Ich verwende ab und zu CAS-Screenshots, obwohl diese Aufgaben in der Regel nur mit GTR gelöst werden sollen.

Dieser zweite Teil dieser Sammlung beschäftigt sich mit den Prüfungsaufgaben der beruflichen Gymnasien. Folgende Texte gibt es bzw. sind in Planung:

74011	Analysis Teil 1	2000 bis 2009	in Planung
74012	Analysis Teil 2	2010 bis 2015	
74013	Analysis Teil 3	Anwendungsaufgaben 2005 bis 2009	
74014	Analysis Teil 4	Anwendungsaufgaben 2010 bis 2015	
74020	Analysis spezial:	Trigonometrische Funktionen (2002 bis 2015)	
74031	Vektorgeometrie 1	2000 bis 2005	in Planung
74032	Vektorgeometrie 2	2006 bis 2015	
74111	Matrizenrechnung	Betriebliche Verflechtungen Leontief-Modell 1982 bis 2015	
74120	Matrizenrechnung	Bedarfsstabellen, Kostenrechnungen	1982 bis 1999
74121	Matrizenrechnung	Bedarfsstabellen, Kostenrechnungen	2000 bis 2015
74122	Matrizenrechnung spezial	Ausgewählte Anwendungsaufgaben	
74131	Lineare Optimierung	2005 – 2015	
74211	Stochastik Teil 1	2000 bis 2009	in Arbeit
74212	Stochastik Teil 2	2010 bis 2015	

Der dritte Teil befasst sich mit der Fachhochschulreifeprüfung / Berufskolleg

74311	Analysis spezial:	Trigonometrische Funktionen 2002 bis 2010 (bald bis 2015)
74331	Matrizenrechnung	2002 bis 2010 (bald bis 2015)

Der dritte Teil befasst sich mit der Fachhochschulreifeprüfung / Berufskolleg

74321	Analysis spezial:	Trigonometrische Funktionen 2002 bis 2010 (bald bis 2015)
74331	Matrizenrechnung	2002 bis 2010 (bald bis 2015)

Weiteres wird folgen.

Inhalt

			Aufgabe	A+Lösung
1.	Aufgabe 2 M/1	1990	4	20
2.	Aufgabe 2 M/1	1991	5	25
3.	Aufgabe 2 M/1	1993	6	30
4.	Aufgabe 2 LA/1	1993	7	33
5.	Aufgabe 2 M/1	1994	8	37
6.	Aufgabe 2 B/1	2005	9	39
7.	Aufgabe 2 B/2	2005	10	43
8.	Aufgabe 2 – 1	2006	11	46
9.	Aufgabe 2 – 2	2007	12	52
10.	Aufgabe 2 – 1	2008	13	55
11.	Aufgabe 4 – 2	2010	14	59
12.	Aufgabe 4 – 1	2011	15	63
13.	Aufgabe 4 – 1	2012	16	68
14.	Aufgabe 4 – 2	2013	17	72
15.	Aufgabe 4 – 1	2014	18	76
		2015	keine Aufgabe dieses Typs	

Zuerst alle Aufgabenblätter

1. Aufgabe 2 M/1 - Abitur BG BW 1990

Ein Betrieb stellt in den 4 Zweigwerken Z, A, B und C jeweils ein Produkt her. Die Zweigwerke sind nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten.

Das im Zweigwerk Z hergestellte Produkt wird in den Werken A, B und C zur Produktion benötigt, wird aber grundsätzlich nicht an den Markt geliefert. Im vergangenen Produktionszeitraum belieferten sich die Zweigwerke gegenseitig und den Markt nach folgender Tabelle.

