

**Ziele und Aufgaben  
zum  
Mathematikunterricht  
in der gymnasialen  
Oberstufe**

**Klassen 10 - 12**

Herausgeber: Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur  
Mecklenburg-Vorpommern  
Werderstraße 124  
19055 Schwerin

Autoren: Dr. Wolfgang Guba  
Dr. Ingrid Jagnow  
Viola Mendler  
Elke Pietsch  
Dr. Almut Sachs  
Dr. Christine Sikora  
Prof. Dr. Hans-Dieter Sill

Druck: Druckerei der Universität Rostock

Auflage: 1. Auflage, September 2009

---

## Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	2
Zur Entwicklung und zum Einsatz der Broschüre .....	3
1 Ziele und Aufgaben für die Klasse 10.....	4
1.1 Planungsvorschlag für die Klasse 10 .....	4
1.2 Trigonometrische Berechnungen und Winkelfunktionen .....	5
1.3 Exponential- und Logarithmusfunktionen .....	16
1.4 Körperdarstellungen und Körperberechnungen .....	25
1.5 Stochastik .....	30
1.6 Systematisierung von Funktionen .....	44
2 Ziele und Aufgaben Klasse 11 .....	62
2.1 Planungsvorschlag für die Klasse 11 .....	62
2.2 Zahlenfolgen.....	65
2.3 Grenzwert von Funktionen.....	72
2.4 Stetigkeit von Funktionen .....	75
2.5 Differenzierbarkeit von Funktionen .....	82
2.6 Kurvenuntersuchungen.....	88
2.7 Anwendung der Differenzialrechnung .....	95
2.8 Integralrechnung.....	101
2.9 Die e-Funktion – weiterer Ausbau der Differenzial- und Integralrechnung .....	111
3 Ziele und Aufgaben Klasse 12 .....	118
3.1 Planungsvorschlag für die Klasse 12 .....	118
3.2 Koordinatensysteme und Vektoren .....	120
3.3 Geraden, Ebenen und Kreise.....	128
3.4 Stochastik .....	139

## Vorwort

Nach der erfolgreichen Erarbeitung gemeinsamer Rahmenlehrpläne für die Grundschule haben die Bundesländer Berlin, Brandenburg und Mecklenburg-Vorpommern in einem Vertrag vom 13. September 2004 vereinbart, die Kooperation bei der Erarbeitung von Lehrplänen fortzusetzen und gemeinsame Kerncurricula für die Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe für die Fächer Deutsch, Mathematik, Biologie, Chemie, Physik, Englisch, Französisch, Polnisch, Russisch, Spanisch, Latein, Geografie, Kunst und Gestaltung, Musik, Informatik und Sport zu erarbeiten.

In Mecklenburg-Vorpommern wurden diese Kerncurricula parallel mit der Wiedereinführung des Abiturs nach 12 Schuljahren zum Schuljahr 2006/07 in Kraft gesetzt und lösten die bisherigen Rahmenpläne ab.

Kerncurricula sind auf den Erwerb jener Kompetenzen ausgerichtet, die Schülerinnen und Schüler benötigen, um auf die Herausforderungen in der Wissensgesellschaft vorbereitet zu sein. Kompetenz wird dabei verstanden als Geflecht von Wissen, Können, Verstehen, Handeln, Erfahrung und Motivation. In den Kerncurricula sind Standards beschrieben, die die Schüler bis zum Abitur erreichen sollten.

Mit den Kerncurricula werden notwendige Freiräume für individuelle Lernprozesse geschaffen. Auf diese Weise können Fähigkeiten, Begabungen, Neigungen und Interessen der Schüler sowie regionale und schulspezifische Besonderheiten besser berücksichtigt werden.

Zur Unterstützung der Umsetzung des Kerncurriculums für das Fach Mathematik hat sich an der Universität Rostock eine Arbeitsgruppe konstituiert, deren Arbeit vom bisherigen Landesinstitut für Schule und Ausbildung gefördert wurde. Die Vorschläge für die einzelnen Themen in der Einführungs- und der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe, die jeweils in einer ersten Fassung bereits im Internet unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de) veröffentlicht wurden, werden in dieser Broschüre nach einer Abstimmung mit der Abituraufgabenkommission in einer überarbeiteten Fassung zusammengefasst.

Das Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Mecklenburg-Vorpommern stellt allen Schulen eine Broschüre zur Verfügung. Sie ist unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de) zum Download veröffentlicht.

Ich bedanke mich bei den Autorinnen und Autoren dieser Broschüre, die neben ihrer Unterrichts- bzw. Lehrtätigkeit über 3 Jahre intensiv an diesem Projekt gearbeitet haben.



Henry Tesch  
Minister für Bildung, Wissenschaft und Kultur

## Zur Entwicklung und zum Einsatz der Broschüre

Die in dieser Broschüre angegebenen Ziele und Aufgaben sind das Ergebnis der Arbeitsgruppe „Gymnasiale Oberstufe Mathematik“, die seit Beginn der Schuljahres 2006/07 mit Unterstützung des Landesinstitutes für Schule und Ausbildung Mecklenburg-Vorpommern tätig ist und die aus den Autoren der Broschüre besteht. Die Vorschläge betreffen alle Unterrichtsthemen in den Klassen 10, 11 und 12. Mit den Vorschlägen erfolgt eine Konkretisierung und Strukturierung der Ziele des Kerncurriculums Mathematik für die gymnasiale Oberstufe.

Auf einer gemeinsamen Beratung mit der Abituraufgabenkommission und den Fachberatern für die Gymnasien und Gesamtschulen am 10. Juli 2008 wurden die Beziehungen dieser Ziele zu den Anforderungen im Abitur diskutiert und in folgender Weise vereinbart.

Mit den Zielen auf dem Niveau des **sicheren Wissens und Könnens** sollen die Wissens- und Könnenselemente beschrieben werden, die bei jedem Schüler so ausgebildet sein sollen, dass er sie jederzeit ohne weitere Vorbereitung abrufen kann. Dabei wird vorausgesetzt, dass er in der Regel keine weiteren Hilfsmittel zur Verfügung hat. Damit zielt dieser Bereich der Ziele auf das, was für ein späteres Studium von entscheidender Bedeutung ist, sichere inhaltliche Grundvorstellungen, Grundfertigkeiten und Grundkenntnisse. Die inhaltlichen Vorstellungen und Kenntnisse der Schüler werden im Studium i. d. R. als gegeben vorausgesetzt.

Diese Ziele sind die wesentliche Grundlage für die Anforderungen *im Prüfungsteil A0*.

Das zweite Niveau des **reaktivierbaren Wissens und Könnens** bezieht sich auf das Zielniveau, das nach einer gezielten Vorbereitung auf die Abschlussprüfung erreichbar ist. Dabei sind auch alle im Unterricht zugelassenen Hilfsmittel<sup>1</sup> erlaubt. Bekanntlich ist dieses in der Prüfung erreichte Leistungsniveau nur von kurzer Dauer und muss zu einem späteren Zeitpunkt erneut reaktiviert werden.

Dieses Zielniveau ist die hauptsächliche Grundlage für die in den *Prüfungsteilen A und B* gestellten Anforderungen. Dies betrifft auch das Anforderungsniveau 3 der EPA, da die Anforderungen einer Aufgabe weniger von dem mathematischen Inhalt als vielmehr von dem zum Lösen notwendigen Niveau der Problemlösefähigkeiten abhängen.

Das dritte Zielniveau des **Exemplarischen** soll die Ziele beschreiben, die nicht systematisch behandelt, sondern nur durch „*exemplarisches Lernen*“ erreicht werden sollen. Die Schüler sollten diese mathematischen Inhalte anhand sehr einprägsamer Beispiele erleben, die ihnen auch später durchaus als Episode des Unterrichts im Gedächtnis bleiben. Diese Ziele sind ein Feld, auf dem der Lehrer seinen besonderen Interessen nachgehen kann. Es ist weder möglich noch sinnvoll, alle angegebenen Ziele zu realisieren.

In der Abiturprüfung können in den *Prüfungsteilen A und B* zur Formulierung von weiteren Teilaufgaben auf dem Anforderungsniveau 3 Elemente des exemplarisch vermittelten Wissens und Könnens vorkommen. Diese Anforderungen sollen aber nur etwa 10 % der Gesamtanforderung ausmachen. Weiterhin werden die Aufgaben so formuliert, dass eine Behandlung im Unterricht nicht vorausgesetzt wird und die Schüler alle nötigen Informationen in der Prüfungsaufgabe erhalten, um mit ihrem reaktivierbaren Wissen und Können die Aufgabe lösen zu können.

Wir wünschen allen Kolleginnen und Kollegen viel Erfolg bei der Arbeit mit dem Material!

Die Autoren

Rostock, Juni 2009

---

<sup>1</sup> Wenn ein Ziel nur mit einem CAS erreichbar sein soll, wird dies explizit genannt.

# 1 Ziele und Aufgaben für die Klasse 10

## 1.1 Planungsvorschlag für die Klasse 10

Thema	Std.
<b>Einführung eines CAS-Rechners</b>	<b>4</b>
<b>1 Trigonometrische Berechnungen und Winkelfunktionen</b>	<b>28</b>
Rückblick	2
1.1 Trigonometrische Berechnungen	12
1.2 Winkelfunktionen Periodische Funktionen Die Sinus- und die Kosinusfunktion Das Bogenmaß eines Winkels Die Funktion $f(x) = a \cdot \sin(bx) + c$	14
<b>2 Exponential- und Logarithmusfunktionen</b>	<b>18</b>
Rückblick	2
2.1 Logarithmen und Logarithmengesetze	4
2.2 Exponentialfunktionen	10
2.3 Logarithmusfunktionen	2
<b>3 Körperdarstellung und Körperberechnungen</b>	<b>16</b>
Rückblick	2
3.1 Begriff und Darstellung von Pyramiden und Kegeln	3
3.2 Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden und Kegeln	2
3.3 Begriff, Volumen und Oberflächeninhalt einer Kugel	2
3.4 Zerlegen und Zusammensetzen von Körpern, Pyramiden- und Kegelstümpfe	3
3.5 Anwendungen	4
<b>4 Stochastik</b>	<b>22</b>
Rückblick	2
4.1 Die bedingte Wahrscheinlichkeit	6
4.2 Die Binomialverteilung und Denkweisen der beurteilenden Statistik	14
<b>5 Systematisierung von Funktionen</b>	<b>12</b>
5.1 Der Funktionsbegriff	2
5.2 Merkmale von Funktionen	5
5.3 Funktionen mit Parametern	5
<b>Summe</b>	<b>100</b>

### Bemerkungen:

- In der geplanten Zeit (25 Wochen) sind die Zeiten für Klausuren nicht enthalten.
- Ein GTR bzw. CAS-Rechner sollte in allen Stoffgebieten verwendet werden, wobei der Rechner schrittweise erschlossen werden sollte. Zu Beginn des Schuljahres sollte eine Einführung in die Arbeit mit dem konkreten Rechner erfolgen.
- Das Thema Stochastik sollte im Zusammenhang mit dem Thema Stochastik in Klasse 12 geplant werden. Mit entsprechenden Aufgaben zur Binomialverteilung sollte man bereits in Klasse 10 die Denk- und Arbeitsweisen der beurteilenden Statistik, die dann in Klasse 12 explizit behandelt werden, inhaltlich vorbereiten.
- Das Thema Systematisierung von Funktionen dient der inhaltlichen Vorbereitung der grundlegenden Begriffe und Denkweisen der Analysis in Klasse 11.

## 1.2 Trigonometrische Berechnungen und Winkelfunktionen

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- es Winkel gibt, die kleiner als  $0^\circ$  oder größer als  $360^\circ$  sind,
- Winkel einen positiven oder negativen Drehsinn haben können,
- jeder Winkel darstellbar ist als  $\alpha = \alpha' + k \cdot 360^\circ$  mit  $0^\circ \leq \alpha' \leq 360^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,
- Winkel im Grad- oder Bogenmaß angegeben werden können, wobei  $\pi$  dem Gradmaß  $180^\circ$  und  $2\pi$  dem Gradmaß  $360^\circ$  entspricht,
- nur eine im Bogenmaß beschriftete x-Achse einen Vergleich von Graphen von Winkelfunktionen mit anderen Funktionsgraphen ermöglicht,
- die Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion periodische Funktionen sind und haben Vorstellungen vom Graphen der Sinusfunktion,
- der Sinus, Kosinus und Tangens eines Winkels unter  $90^\circ$  als Verhältnis zweier Seitenlängen im rechtwinkligen Dreieck gebildet werden kann.