	Z	A	B	C	Markt
Z	0	24	18	20	0
A	0	12	6	0	6
B	0	6	0	10	14
C	0	0	12	30	8

- a) Geben Sie die Inputmatrix \mathbf{A} an.
- b) Berechnen Sie die zum Produktionsvektor \vec{x} mit $\vec{x}^T = (z \ 26 \ 30 \ 80)$ die Marktabgabe \vec{y} mit $\vec{y}^T = (0 \ y_2 \ y_3 \ y_4)$ und die vom Zweigwerk Z produzierte Menge.
- c) Weisen Sie nach, dass $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14 & 42 & 28 & 28 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 20 & 10 \\ 0 & 10 & 20 & 45 \end{pmatrix}$ ist.
- d) Umfragen haben ergeben, dass im kommenden Produktionszeitraum 13 Stück von A, 16 Stück von B und 4 Stück von C am Markt verkauft werden können. Berechnen Sie dazu den Produktionsvektor.
- e) Bei einem neuen Auftrag sollen A und C je 20 Stück an den Markt liefern. Alle Zweigwerke produzieren nur in ganzen Stückzahlen. Bestimmen Sie den Produktionsvektor so, dass dabei Zweigwerk B möglichst wenig an den Markt liefern muss. Stellen Sie durch eine Tabelle dar, wie sich bei diesem Produktionsvektor die Zweigwerke gegenseitig beliefern.

2. Aufgabe 2 M/1 – 1991 – BG BW

Drei Zweigwerke A, B und C sind nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten. In der augenblicklichen Produktionsperiode werden folgende Mengen (Angaben in ME) gegenseitig geliefert. und an den Konsum abgegeben:

	A	B	C	Konsumabgabe
A	60	0	50	10
B	24	16	0	40
C	36	32	20	12

- a) Bestimmen Sie die Inputmatrix.
- b) Wie viele ME kann jedes der 3 Zweigwerke an den Konsum abgeben, wenn die

Produktionsmengen der Zweigwerke durch $\bar{x} = \begin{pmatrix} 150 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$ gegeben sind?

Wie viele ME müssen in jedem der 3 Zweigwerke produziert werden, wenn die Konsumabgabe

$\bar{y} = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 5 \end{pmatrix}$ befriedigt werden soll?

- c) Es wird geplant, dass 120 ME im Zweigwerk B und 150 ME im Zweigwerk C produziert werden.

Wie viele ME muss dann Zweigwerk A mindestens und wie viele ME kann Zweigwerk A höchstens produzieren, damit jedes der 3 Zweigwerke wenigstens 15 ME an den Konsum abgeben kann?

- d) Der Produktionsvektor sei

$$\bar{x}_t = \begin{pmatrix} 2t^3 \\ 10t + 30 \\ 6t^2 \end{pmatrix}; \quad t \in [3; 5,5]$$

Für die von den Zweigwerken A und C an den Konsum abgegebenen Güter werden jeweils 10 GE (Geldeinheiten) pro ME, für die Güter von Zweigwerk B 20 GE pro ME verlangt.

Berechnen Sie die Summe der Einnahmen in Abhängigkeit von t.

Welchen größten Wert und welchen kleinsten Wert kann diese Summe annehmen?

3. Aufgabe 2 M/1 – 1993 – WG BW

In der vergangenen Produktionsperiode einer Volkswirtschaft lässt sich der zwischenindustrielle Güterfluss dreier Sektoren nach dem Leontief-Modell in folgender Input-Output-Tabelle darstellen (Angaben in Mengeneinheiten ME):

	A	B	C	Markt
A	10	0	6	4
B	4	4	9	23
C	8	8	6	8

- a) Wie viel ME hat jeder Sektor produziert?
Bestimmen Sie die Inputmatrix A.
- b) Es wird erwartet, dass die Nachfrage nach den Gütern des Sektors A wesentlich steigt. Man beabsichtigt daher, die Produktion im Sektor A um 66 ME zu erhöhen.
Wie viel % dieser Produktionssteigerung könnte dann der Sektor A an den Markt weitergeben, wenn gleichzeitig die Nachfrage nach den Gütern von B und C gleich bleiben würden?
- c) Bestimmen Sie die Leontief-Inverse $(E - A)^{-1}$.
- d) Für die nächste Produktionsperiode wird von folgender Abgabe an den Markt ausgegangen :

$$\bar{y}^T = (55 \quad 50 \quad 40).$$
 Berechnen Sie den Produktionsvektor und die neue Input-Output-Tabelle.
- e) Die Leontief-Inverse und der Marktabgabevektor einer volkswirtschaftlichen Verflechtung nach dem Leontief-Modell sind gegeben:

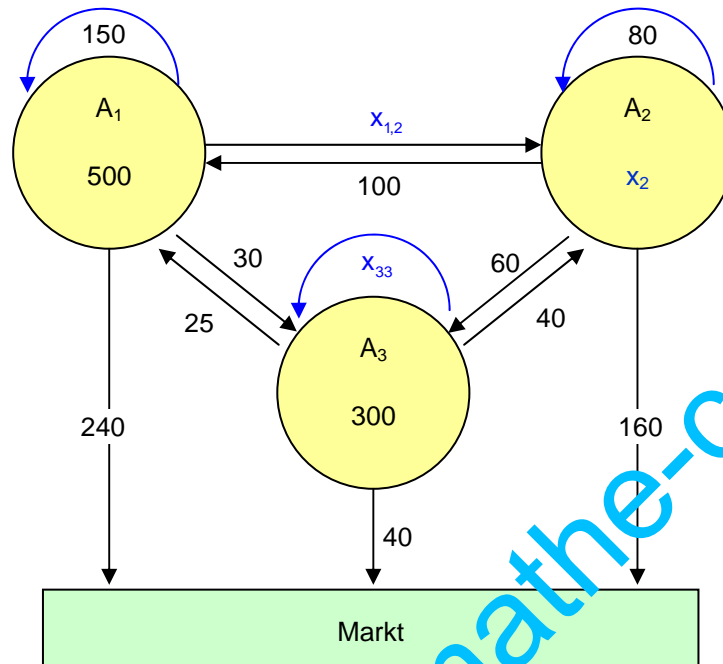
$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 66 & 4 & 18 \\ 28 & 32 & 19 \\ 40 & 10 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\bar{y}_t^T = (13 \quad 115 - 3t^2 \quad 8t) \quad \text{mit } t \in \left[0; \sqrt{\frac{115}{3}} \right].$$

Berechnen Sie die Produktionsmenge von Sektor B für den Fall, dass die Produktionsmenge des Sektors A als auch die des Sektors C maximal ist.

4. Aufgabe 2 LA/1 – 1993 – WG BW

Das folgende Diagramm stellt die Verflechtung dreier volkswirtschaftlicher Sektoren A1, A2 und A3 dar (Angaben in Mengeneinheiten (ME)).



- Bestimmen Sie die dazugehörige Inputmatrix nach dem Leontief-Modell.
- Für den kommenden Produktionszeitraum ist die Produktion $\vec{x} = (600 \ 450 \ 400)^T$ geplant. Berechnen Sie den zugehörigen Marktvektor. Stellen Sie für diesen Fall die Verflechtung in einer Tabelle dar.
- Für einen späteren Produktionszeitraum soll die Abgabe aller drei Sektoren an den Markt gleich groß sein und die Produktion des Sektors A2 600 ME betragen. Berechnen Sie den Marktvektor und den Produktionsvektor.
- Nach einer Umstellung der Produktionsverfahren ist eine neue Inputmatrix A_t gegeben durch

$$A_t = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,14 & 0,1 \\ 0,2 & 0,96 - 0,04t & 0,2 \\ 0,05 & 0,01(t-1) & 0,65 \end{pmatrix}$$

Zur Matrix A_t ist der Marktvektor $\vec{y} = (20 \ 16t \ 60t)^T$ geplant.

Dabei ist t mit $1 \leq t \leq 24$ ein technologiebedingter Parameter.

Für welchen Wert von t ist die Summe der Produktionen aller drei Sektoren minimal?