Die Schülerinnen und Schüler können

- unterscheiden zwischen Anwendungen der Winkelfunktionen in der Trigonometrie zur Dreiecksberechnung (Gradmaß) und Anwendungen zur Beschreibung periodischer Vorgänge (Bogenmaß).

#### Reaktivierbares Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- $\sin \alpha = \text{Gegenkathete} / \text{Hypotenuse}$ ,
- $\cos \alpha = \text{Ankathete} / \text{Hypotenuse}$ ,
- $\tan \alpha = \text{Gegenkathete} / \text{Ankathete}$ ,
- das Bogenmaß eines Winkels das Verhältnis der zugehörigen Bogenlänge zum Radius und einheitenlos ist, wodurch es im Einheitskreis der Länge des zugehörigen Kreisbogens entspricht,
- die Seitenverhältnisse für den Sinus, Kosinus und Tangens eines Winkels nur in rechtwinkligen Dreiecken und der Sinus- und der Kosinussatz bzw. der Satz zur Flächenberechnung von Dreiecken mithilfe des Sinus eines Winkels in beliebigen Dreiecken gelten,
- der Anstieg des Graphen einer linearen Funktion mit  $m = \tan \alpha$  berechnet werden kann, wobei  $\alpha$  der Winkel zwischen dem positiven Teil der x-Achse und der Geraden ist,
- die Sinusfunktion eine gerade und die Kosinusfunktion eine ungerade Funktion ist.

Die Schülerinnen und Schüler können

- beliebige Winkel im Grad- oder Bogenmaß angeben, insbesondere ganzzahlige Teile und Vielfache von  $\pi$ ,
- Seiten und Winkel in rechtwinkligen Dreiecken berechnen,

- Berechnungen in beliebigen Dreiecken unter Nutzung der Sinus-, Kosinus- oder Flächeninhaltssätze durchführen,
- Sachaufgaben lösen, die Sachverhalte im Raum oder Gelände beschreiben, die überschaubar sind, sich in 2 bis 3 rechtwinklige Dreiecke zerlegen lassen und durch möglichst wenig aufeinander aufbauende Rechenschritte zu lösen sind,
- Die Kosinus- und Tangensfunktion ( $y = \cos x$  oder  $y = \tan x$ ) in Skizzen erkennen sowie aus ihnen die Periode, die Symmetrie, Nullstellen und Extremwerte ablesen,
- eine Sinusfunktion  $y = \sin x$  oder  $y = \sin \alpha$  skizzieren,
- eine Sinusfunktion  $y = a \cdot \sin x + c$  oder  $y = a \cdot \sin \alpha + c$  skizzieren,
- aus Zeichnungen von Funktionen  $y = a \cdot \sin(b \cdot x) + c$  folgende Eigenschaften ablesen: Periode, Nullstellen, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie, Extremstellen und –werte,
- folgende goniometrische Gleichungen oder Gleichungen, die durch einfache äquivalente Umformungen auf diese zurückzuführen sind, lösen:  
 $\sin x = a$ ,  $\sin \alpha = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\cos \alpha = a$ , wobei die Lösungsmenge im Intervall  $-90^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$  bzw.  $-\pi \leq x \leq 2\pi$  angegeben wird und  $\tan \alpha = a$ , wobei die Lösungsmenge im Intervall  $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  angegeben wird.

### Exemplarisches

Die Schülerinnen und Schüler haben an einprägsamen Beispielen erlebt, dass

- man in der Beziehung  $\alpha = \alpha' + k \cdot 360^\circ$  mit  $0^\circ \leq \alpha' \leq 360^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$   $\alpha'$  den „Hauptwert“ und alle anderen Winkel  $\alpha$  „zueinander äquivalente Winkel“ nennt,
- es für Winkelfunktionen Quadrantenbeziehungen gibt (am Beispiel der Sinusfunktion),
- man den Satz  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  herleiten kann,
- Berechnungen in beliebigen geometrischen Figuren ausführbar sind, indem man sie geschickt in Teildreiecke zerlegt,
- der Faktor  $b$  bei der Funktion  $y = \sin(bx)$  die Periodenlänge der Funktion beeinflusst.



## Aufgaben

### 1. Sicheres Wissen und Können

- Gegeben sind folgende Winkel:  $400^\circ$ ;  $-80^\circ$ ;  $650^\circ$ ;  $-900^\circ$ ;  $-630^\circ$ ;  $360^\circ$ 
  - Zeichne den Drehwinkel.
  - Gib die Anzahl der vollen Umdrehungen und die Teilumdrehung in Grad an.
  - Stelle den Winkel dar in der Form  $\alpha = \alpha' + k \cdot 360^\circ$  mit  $0^\circ \leq \alpha' < 360^\circ$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Der Punkt  $P(1; 0)$  ist ein Punkt des Einheitskreises um den Koordinatenursprung. Gib die Koordinaten des Punktes  $P'$  an, auf den der Punkt  $P$  bei einer Drehung um den Winkel  $\varphi$  abgebildet wird.  
 $\varphi = 270^\circ$  ( $-180^\circ$ ;  $630^\circ$ ;  $-270^\circ$ ;  $450^\circ$ ;  $900^\circ$ ;  $-810^\circ$ ;  $540^\circ$ )
- Ergänze die Tabelle so, dass sich in jeder Zeile eiander entsprechende Winklemaße ergeben.

Gradmaß	Bogenmaß
$90^\circ$	
	$\pi$
	$2\pi$
	$\pi/2$
$360^\circ$	

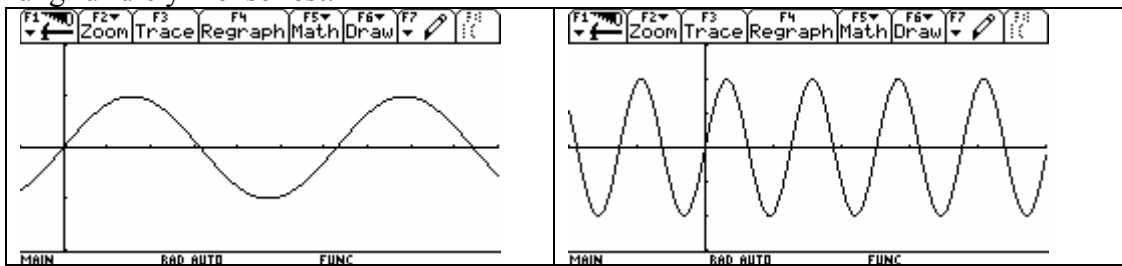
- Beschrifte die x-Achse jeweils unterenaner im Bogenmaß mit Vielfachen von  $\pi$ , im Gradmaß mit Vielfachen von  $180^\circ$  und mit ganzen Zahlen, so dass eine Einheit 1 cm entspricht.



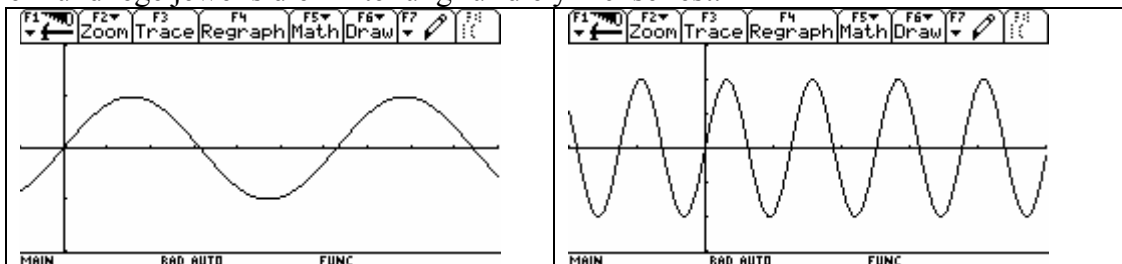
- Zeichne eine x – Achse und beschrifte sie im Intervall  $[-7; 7]$ , so dass eine Einheit 1 cm entspricht. Trage folgende Werte der Vielfachen und Teile von  $\pi$  auf dieser x – Achse ab:  
 $-2\pi$ ;  $-\pi$ ;  $-\pi/2$ ;  $\pi/2$ ;  $\pi$ ;  $2\pi$

6. In den folgenden Abbildungen ist jeweils der Verlauf der Funktion  $f(x) = \sin x$  in einem Intervall dargestellt.

- a) Trage auf der x-Achse  $0, \pi/2, \pi, 3/2\pi, 2\pi$  und  $3\pi$  ein und lege jeweils die Einteilung für die y-Achse fest.



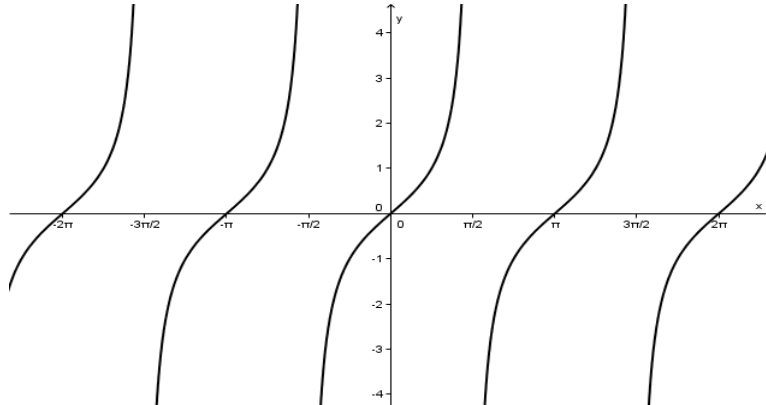
- b) Trage auf der x-Achse  $0^\circ; 90^\circ; 180^\circ; 270^\circ; 360^\circ$  und im 2. Bild auch  $540^\circ$  und  $720^\circ$  ein und lege jeweils die Einteilung für die y-Achse fest.



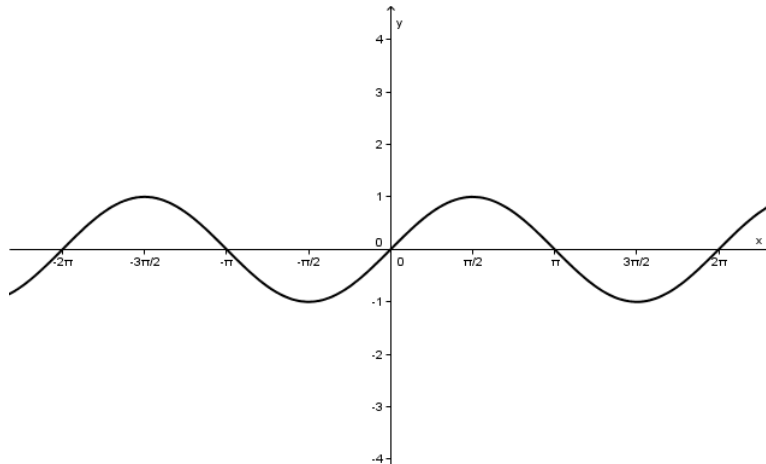
7. a) Ordne den folgenden Ausschnitten aus Graphen die Funktionsgleichungen zu.  
b) Warum können stets nur Ausschnitte aus den Funktionsgraphen dargestellt werden?