5. Aufgabe 2 M/1 – 1994 – BG BW

Ein Betrieb besteht aus drei Abteilungen A, B und C. Die Abteilungen sind nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten. Die Inputmatrix dieser Verflechtung ist gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,16 \\ 0,4 & 0 & 0,2 \\ 0,27 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}$$

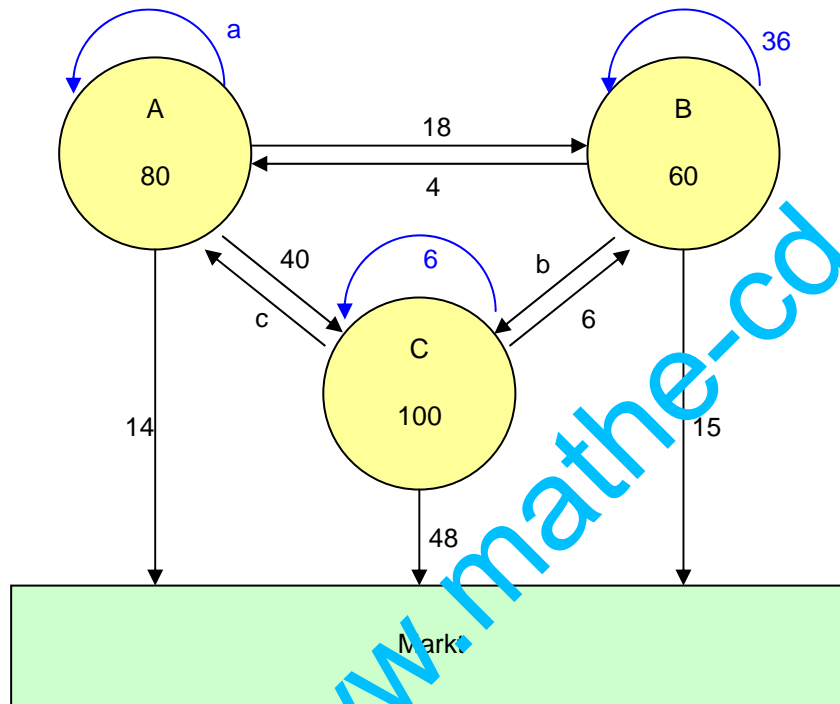
- a) Der derzeitige Produktionsvektor ist $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 900 \\ 1500 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Liefermengen der Abteilungen untereinander und die Liefermengen an den Markt.

- b) Die Abteilungen erhöhen ihre Produktion: Abteilung A um 1/4, Abteilung B um 1/3 und Abteilung C um 2/5. Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich dann die jeweiligen Abgabemengen an den Markt erhöhen.

6. Aufgabe 2 B/1 – 2005 – BG BW

Ein Betrieb besteht aus den drei Zweigwerken A, B und C. Diese sind nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten. Die Lieferungen untereinander, die Marktabgabe sowie die Gesamtproduktion sind in Geldeinheiten (GE) angegeben. Das Diagramm zeigt die Verflechtung:



- a) Berechnen Sie die Inputmatrix.

Wie viel muss jedes Werk produzieren, damit Werk A Waren im Wert von 10 GE, Werk B Waren im Wert von 25 GE und das Werk C Waren im Wert von 40 GE an den Konsum abgeben können?

- b) Zweigwerk A erhöht seine Produktion auf Waren im Wert von 120 GE und die Abgabe an den Konsum auf Waren im Wert von 32 GE. Zweigwerk C liefert Waren im Wert von 64 GE an den Konsum. Wie groß ist die Abgabe von Werk B an den Konsum?

Um wie viel Prozent muss die Produktion der Werke B und C im Vergleich zur ursprünglichen Produktion verändert werden?

- c) In einer Planungsrechnung wird von folgendem Produktionsvektor ausgegangen:

$$\vec{x} = (100t \ 80t \ 120)^T, \quad t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Bestimmen Sie den Konsumvektor in Abhängigkeit von t .

Die Marktabgabe des Werkes C beträgt 56 GE.

Wie groß sind dann die Marktabgaben der beiden anderen Werke?