A:  $y = \sin x$       B:  $y = \cos x$       C:  $y = \tan x$

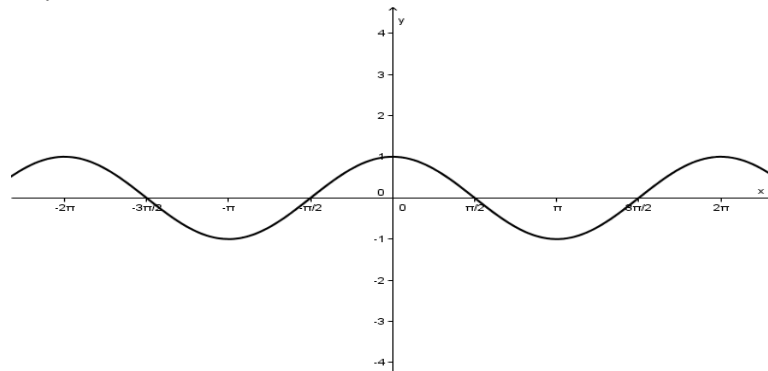
I:



II:

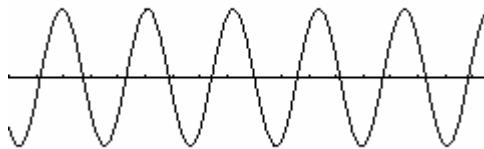
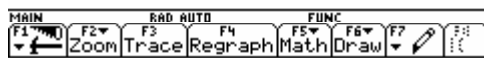
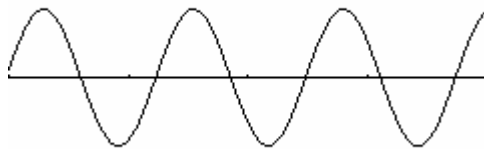
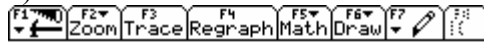


III:



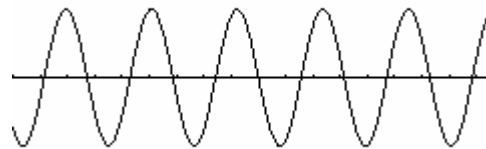
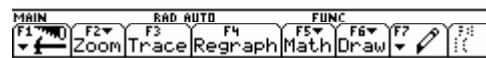
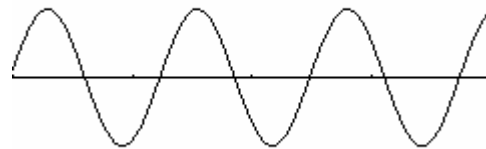
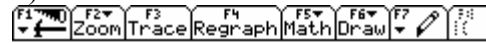
8. Lege für die untenstehenden Graphen den Koordinatenursprung fest und zeichne die y-Achse sowie die Einteilung für die Koordinatenachsen ein, so dass der Graph dargestellt wird.

a) Sinusfunktion



MAIN RAD AUTO FUNC

b) Kosinusfunktion



MAIN RAD AUTO FUNC

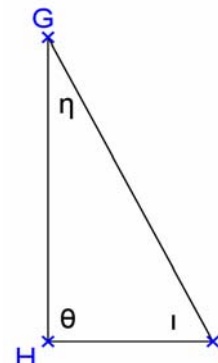
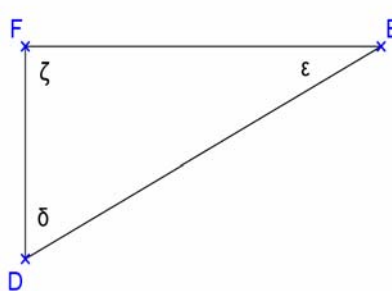
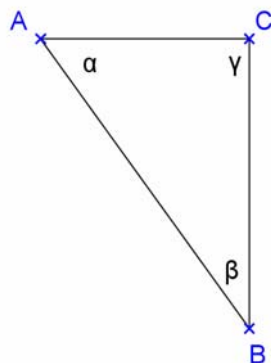
9. Zeichne drei verschiedene Dreiecke jeweils mit den Innenwinkeln von  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$ . Gib Unterschiede und Gemeinsamkeiten dieser drei Dreiecke an.

10. Bei welchen Sachverhalten würdest du den Winkel im Bogenmaß bzw. im Gradmaß angeben?

- (1) Ablesen des Schnittpunktes von 2 Graphen, wobei einer zu einer Sinusfunktion und der andere zu einer linearen Funktion gehört
- (2) Berechnung des Neigungswinkels einer Pyramidenfläche zur Grundfläche
- (3) Beschreibung eines periodischen Prozesses, bei dem die Amplitude exponentiell abnimmt
- (4) Berechnungen im Gelände, z.B. Berechnung der Breite eines Flusses
- (5) Berechnung des Schnittwinkels eines Graphen einer linearen Funktion mit der x-Achse mithilfe ihres Anstiegs
- (6) Graphen einer linearen Funktion mit der x-Achse mithilfe ihres Anstiegs

## 2. Reaktivierbares Wissen und Können

### 11. Gegeben sind folgende Dreiecke



- a) Gib das gesuchte Verhältnis in den gegebenen rechtwinkligen Dreiecken mit Hilfe der entsprechenden Seiten an!

$$\sin \alpha =$$

$$\sin \delta =$$

$$\tan \iota =$$

$$\tan \beta =$$

$$\cos \varepsilon =$$

$$\cos \iota =$$

- b) Gib eine Winkelfunktion in den gegebenen rechtwinkligen Dreiecken mit Hilfe eines beliebigen Winkels zu den gegebenen Seitenverhältnissen an!

$$\frac{a}{c} =$$

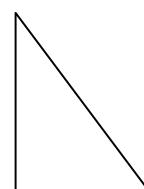
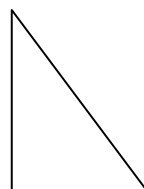
$$\frac{e}{f} =$$

$$\frac{i}{g} =$$

### 12. Versuche, die Seiten und Winkel des rechtwinkligen Dreiecks so bezeichnen, dass gilt:

a)  $\sin \alpha = \frac{x}{z}$  und  $\cos \alpha = \frac{s}{z}$

b)  $\sin \beta = \frac{k}{w}$  und  $\cos \beta = \frac{w}{l}$



13. Berechne jeweils die Länge des Kreisbogens, der zu einem gegebenen Zentriwinkel  $\alpha$  gehört, wenn der Radius des Kreises verändert wird. Bilde das Verhältnis Kreisbogenlänge zum Radius. Was stellst Du fest?

$\alpha = 57,3^\circ$	b	b/r	$\alpha = 90^\circ$	b	b/r
r = 5 cm			r = 5 cm		
r = 10 m			r = 10 m		
r = 2,3 cm			r = 2,3 cm		
r = 3 mm			r = 3 mm		

14. Berechne den Winkel zwischen dem positiven Teil der x-Achse und der Geraden.

a)  $y = x$

b)  $y = 4$

c)  $y = -x$

d)  $y = 4x - 6$

e)  $y = -\frac{1}{4}x + 2$

f)  $y = -4x + 6$

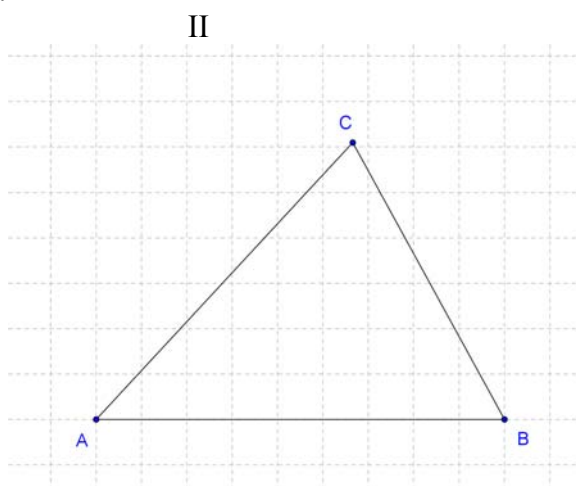
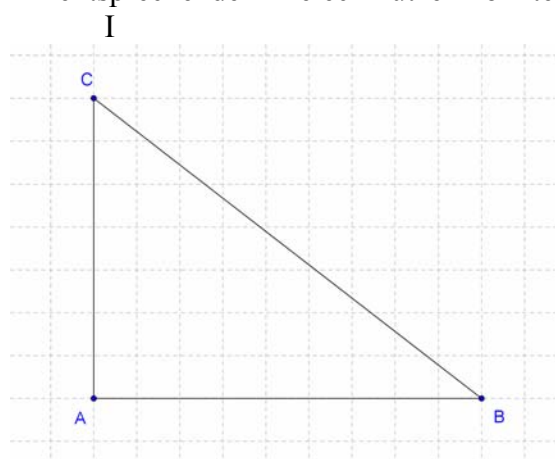
g)  $y = \frac{1}{4}x - 2$

15. Berechne den Anstieg einer linearen Funktion, wenn der Winkel  $\alpha$  zwischen dem positiven Teil der x – Achse und der Geraden gegeben ist.

- $\alpha = 30^\circ$
- $\alpha = 75^\circ$
- $\alpha = 110^\circ$
- $\alpha = 0^\circ$
- $\alpha = 90^\circ$
- $\alpha = 175^\circ$

16. Gegeben sind folgende Dreiecke ABC.

Entscheide jeweils, ob du den Satz für die Berechnung von Seiten oder Winkeln in dem entsprechenden Dreieck nutzen könntest:



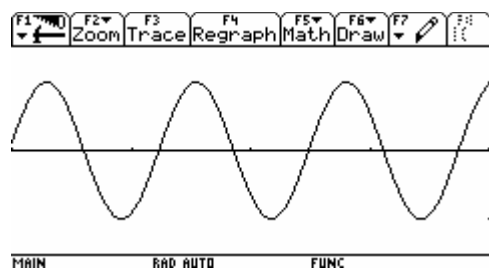
- Sinussatz
- $A = b \cdot c \sin \alpha$
- $A = (b \cdot c) / 2$
- $a^2 = b^2 + c^2$
- $\sin \beta = b / a$
- $\cos \gamma = b / a$
- $\tan \beta = b / c$
- Kosinussatz

17. Welche Beziehungen zwischen Grad- und Bogenmaß sind richtig?

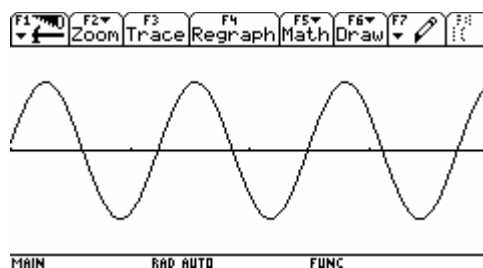
- $360^\circ \triangleq 2\pi$
- $1,047 \triangleq 60^\circ$
- $0,75 \triangleq 270^\circ$
- $45^\circ \triangleq 0,25\pi$

18. Zeichne in die Bilder eine y-Achse ein, so dass der Graph der folgenden Funktion dargestellt wird.

a) gerade Funktion



b) ungerade Funktion



19. Berechne jeweils die fehlenden Stücke der Dreiecke ABC.

- a)  $a = 5,3 \text{ cm}$ ;  $b = 4,5 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 90^\circ$       b)  $c = 6,3 \text{ cm}$ ;  $\beta = 90^\circ$ ;  $\gamma = 75,8^\circ$   
 c)  $b = 48 \text{ cm}$ ;  $c = 64 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 90^\circ$       d)  $b = 4,1 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 12,7^\circ$ ;  $\beta = 90^\circ$

20. Vervollständige die folgende Tabellen:

Winkel $\alpha$ im Gradmaß	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$		$135^\circ$		$210^\circ$	$270^\circ$		$360^\circ$	$720^\circ$
Winkel $x$ im Bogenmaß (Teile bzw. Vielfache von $\pi$ )				$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5}{6}\pi$			$\frac{11}{6}\pi$		

Winkel $\alpha$ im Gradmaß					$1^\circ$	$10^\circ$	$30^\circ$	$100^\circ$	$270^\circ$
Winkel $x$ im Bogenmaß	1	2	3	6					

21. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC kennt man die Basis  $c = 80 \text{ cm}$  und den Innenwinkel  $\beta = 37^\circ$ .

Berechne alle übrigen Stücke und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

22. Gegeben sei ein Parallelogramm ABCD durch  $a = 90 \text{ cm}$ ,  $h_a = 38 \text{ cm}$  und  $\alpha = 55^\circ$ .

Fertige eine Skizze an und trage die gegebenen Stücke ein.

Berechne die übrigen Seiten und Winkel des Parallelogramms.

23. In einem Trapez ABCD sind bekannt:  $a = 7,4 \text{ cm}$ ;  $d = 3,6 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 60^\circ$  und  $\beta = 50^\circ$ .

Berechne  $b$  und  $c$ .

24. Von einem Dreieck ABC sind bekannt:  $a = 3,6 \text{ cm}$ ;  $b = 5,2 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 35^\circ$ .

Gesucht sind  $c$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ .

25. Versuche, die Seiten und die Innenwinkel eines Dreiecks so bezeichnen, dass gilt:

$$\text{a) } \frac{\sin g}{\sin f} = \frac{m}{n} \quad \text{b) } \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{c}{h} \text{ und } \frac{\sin y}{\sin z} = \frac{d}{h} \quad \text{c) } k^2 = g^2 + x^2 - 2gx \cos \mu$$

26. Bearbeite folgende Aufgaben, die sich auf ein Dreieck ABC beziehen.

- a) geg.:  $a = 2,1 \text{ cm}$ ;  $b = 4,8 \text{ cm}$ ;  $c = 6,0 \text{ cm}$       ges.:  $\alpha$   
 b) geg.:  $b = 4,7 \text{ cm}$ ;  $c = 6,1 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 63,20$       ges.:  $a$   
 c) geg.:  $c = 3,8 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 300$ ;  $\beta = 80,50$       ges.:  $b$   
 d) geg.:  $a = 7,8 \text{ cm}$ ;  $c = 5,3 \text{ cm}$ ;  $\alpha = 30,70$       ges.:  $\gamma$   
 e) geg.:  $b = 3 \text{ cm}$ ;  $a = 6,3 \text{ cm}$ ;  $\beta = 25^\circ$       ges.:  $\alpha$

27. Ein Körper hat die Form einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche mit der Grundkante  $a = 8,2 \text{ cm}$  und der Höhe  $h = 7,5 \text{ cm}$ .

Zeichne ein Schrägbild dieses Körpers und berechne folgende Größen.

- a) die Höhe  $h_s$  der Seitenflächen  
 b) den Oberflächeninhalt des Körpers  
 c) den Neigungswinkel  $\alpha$  zwischen den Seitenkanten und der Grundfläche  
 d) den Neigungswinkel zwischen den Seitenflächen und der Grundfläche.

28. Auf einer Landkarte mit dem Maßstab 1 : 1 500 000 findet man das Städtedreieck SGW (Schwerin, Güstrow, Wismar) mit  $\overline{SG} = 4,5 \text{ cm}$ ,  $\overline{GW} = 3 \text{ cm}$  und  $\overline{WS} = 2 \text{ cm}$ . Berechne den Flächeninhalt (in Quadratkilometer) des Städtedreiecks SGW.

29. Gegeben sind im Intervall  $[-\pi/2; 2\pi]$  die Funktionen  $f_1 : y = \sin x$  und  $f_2 : y = 2 \cdot \sin x$ .

- Skizziere in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Graphen der Funktionen  $f_1$  und  $f_2$ .
- Vergleiche folgende Eigenschaften der Funktionen miteinander: Definitions- und Wertebereich, Nullstellen im gegebenen Intervall, maximale und minimale Funktionswerte.

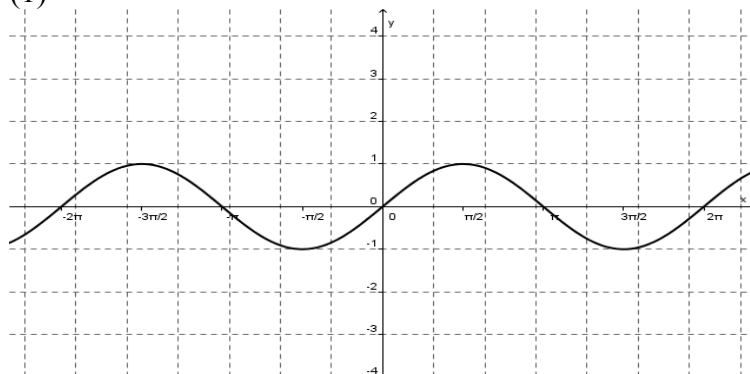
30. Gegeben sind im Intervall  $[-\pi/2; 2\pi]$  die Funktionen  $f_1 : y = \sin x$  und  $f_2 : y = \sin x + 2$

- Skizziere in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Graphen der Funktionen  $f_1$  und  $f_2$ .
- Vergleiche folgende Eigenschaften der Funktionen miteinander: Definitions- und Wertebereich, Nullstellen im gegebenen Intervall, maximale und minimale Funktionswerte, Extremstellen.

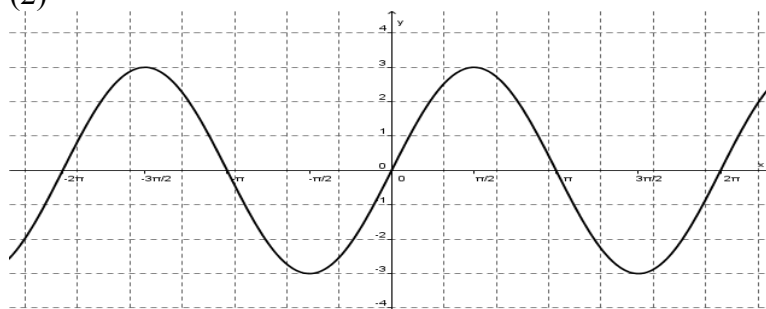
31. Lies folgende Eigenschaften der Funktionsgraphen ab und vergleiche sie miteinander.

- Definitionsbereich
- Wertebereich
- Nullstellen im gegebenen Intervall
- maximale Funktionswerte
- minimale Funktionswerte
- Funktionsgleichung

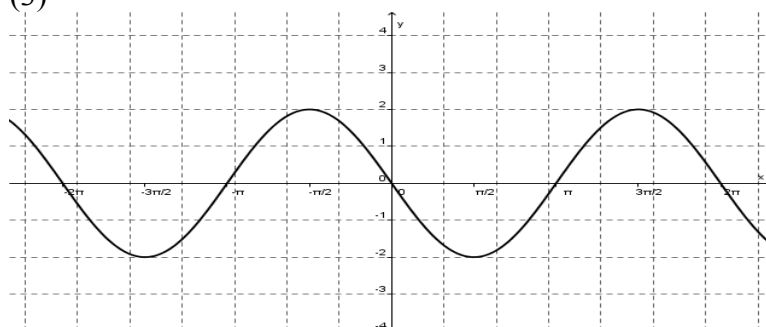
(1)



(2)

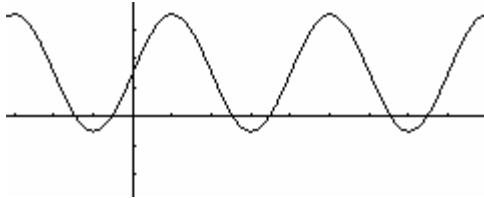


(3)

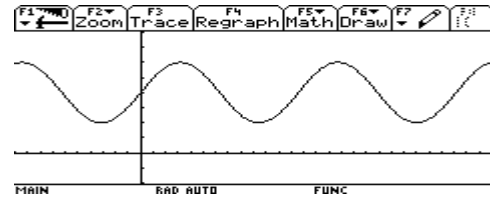


32. Wie lautet die Gleichung einer Sinusfunktion mit dem Wertebereich  $-2,5 \leq y \leq 6,5$ ?
33. Lege für die untenstehende Darstellung an der x- und an der y-Achse eigenständig einen Maßstab fest. Gib dann die Gleichung für die dargestellte Funktion an.

a)



b)



34. Von einer trigonometrischen Funktion sei folgendes bekannt: Der Graph der Funktion entsteht durch Streckung der Funktion  $y = \sin x$  mit dem Faktor 1,5 entlang der y-Achse und wird um eine halbe Einheit nach unten verschoben. Gib die Funktionsgleichung an und skizziere den Graphen der Funktion.

35. Wo steckt der Fehler?

a)  $\cos \alpha = -0,113$   
 $\alpha_1 = 96,5^\circ$   
 $\alpha_2 = 276,5^\circ$

b)  $\sin \alpha = 0,914$   
 $\alpha_1 = 0,016^\circ$   
 $\alpha_2 = 179,884^\circ$

36. Löse die Gleichungen. Gib stets alle Lösungen im Intervall  $[-90^\circ; 360^\circ]$  an.

- a)  $0,5 \cdot \cos \alpha = 0,1$   
 b)  $\sin \alpha + 0,7 = 0,914$   
 c)  $8 \cdot \sin \alpha - 3 = 1,2$   
 d)  $0,3 \cdot \sin \alpha = -0,5$   
 e)  $6 \cdot \cos \alpha + 4 = -0,13$

37. Löse die Gleichungen. Gib stets alle Lösungen im Intervall  $[-\pi; 2\pi]$  an.

- a)  $\sin x + 5 = 5,4$   
 b)  $3 \cdot \cos x = 4 \cdot \cos x - 0,3$

38. Löse die Gleichungen. Gib stets alle Lösungen im Intervall  $[-\pi/2; \pi/2]$  an.

- a)  $2 \cdot \tan x = 8$   
 b)  $0,6 \cdot \tan x = -2,5$

### 3. Exemplarisches

39. Zueinander äquivalente Winkel haben eine Differenz, die ein ganzzahliges Vielfaches von  $360^\circ$  bzw.  $2\pi$  ist.

- a) Gib den zu  $\alpha$  äquivalenten Winkel  $\alpha'$  mit  $0^\circ \leq \alpha' \leq 360^\circ$  an.  
 $\alpha = 2652^\circ$  ( $1572^\circ$ ;  $-3280^\circ$ ;  $476^\circ$ ;  $2730^\circ$ ;  $578^\circ$ )  
 b) Gib den zu  $x$  äquivalenten Winkel  $x'$  mit  $0 \leq x' \leq 2\pi$  an.  
 $x = 11/2 \pi$  ( $6\pi$ ;  $21/4 \pi$ ;  $-1/4 \pi$ ;  $-21/4 \pi$ )

40. a) Skizziere mithilfe eines Rechners in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Graphen der Funktionen  
 $y = \sin x$  und  $y = \sin(2x)$  und  $y = \sin(0,5x)$  im Intervall  $[0; 4\pi]$ .  
 b) Beschreibe allgemein für Funktionen des Typs  $y = \sin(bx)$  den Einfluss des Parameters  $b$  auf die Sinusfunktion.





### 1.3 Exponential- und Logarithmusfunktionen

#### Ziele

##### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- der „Logarithmus“ eine andere Bezeichnung für einen „Exponenten“ ist,
- es Exponentialfunktionen in verschiedenen Darstellungsformen gibt (wörtliche Beschreibung, Wertetabelle, Graph, Funktionsgleichung),
- es typische Beispiele für das exponentielle Wachstum bzw. für den Zerfall gibt und kennen Prototypen (z.B. Zinseszinsen, Algenwachstum, radioaktiver Zerfall).

Die Schülerinnen und Schüler können

- mithilfe einfacher einprägsamer Zahlenbeispiele die beiden Umkehroperationen des Potenzierens erklären ( $2^3 = 8 \leftrightarrow 3 = \log_2 8 \leftrightarrow 2 = 8^{1/3}$ ),
- einfache Exponential- und Logarithmusgleichungen inhaltlich lösen, die sich nur durch Anwendung der verschiedenen Schreibweisen „umschreiben“ lassen, (z.B.:  $\log_2 x = 3$ ;  $\log_2 8 = x$ ;  $\log_x 8 = 3$  oder  $x^3 = 8$ ),
- wesentliche Eigenschaften der Funktionen  $f(x) = 2^x$  und  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$  stellvertretend für Eigenschaften von Exponentialfunktionen beschreiben (Definitionsbereich, Wertebereich, Verhalten im Unendlichen, Asymptoten, Änderungsverhalten, besondere Punkte),
- verschiedene Darstellungsformen von einfachen Exponentialfunktionen der Form  $f(x) = b^x$  ineinander umwandeln (z.B.: Gleichungen und Tabellen in Graphen, Gleichungen in Tabellen, Graphen in wörtliche Beschreibungen).

##### Reaktivierbares Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler kennen

- den Zusammenhang:  $\log_b a^r = r \cdot \log_b a$ ,
- den Befehl zur Berechnung von Logarithmus in ihrem Taschenrechner bzw. CAS,
- den Unterschied zwischen Wachstums- und Zerfallsraten bzw. -Faktoren,
- die Wirkung der „Minuszeichen“ und wissen, dass die Graphen der Funktionen  $f(x) = b^x$ ,  $f(x) = b^{-x}$ ,  $f(x) = -b^x$  und  $f(x) = -b^{-x}$  durch Spiegelung an den Koordinatenachsen auseinander hervorgehen.

Die Schülerinnen und Schüler können:

- aus den Definitionen  $b^0 = 1$  und  $b^1 = b$  für  $b \neq 0$  die entsprechenden Logarithmengesetze  $\log_b 1 = 0$  und  $\log_b b = 1$  herleiten,
- Exponentialgleichungen der Form  $a \cdot b^{kx} = c$  und  $a \cdot b^{(x+e)} = c$  mit festen Parametern  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $e$  nach  $x$  auflösen, wobei vorrangig inhaltliche Vorstellungen und überschaubare Zahlen genutzt werden sollten,
- den Zusammenhang:  $\log_b a^r = r \cdot \log_b a$  zum Lösen von Gleichungen anwenden,
- wesentliche Eigenschaften der Funktionen  $f(x) = b^x$  und  $f(x) = (1/b)^x = b^{-x}$  ( $b > 0$ ) anhand

des typischen Verlaufs ihrer Graphen beschreiben (Definitionsbereich, Wertebereich, Verhalten im Unendlichen, Asymptoten, Änderungsverhalten, besondere Punkte) und mit inhaltlichen Vorstellungen zu Wachstums- und Zerfallsprozessen in Verbindung bringen,

- bestimmten Sachverhalten Exponentialfunktionen der Form  $f(x) = a \cdot b^x$  zuordnen, diese als Graphen skizzieren und typische Anwendungsaufgaben lösen,
- exponentielles Wachstum (Zerfall) von anderen Wachstumsprozessen (Abnahmevorgängen) unterscheiden.

### Exemplarisches

Die Schülerinnen und Schüler haben an einprägsamen Beispielen erlebt, dass

- das Logarithmengesetz  $\log_b(a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$  aus dem entsprechenden Potenzgesetz  $b^{(a+c)} = b^a \cdot b^c$  abgeleitet und bei der Lösung bestimmter Logarithmengleichungen angewendet werden kann,
- die Logarithmusfunktion  $f(x) = \log_b x$  mit  $b > 0$  die Umkehrfunktion der Funktion  $f(x) = b^x$  ist und sich aus dieser Tatsache wesentliche Eigenschaften der Logarithmusfunktion ableiten lassen.

## Aufgaben

### Sicheres Wissen und Können

1. Löse durch inhaltliche Überlegungen. Schreibe das Ergebnis als Logarithmus.

z.B.  $10^x = 100 \rightarrow x = 2 = \log_{10} 100$

a)  $2^x = 8$       b)  $2^x = \frac{1}{4}$       c)  $3^x = 27$       d)  $3^x = \frac{1}{9}$       e)  $5^x = \frac{1}{125}$

f)  $10^x = 10000$       g)  $0,1^x = 100$

2. Bestimme durch inhaltliche Überlegungen. Schreibe als Potenz.

z.B.  $\log_{10} 1000 = 3$ , denn  $10^3 = 1000$

a)  $\log_2 8$       b)  $\log_3 27$       c)  $\log_{10} 100$       d)  $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)$

e)  $\log_3 \left(\frac{1}{27}\right)$       f)  $\log_{10} 0,1$       g)  $\log_5 \left(\frac{1}{25}\right)$

3. Bestimme jeweils x durch Überlegungen zur Bedeutung des Begriffs „Logarithmus“.

a)  $\log_2 16 = x$       b)  $\log_2 x = 5$       c)  $\log_x 16 = 4$

$\log_2 2 = x$        $\log_2 x = 0,5$        $\log_x 27 = 3$

$\log_{10} 1000 = x$        $\log_{0,5} x = 2$        $\log_x 2 = 0,5$

$\log_2 \frac{1}{4} = x$        $\log_5 x = 3$        $\log_x 2 = 8$

$\log_2 \sqrt{2} = x$        $\log_{0,5} x = -1$        $\log_4 x = -1$

$\log_2 \frac{1}{16} = x$        $\log_{10} x = -3$        $\log_x \frac{1}{2} = -1$

4. Zwischen welchen natürlichen Zahlen liegen die folgenden Logarithmenwerte?

a)  $\log_7 63$       b)  $\log_5 20$       c)  $\log_6 30$       d)  $\log_2 27$       e)  $\log_5 76$ .

5. Die Funktion  $f(x) = 2^x$  soll untersucht werden.

a) Gib den Definitions- und Wertebereich der Funktion an.

b) Untersuche  $f(x)$  auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

c) Ergänze folgende Tabelle. Ordne sie nach der Größe der x-Werte.

x	2			-3		0	
f(x)		8	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		2

d) Skizziere die Funktion mit Hilfe der Tabelle.

e) Wie verhalten sich die Funktionswerte von  $f(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$ ?

Gib die Gleichung der Asymptote des Graphen von  $f(x)$  an.

6. Die Funktion  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  soll untersucht werden.
- Gib den Definitions- und Wertebereich der Funktion an.
  - Untersuche  $f(x)$  auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.
  - Fertige eine Wertetabelle für  $-3 \leq x \leq 3$  an und skizziere die Funktion mit Hilfe der Tabelle.
  - Wie verhalten sich die Funktionswerte von  $f(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$ ?  
Gib die Gleichung der Asymptote des Graphen von  $f(x)$  an.
  - Vergleiche den Verlauf des Graphen mit dem Graphen der Funktion  $f(x) = 2^x$ .
7. Gib die Gleichung einer Funktion an, die folgende Eigenschaft hat.
- Wird der  $x$ -Wert um eins erhöht, so verdreifacht sich der  $y$ -Wert.
  - Wird der  $x$ -Wert um eins vermindert, so drittelt sich der  $y$ -Wert.
  - Wird der  $x$ -Wert um eins erhöht, so drittelt sich der  $y$ -Wert.

8. Finde eine verbale Beschreibung für folgende Zuordnungen.

a)

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

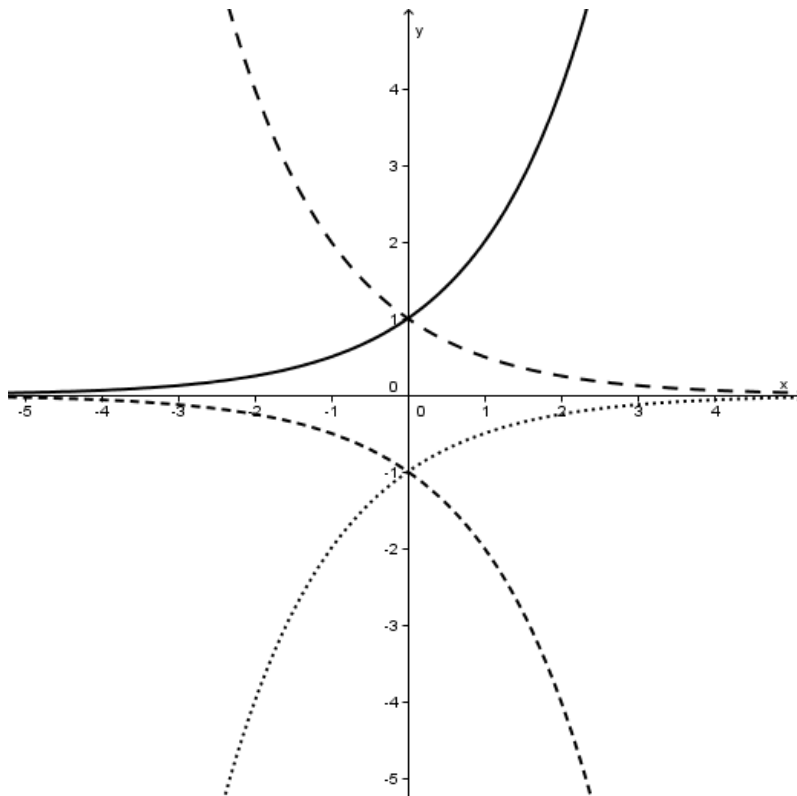
b)

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

### Reaktivierbares Wissen und Können

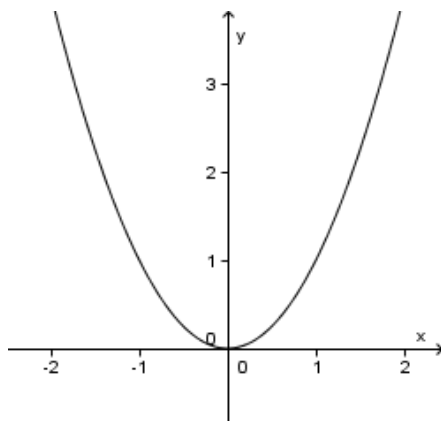
9. Erforsche die Eigenschaften der Funktionen  $f(x) = 0,75^x$  und  $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$
- Konzentriere dich auf den jeweiligen Definitions- und Wertebereich, die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und das Verhalten der Funktionswerte für  $x \rightarrow \infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$ .
  - Vergleiche die Graphen beider Funktionen.  
Zum Darstellen beider Graphen kannst du ein CAS benutzen.
  - Wie verändern sich jeweils die  $y$ -Werte, wenn die  $x$ -Werte um eins erhöht werden?
  - Findest du Beispiele für Vorgänge, die mit diesen oder ähnlichen Funktionen beschrieben werden können?
10. Skizziere die Graphen der Funktionen  $f_1(x) = 2^x$ ;  $f_2(x) = -2^x$ ;  $f_3(x) = 2^{-x}$  und  $f_4(x) = \frac{1}{2^x}$ .
11. Welche der Funktionen  $f(x) = a \cdot b^x$   $b > 0$  geht durch die Punkte  $P_1(0 \mid 3)$  und  $P_2(1 \mid 1,5)$ ?

12. Die Darstellung zeigt die Graphen der Funktion  $f(x) = 2^x$  und dreier weiterer Funktionen, die alle durch Spiegelung an den Koordinatenachsen aus dem Graphen von  $f(x) = 2^x$  hervorgegangen sind. Finde die Funktionsterme der jeweiligen Funktionen.

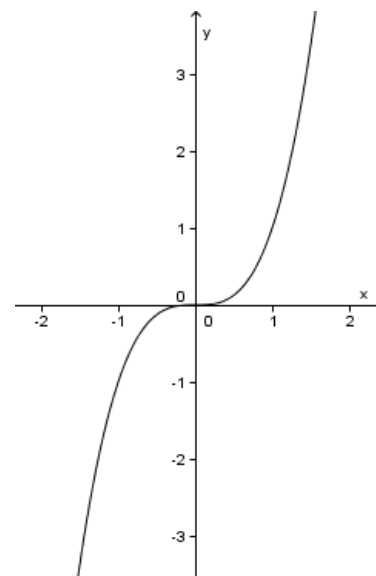


13. Finde die exponentiellen Zuordnungen aus allen gegebenen Zuordnungen heraus.

a)



b)



- c) Wenn der x-Wert um eins erhöht wird, vermehrt sich der y-Wert um 2.  
 d) Eine Bakterienkultur verdoppelt ihren Bestand alle 30 min.  
 e) Die Anzahl der Teilchen verringert sich jeden Monat um die Hälfte.  
 f)

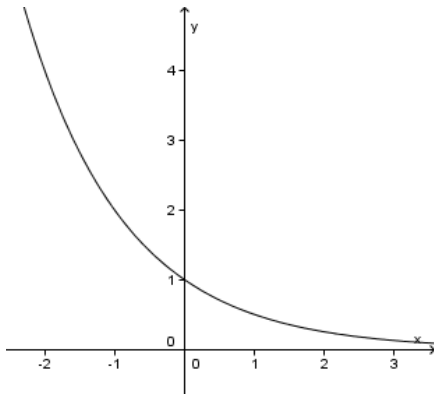
x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	4	1	0	1	4	9

g)  $f(x) = \frac{1}{2^{-x}}$

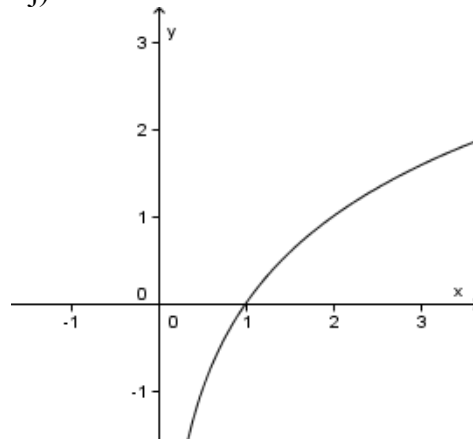
h)

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

i)



j)



#### 14. Ergänze!

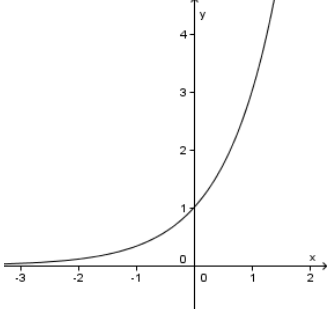
- a) Ich habe von meiner Oma 1000 € bekommen und lege sie bei einer Bank an. Am Ende des ersten Jahres habe ich 1030 € auf dem Konto. Ich bekomme von meiner Bank \_\_\_\_\_ % Jahreszinsen.
- b) Die Bank garantiert mir für die folgenden 4 Jahre einen stabilen Zinssatz von 4 %, wenn ich das Geld fest anlege. Ich kann mein Guthaben am Ende des 4. Jahres nach der Formel \_\_\_\_\_ berechnen.
- c) Von meiner Tante bekomme ich jeden Monat 100 €. Ich bewahre das Geld bei mir zu Hause auf und habe nach einem Jahr \_\_\_\_\_ €. Ich kann mir ausrechnen, wie viel Geld ich nach drei Jahren habe, wenn ich die Formel \_\_\_\_\_ benutze.

#### 15. Oma Sparstrumpf schenkt ihrem Enkel Karl zur Geburt 0,01 €. Zu jedem Geburtstag schenkt sie ihm doppelt so viel Geld wie im Vorjahr.

- a) Wie viel Geld bekommt Karl zu seinem 18. Geburtstag? Gib eine Gleichung zur Berechnung an.
- b) Wie viel Geld hat er insgesamt von Oma Sparstrumpf bis zu seinem 18. Geburtstag bekommen?
- c) Oma Herzlich schenkt Karl von der Geburt bis zum 18. Geburtstag jedes Jahr 50 €. Wie viel Geld hat er von Oma Herzlich insgesamt bekommen?

#### 16. Pro Stunde scheidet der Körper 20 % des Wirkstoffes eines bestimmten Medikamentes aus. Nach welcher Zeit ist nur noch die Hälfte des Wirkstoffes im Körper?

17. Kreuze an, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	wahr	falsch
Exponentielles Wachstum ist stets stärker als lineares Wachstum.		
$a^0 = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}$		
Es gibt prozentuale Wachstumsvorgänge, die exponentiell beschrieben werden können.		
Die Funktion $f(x) = 3^x$ hat eine Nullstelle.		
Es handelt sich um den Graphen einer Exponentialfunktion. 		
„Tom bekommt jeden Monat 2 € mehr Taschengeld.“ Der Betrag des Taschengeldes wächst linear.		
Die Funktion $f(x) = 0,5^x$ beschreibt eine exponentielle Zunahme.		
„Frau Wuchtig hat bei einer Diät pro Woche 2 kg abgenommen“ Die Abnahme ist exponentiell.		
Ein Kilogramm eines radioaktiven Elements zerfällt exponentiell.		
$\frac{1}{3^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$		
$a^1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$		
Alle Exponentialfunktionen der Form $y = b^x$ verlaufen durch den Punkt P (0   1)		
Eine Exponentialfunktion der Form $y = b^x$ ; $b > 0$ verläuft nie im 3. Quadranten.		

### Exemplarisches

18. Berechne unter Verwendung von Logarithmengesetzen.

- $\log_5 62,5 + \log_5 2$
- $\log_5 25^5 + \log_2 64^2 - \log_3 27^4 + \log_2 2 + \log_5 1$
- $\log_{10} 4 + \log_{10} 25 - \log_2 16^8$



19. Berechne unter Verwendung von Logarithmengesetzen.

- $\log_2 4^7 + \log_4 (16 \cdot 64)$
- $\log_{10} 1000^{27} - \log_2 64 + \log_3 (3 \cdot 81)$
- $\log_3 (3^{28} \cdot 9^{105})$
- $\log_{10} 100^{24} + \log_5 125^5 - \log_2 128$
- $\log_2 (4 \cdot 32)^{80}$
- $\log_2 \sqrt{8}$

20. Vertauscht man bei einer Funktion  $f(x)$  die  $x$ - und  $y$ -Werte, so entsteht eine neue Zuordnung, die Umkehrfunktion  $\bar{f}(x)$  genannt wird. Der Graph von  $\bar{f}(x)$  ergibt sich dadurch als Spiegelung des Graphen von  $f(x)$  an der Geraden  $y = x$ .

z.B.  $f(x) = \sqrt{x+1}$

Definitionsbereich von  $f(x)$ :  $x \in \mathbb{R}; \quad x \geq -1$

Wertebereich von  $f(x)$ :  $y \in \mathbb{R}; \quad y \geq 0$

Wertetabelle von  $f(x)$

x	-1	3	8	15	24
f(x)	0	2	3	4	5

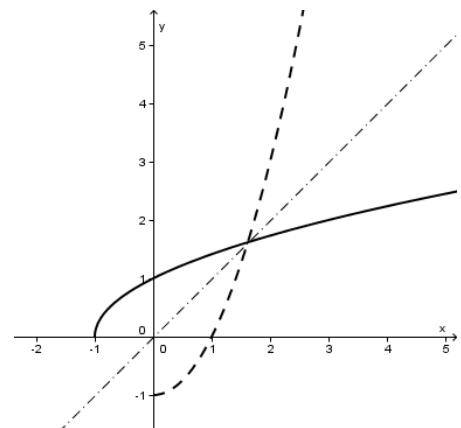
Wertetabelle von  $\bar{f}(x)$

x	0	2	3	4	5
$\bar{f}(x)$	-1	3	8	15	24

$$y = \sqrt{x+1} \Rightarrow y^2 - 1 = x \quad \bar{f}(x) = x^2 - 1$$

Definitionsbereich von  $\bar{f}(x)$ :  $x \in \mathbb{R}; \quad x \geq 0$

Wertebereich von  $\bar{f}(x)$ :  $y \in \mathbb{R}; \quad y \geq -1$

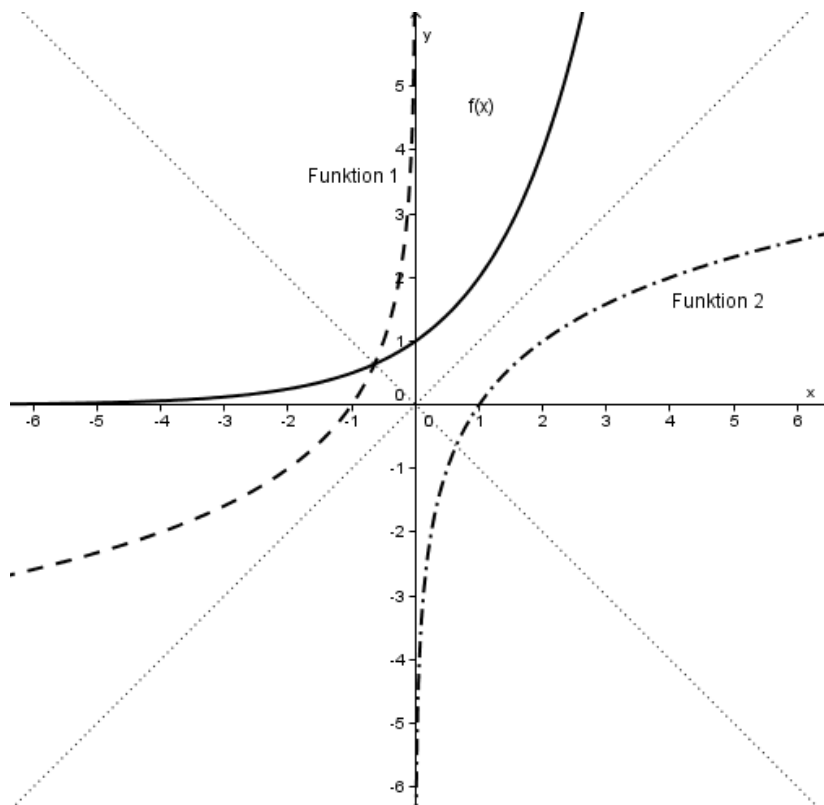


- Fertige eine Wertetabelle für die Funktion  $f(x) = 2^x$  für  $-3 \leq x \leq 3$  an und bestimme den Definitions- und Wertebereich.
- Fertige eine Tabelle für die Umkehrfunktion  $\bar{f}(x)$  an und bestimme den Definitions- und Wertebereich.
- Zeichne beide Funktionen in ein und dasselbe Koordinatensystem. Zeichne auch die Spiegelachse ein.
- Kannst du einen Funktionsterm von  $\bar{f}(x)$  angeben?

21. Herr Pille nimmt seit dem 1. 3. täglich um 8.00 Uhr 2 mg des Wirkstoffs eines Medikaments ein. 20 % werden innerhalb von 24 Stunden ausgeschieden.

- Betrachtet wird der Wirkstoffgehalt im Körper unmittelbar nach der Einnahme des Medikaments.
- Was passiert, wenn Herr Pille das Medikament über einen langen Zeitraum einnimmt? Nutze zur Lösung ein CAS.

22. Welche der Funktionen ist die Umkehrfunktion von  $f(x)$ ? Begründe!



## 1.4 Körperdarstellungen und Körperberechnungen

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- es verschiedene Möglichkeiten gibt, Körper in der Ebene darzustellen,
- man Körper entsprechend ihrer Eigenschaften in Gruppen einteilen kann,
- Pyramiden und Kreiskegel Körper mit einer Spitze sind,
- Körper in Teilkörper zerlegbar und Körper aus Teilkörpern zusammensetzbar sind,
- Volumen, Mantel- und Oberfläche der Grundkörper nach Formeln berechenbar sind,
- die Höhe das Lot von der Deckfläche bzw. Spitze zur Grundfläche ist.

Die Schülerinnen und Schüler können

- (gerade) Kegel, (gerade) Pyramiden, Kugeln, (gerade) Zylinder, (gerade) Prismen, Quader und Würfel voneinander unterscheiden,
- die Form realer Gegenstände durch diese mathematischen Körper beschreiben,
- sich einfache Körper auf Grund der zeichnerischen Darstellung vorstellen,
- zwischen Volumen, Mantel-, Grund- und Oberfläche unterscheiden,
- Körper beschreiben, indem sie diese in Teilkörper zerlegen,
- Prismen und Pyramiden als Schrägbild darstellen und aus entsprechenden Darstellungen Maße entnehmen,
- Mantel-, Grund- und Oberfläche sicher unterscheiden,
- Grundmerkmale wie Kantenlänge, Höhe eines Körpers, Grundfläche, Radius der Grundfläche sicher erkennen.

#### Reaktivierbares Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler wissen,

- dass in einem Schrägbild bei einer Kavalierperspektive Frontlinien in wahrer Länge und Tiefenlinien um die Hälfte verkürzt und im Winkel von  $45^\circ$  dargestellt werden,
- wie die Bilder bei einer senkrechten Parallelprojektion (Zweitafelbild) entstehen,
- dass Kegel, Zylinder und Kugeln Rotationskörper sind,
- welche Rotationskörper durch Drehung von Strecken bzw. Flächen um vorgegebene Achsen entstehen,
- dass das Volumen von Prismen und Zylindern mit der Formel  $V = A_g \cdot h$  und von Pyramiden und Kegeln mit  $V = \frac{1}{3} A_g \cdot h$  berechnet werden kann.

Die Schülerinnen und Schüler können

- Front- und Tiefenlinien eines Körpers unterscheiden,
- zugehörige Formeln zur Volumen-, Mantel- und Oberflächenberechnung von Kegel, Pyramide und Kugel in Nachschlagewerken finden und die Formeln zur Berechnung benutzen,
- Prismen und Pyramiden in senkrechter Zweitafelprojektion skizzieren und aus entsprechenden Darstellungen Maße entnehmen,
- durch Verwendung bekannter Formeln des vorangegangenen Unterrichts geeignete Linien und Flächen an Körpern berechnen,
- zusammengesetzte Körper in zur Berechnung geeignete Teilkörper zerlegen bzw. ergänzen,
- einfache zusammengesetzte Körper darstellen und ihr Volumen und ihre Oberfläche berechnen.

### **Exemplarisches**

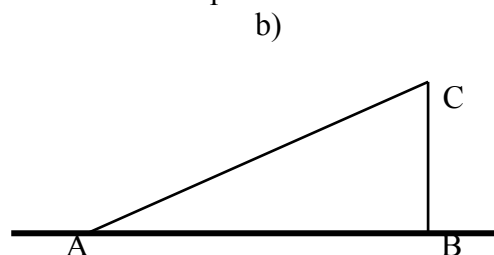
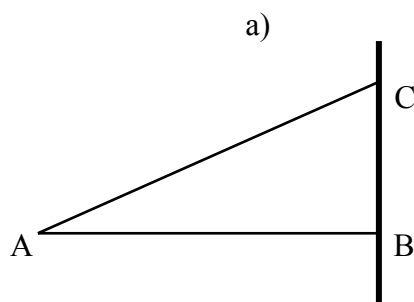
Die Schülerinnen und Schüler haben an einprägsamen Beispielen erlebt, dass

- man gerade und schiefe Prismen, Zylinder, Pyramiden und Kegel unterscheidet,
- es auch andere Arten von Schrägbildern gibt und wie sich die Festlegung von Verkürzungsverhältnis und Verzerrungswinkel auf das Aussehen der Darstellung auswirkt,
- eine Darstellungsart in eine andere übertragen werden kann,
- Berechnungen in beliebigen geometrischen Körpern, insbesondere an Pyramiden und Kegelstümpfen ausführbar sind, indem man sie geschickt in Teilkörper zerlegt bzw. zu Körpern ergänzt,
- man mit dem Satz des Cavalieri das Volumen von schiefen Körpern berechnen und die Formel für das Volumen einer Kugel herleiten kann,

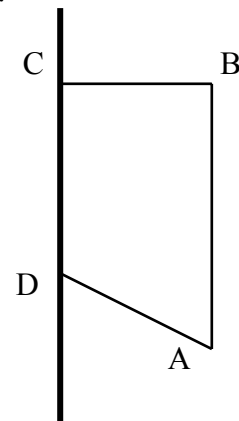
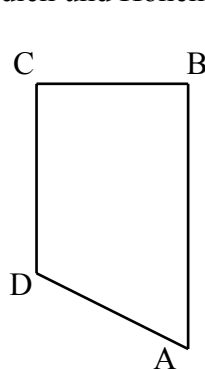
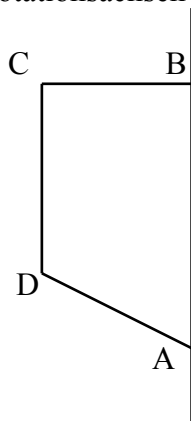
## Aufgaben

### Sicheres Wissen und Können

1. Nenne Beispiele für Gegenstände, deren Form man in der Mathematik als Prisma, Pyramide, Kegel, Zylinder oder Kugel bezeichnet.
2. Nenne Gegenstände mit kreisförmiger Grundfläche.
3. Skizziere Gegenstände im Schrägbild und zerlege sie in geeignete Teilkörper.  
z. B.: Reagenzglas, Bleistift, Nagel, Sektklas.
4. Fotografiere Beispiele für Körper, die man in der Mathematik als Prisma, Pyramide, Kegel oder Kugel bezeichnet bzw., die aus diesen Grundkörpern zusammengesetzt sind und zeichne den mathematischen Körper in geeigneter Darstellung ein.
5. Ein A4-Blatt kann auf zwei verschiedene Arten zu einem Zylinder zusammengerollt werden. Berechne für beide Möglichkeiten das Volumen und die Mantelfläche der entstandenen Körper. Welcher Zylinder hätte eine größere Oberfläche, wenn die Grund- und Deckfläche mit einbezogen würden?
6. Aus welchen mathematischen Körpern besteht ein angespitzter runder Bleistift?  
Bestimme jeweils Kantenlänge bzw. Radius der Grundfläche und die Höhe der Körper.
7. Beschreibe die Körper, die bei Rotation der dargestellten Flächen um die jeweiligen Rotationsachsen entstehen. Gib Radien und Höhen der Körper an.

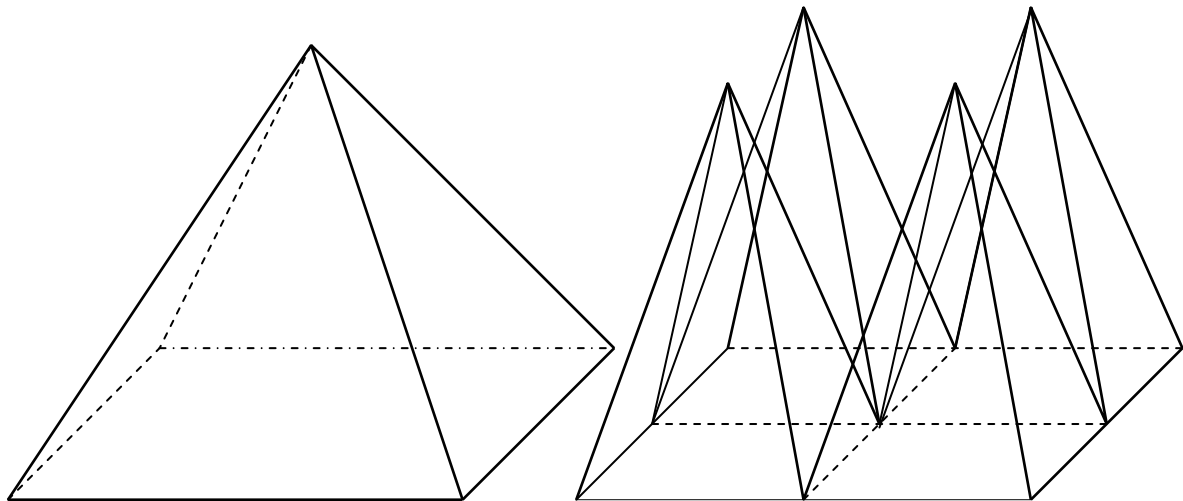


8. Beschreibe die Körper, die bei Rotation der dargestellten Flächen um die jeweiligen Rotationsachsen entstehen. Gib Radien und Höhen der Körper an.



**Reaktivierbares Wissen und Können**

9. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit  $a = 3 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$  und  $c = 8 \text{ cm}$ . Dieses Dreieck wird um die Seite  $b$  um  $360^\circ$  gedreht.
- Konstruiere das Dreieck.
  - Skizziere und beschreibe den entstehenden Rotationskörper.
  - Berechne das Volumen des Körpers
10. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite  $a = 4 \text{ cm}$  wird um die Symmetrieachse gedreht. Berechne Oberfläche und Volumen des Drehkörpers.
11. Beschreibe die Körper, deren Volumen mit folgenden Formeln berechnet wird.
- $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$
  - $V = \frac{1}{4} \pi d^2 \cdot h$
  - $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$
  - $V = a \cdot b \cdot h$
  - $V = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot h$
  - $V = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot h$
  - $V = a^2 \cdot h$
  - $V = \frac{1}{6} a \cdot b \cdot h$
12. Wie viele Sektgläser mit einer Höhe von  $15 \text{ cm}$  und einem oberen Durchmesser von  $7 \text{ cm}$  kann man mit einer Sektfflasche füllen (Inhalt  $1 \text{ Liter}$ ), wenn alle Gläser bis  $1 \text{ cm}$  unter den Rand gefüllt werden?
13. Vergleiche das Volumen der großen Pyramide (quadratische Grundfläche) mit dem Gesamtvolumen der vier kleinen Pyramiden.



14. Zur Bestimmung des Volumens kleiner, gleichgroßer Kugeln werden  $1500$  in einen mit Wasser gefüllten Messzylinder (Durchmesser  $12 \text{ cm}$ ) gegeben, so dass sie vollständig mit Wasser bedeckt sind. Der Wasserstand steigt durch das Einfüllen der Kugeln um  $6,2 \text{ cm}$ . Berechne den Radius einer Kugel.
15. Ein Würfel habe die Kantenlänge  $a = 8 \text{ cm}$ . Stelle den Würfel im Schrägbild dar. Verbinde die Mittelpunkte der Seitenflächen. Es entsteht eine Doppelpyramide. Berechne Volumen und Oberfläche der Doppelpyramide.

16. Bestimme Höhe und Umfang eines Reagenzglases. Aus welchen Teilkörpern ist es zusammengesetzt? Bestimme das Fassungsvermögen des Glases.  
Wie hoch steht eine Flüssigkeit, wenn 20 ml in ein leeres Reagenzglas hineingegossen werden?

### Exemplarisches

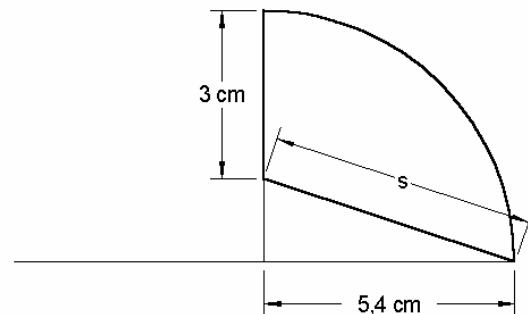
17. Im Koordinatensystem ist eine Strecke  $\overline{AB}$  durch folgende Koordinaten gegeben:

(1) A (4 | 0); B (0 | 3)      (2) A (0 | 5); B (6 | -3)

Diese Strecke dreht sich um die y - Achse bzw. um die x - Achse.

- Fertige jeweils eine Skizze an.
- Berechne jeweils das Volumen und den Oberflächeninhalt der Rotationskörper.

18. Die dick umrandete Fläche rotiert um die vertikale Achse.  
Berechne Volumen und Oberflächeninhalt des Rotationskörpers.



19. Gegeben sind zwei 4 - seitige Pyramiden mit rechteckiger Grundfläche mit den Seitenlängen  $a = 5$  cm,  $b = 6$  cm und der Höhe  $h = 7$  cm.  
Die Pyramide 1 ist eine gerade Pyramide.

Bei der Pyramide 2 liegt deren Spitze über dem Mittelpunkt der Seite  $\overline{AB}$ .

- Konstruiere beide Pyramiden in Kavalierperspektive.
- Konstruiere die Schnittflächen bei waagrechtem Schnitt in 2 cm Höhe über der Grundfläche. Berechne die Größen der Schnittflächen.
- Berechne Volumen und Oberfläche der Pyramiden. Vergleiche sie miteinander.

20. Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge a.

- Ein Zylinder gleicher Höhe umschließt den Würfel.
  - Eine Kugel wird so um den Würfel gelegt, dass seine Ecken berührt werden.
- In welchem Verhältnis stehen jeweils die Volumina bzw. die Oberflächen der Körper?

21. Gegeben sind die linearen Funktionen  $f(x) = 1,5x$  und  $h(x) = 2x + 3$ .

Beschreibe die jeweils entstehenden Körper. Berechne das Volumen.

- Der Graph der Funktionen rotiert im Intervall  $0 \leq x \leq 5$  um die x-Achse.
- Der Graph der Funktionen rotiert im Intervall  $2 \leq x \leq 6$  um die x-Achse.
- Der Graph der Funktionen rotiert im Intervall  $0 \leq x \leq 3$  um die y-Achse.

## 1.5 Stochastik

### Vorkenntnisse bis zur Klasse 9

#### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler können

- eine Prozessanalyse zufälliger Vorgänge vornehmen,
- Wahrscheinlichkeiten als Grad der Erwartung, Grad der Sicherheit und als Prognose zu erwartender absoluter Häufigkeiten interpretieren,
- Wahrscheinlichkeiten aus relativen Häufigkeiten näherungsweise bestimmen,
- Wahrscheinlichkeiten durch Brüche, Chancenverhältnisse und in Prozent angeben,
- Wahrscheinlichkeiten bei einfachen Laplace-Experimenten berechnen,
- Datensätze mit gegebenen Kenngrößen (Mittelwerte, Spannweite, Varianz und Standardabweichung) und gegebene Darstellungen interpretieren,
- über Vor- und Nachteile unterschiedlicher Darstellungsweisen reflektieren,
- die Grenzen oder Fehler gegebener Darstellungen oder empirischer Erhebungen oder Stichprobenziehungen erkennen,
- Baumdiagramme für 2- bis 3-stufige Vorgänge zeichnen,
- Pfadregeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten zusammengesetzter Ergebnisse 2- bis 3-stufiger Vorgänge anwenden.

#### Reaktivierbares Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler können:

- Mittelwerte (arithmetisches Mittel, Median, Modalwert), Spannweite, Varianz und Standardabweichung einer gegebenen Häufigkeitsverteilung berechnen und damit in sinnvoller Weise Fragen beantworten,
- statistische Erhebungen planen, Methoden der Erfassung und Darstellung von Daten (Säulen- und Kreisdiagramme) nutzen und Darstellungen kritisch bewerten sowie ihre Auswahl begründen,
- das Gegenereignis und seine Wahrscheinlichkeit ermitteln,
- Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen durch Summation der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, die das Ereignis bilden, berechnen,
- Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen und Ereignissen mehrstufiger Vorgänge mit Pfadregeln berechnen,
- Anzahlen mit der Produktregel berechnen,
- eine Zufallsgröße als Zuordnung von Merkmalen zu Ergebnissen oder Ereignissen eines Vorganges entwickeln oder diskrete Zufallsgrößen günstig auswählen,
- diskreten Zufallsgrößen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zuordnen,
- eine Wahrscheinlichkeitsverteilung diskreter Zufallsgrößen in Tabellen und Streifendiagrammen darstellen,



- den Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsgröße berechnen und deuten,
- eine Wahrscheinlichkeitsverteilung im Sachkontext begründet und adäquat zur Modellierung einsetzen.

### **Exemplarisches Wissen und Können**

Die Schülerinnen und Schüler haben an einprägsamen Beispielen folgende Einsichten gewonnen:

- Eine „Repräsentative Stichprobe“ spiegelt die Verhältnisse in der Grundgesamtheit real wieder.
- Die Art der Planung von Studien beeinflusst maßgeblich die Qualität der Daten und die daraus möglichen Schlussfolgerungen.
- Eine weitere Möglichkeit der Datenaufbereitung besteht darin, Methoden der explorativen Datenanalyse zu nutzen, die ohne aufwändige Rechnungen auskommt (Aufschreiben der Daten nach der Größe sortiert, Auszählen von Zentralwert, Spannweite, Vierteldifferenz, Darstellung im Boxplot). Diese Methode bietet Vorteile besonders dann, wenn schiefe Verteilungen vorliegen.
- Wird eine Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Streifendiagramm dargestellt, so beträgt die Summe der Flächen aller Streifen 1.
- Zwischen der Häufigkeitsverteilung einer realen Stichprobe und der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer entsprechenden Zufallsgröße bestehen Zusammenhänge.
- Zwischen dem Erwartungswert einer Zufallsgröße und dem arithmetischen Mittel bestehen Zusammenhänge.
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Zufallsgrößen können in Analogie zu Häufigkeitsverteilungen durch den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung charakterisiert werden.

## **Ziele für die Klasse 10**

### ***1. Wissen und Können in der Anwendung der Binomialverteilung zur Modellierung zufälliger Vorgänge***

#### **Sicheres Wissen und Können**

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- es bei der Untersuchung von zufälligen Vorgängen sinnvoll sein kann, bezüglich eines Merkmals nur das Eintreten oder Nichteintreten zu betrachten, dass man das Eintreten des Ereignisses als „Erfolg“ oder „Treffer“, seine Wahrscheinlichkeit als „Erfolgs- oder Trefferwahrscheinlichkeit“ und die Untersuchung ein Bernoulli-Experiment nennt,
- die mehrfache Wiederholung eines Bernoulli-Experimentes, bei der sich die Erfolgswahrscheinlichkeit nicht ändert, Bernoulli-Kette heißt,
- eine Bernoulli-Kette ein Modell für reale Vorgänge ist, das oft nur unter vereinfachenden Annahmen oder bestimmten Bedingungen verwendet werden kann,
- eine Binomialverteilung aus einem Baumdiagramm hergeleitet werden kann, dass der Anzahl der Erfolge (Treffer)  $k$  die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten  $P(k)$  zugeordnet sind und die Verteilung durch die Parameter  $n$  und  $p$  eindeutig bestimmt ist,

- sich die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  einer Bernoulli-Kette unter bestimmten Annahmen als Laplace-Wahrscheinlichkeiten ergibt oder aus den relativen Häufigkeiten der Ergebnisse bei mehrfachen Wiederholungen des Vorgangs ermittelt wird,
- sie die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  für einen Erfolg bei einem Bernoulli-Vorgang und die Wahrscheinlichkeit  $P(k)$  für genau  $k$  Erfolge bei einer Bernoulli-Kette der Länge  $n$  unterscheiden müssen.

Die Schülerinnen und Schüler können

- den Erwartungswert einer Binomialverteilung  $E = n \cdot p$  berechnen, deuten und in einem Diagramm kennzeichnen,
- Eigenschaften des Erwartungswertes im Zusammenhang mit der Verteilung beschreiben.

### Reaktivierbares Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- es für Bernoulli-Ketten der Länge  $n$  genau  $n + 1$  Möglichkeiten für die Anzahl der Erfolge  $k$  gibt

Die Schülerinnen und Schüler können

- Binomialkoeffizienten berechnen,
- Streifendiagramme für Binomialverteilungen kleiner Längen zeichnen und geeignete Skizzen für  $n > 10$  anfertigen,
- mithilfe von Baumdiagrammen, Formeln, Tabellen und/oder CAS folgende Wahrscheinlichkeiten ermitteln, wenn  $p$  und  $n$  gegeben sind:
  - Wahrscheinlichkeiten für genau  $k$  Erfolge,
  - Wahrscheinlichkeiten für weniger als, mehr als, mindestens oder höchstens  $k$  Erfolge,
  - Wahrscheinlichkeiten für mindestens einen Erfolg,
- die Mindestlänge einer Kette für mindestens einen Erfolg berechnen, wenn  $p$  und  $P$  gegeben sind,
- den Stichprobenumfang bestimmen, damit mindestens (höchstens)  $k$  Erfolge eintreten, wenn  $p$  und  $P$  gegeben sind.

### Exemplarisches

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen folgende Einsichten gewonnen:

- Bei wachsender Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  und konstantem  $n$  gelten folgende Zusammenhänge:
  - Der Erwartungswert  $E$  liegt in der Nähe der Anzahl mit der größten Wahrscheinlichkeit und „wandert“ von links nach rechts.
  - Die Verteilungen bleiben gleich breit und die Höhe ändert sich wenig.
- Bei wachsendem  $n$  und konstanter Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  gelten folgende Gesetze:
  - Der Erwartungswert liegt in der Nähe der Anzahl mit der größten Wahrscheinlichkeit.
  - Die Verteilungen werden immer breiter und flacher bei gleicher Skalierung der  $k$ -Achse.
  - Die Kästchen in den Streifendiagrammen „verbinden“ sich immer mehr zu einer geschlossenen Glockenkurve. Diese Glockenkurve, die ihren höchsten Funktionswert in der Nähe des Erwartungswertes besitzt, kann für Skizzen vorteilhaft genutzt werden.
- Die Streuung einer Binomialverteilung kennzeichnet die „Breite“ der Verteilung.

**Hinweise:**

- Es gibt unterschiedliche Schreibweisen für die Werte einer Binomialverteilung bzw. einer summierten Binomialverteilung (z. B.  $B(n, p; k)$ ,  $B_{n,p}(k)$ ,  $F_{n,p}(k)$ ). Es sollte in der Regel die Schreibweise  $P(k)$  und bei Bedarf mit Angabe der entsprechenden Parameter verwendet werden. Für konkrete Werte sollte z. B.  $P(k = 3)$  geschrieben und bei summierten Wahrscheinlichkeiten Ungleichungen oder wörtliche Formulierungen angegeben werden (z. B.  $P(k < 3)$ ,  $P(\text{mehr als 5 Erfolge})$ ).
- Die Binomialverteilung ist eine diskrete Verteilung, so dass als grafische Darstellung ein Streckendiagramm oder ein Streifendiagramm, bei dem sich die Streifen nicht berühren gezeichnet werden müsste. Es wird aber meist ein Histogramm gewählt (die Streifen berühren sich, was nur für stetige Zufallsgrößen erlaubt ist), was mit Blick auf das Skizzieren von Binomialverteilungen für die Veranschaulichung von Wahrscheinlichkeiten als Flächen sinnvoll ist.
- Mit dem Voyage 200 können Werte für summierte Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung mit dem Befehl `biniwkt(n,p,von,bis)` (in engl.: `binomcdf(n,p,low,up)`) leicht berechnet werden, womit sich der Aufwand für das Lösen vielen Aufgaben wesentlich verringert. Einzelwahrscheinlichkeiten erhält man, wenn für „von“ und „bis“ die gleichen Werte eingegeben werden bzw. mit dem Befehl `binewkt(n,p,k)` (in engl. `binompdf(n,p,k)`).

## Aufgaben

1. Die folgenden Vorgänge sollen in einem Bernoulli-Experiment untersucht werden. Gib ein Merkmal an, das dazu betrachtet werden könnte. Nenne ein Ereignis, dessen Eintreten als „Erfolg“ in dem Experiment angesehen werden könnte.
  - a) Entwicklung der Fernsehgewohnheiten von Rentnern am Nachmittag
  - b) Haltung von Wählern zu einem Wahlergebnis
  - c) Wetterverlauf an einem Tag an einem Ort
  - d) Keimen von Blumensamen einer Sorte

2. Folgende Vorgänge sollen als Bernoulli-Vorgang betrachtet werden. Formuliere ein entsprechendes Ereignis, das als „Erfolg“ angesehen werden kann und bestimme dessen Wahrscheinlichkeit.
  - a) Ein Glücksrad aus 8 gleich großen Sektoren mit den Zahlen von 1 bis 8 wird gedreht.
  - b) Eine Firma stellt Hosen her. Bei der Untersuchung der Qualität der Hosen stellte man über einen längeren Zeitraum fest, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % die Hosen erste Wahl und mit einer Wahrscheinlichkeit von 14 % die Hosen zweite Wahl waren. Die restlichen Hosen waren Ausschuss.
  - c) Bei der Herstellung von Fahrrädern einer Markenfirma traten bei Qualitätskontrollen vor der Auslieferung folgende Fehler mit den genannten Wahrscheinlichkeiten auf.

Rahmen, Lenker, Sattel	Bremsen	Gangschaltung, Tretlager	Reifen	Elektrik
0,025	0,02	0,025	0,005	0,005

3. Unter welchen Bedingungen können die folgenden Wiederholungen zufälliger Vorgänge mit den dabei betrachteten Ereignissen als Bernoulli-Ketten angesehen werden? Gib in diesem Fall die notwendigen Bedingungen und die Länge der Kette an.
  - a) Es wird 50-mal mit einem Würfel gewürfelt und erfasst, ob die Augenzahl größer als 2 ist.
  - b) Es werden die Computergewohnheiten von 50 Kindern untersucht. Sie werden gefragt, ob sie länger als 2 Stunden pro Tag am Computer spielen.
  - c) Es werden 50 Sonnenblumenkerne ausgesät. Bei der Ernte wird gemessen, ob die Sonnenblumen größer als 2 m geworden sind.
4. Beschreibe einen Sachverhalt, der mit einer Bernoulli-Kette der Länge 3 und der Erfolgswahrscheinlichkeit  $p = 0,95$  beschrieben werden kann. Suche interessante Aufgabenstellungen zu diesem Sachverhalt.
5. Eine Gärtnerei vertritt die Meinung, dass sich aus einer Tüte mit ihren Tulpenzwiebeln erfahrungsgemäß 50 % gelbe, 25 % rote, 20 % lila und 5 % weiße Tulpen entwickeln. Die Tulpenzwiebeln sind hinsichtlich der Farbe der Tulpen nicht unterscheidbar. Für einen Kunden ist es ein „Erfolg“, wenn sich aus einer gekauften Zwiebel eine gelb blühende Tulpe entwickelt. In einen Topf pflanzt er 3 Zwiebeln.
  - a) Bestimme die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  des Experimentes sowie die Länge der Bernoulli-Kette.
  - b) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in dem Topf aus keiner, aus genau einer, aus 2 Zwiebeln bzw. aus allen 3 Zwiebeln gelbe Tulpen entwickeln.
  - c) Zeichne ein Streifendiagramm für die Binomialverteilung.

6. Zeige und begründe, wie die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  für folgende Bernoulli-Vorgänge berechnet wird.
- a) Bei einem Glücksrad ist ein Sektor von  $72^\circ$  schraffiert. Genau dann, wenn der angebrachte Pfeil nach dem Stillstand des Rads auf diesen schraffierten Sektor zeigt, erhält der Spieler einen Punkt.

- b) Im vergangenen Jahr lieferte eine Näherei Gardinen in folgenden Güteklassen an einen Großhändler:

Güteklasse	fehlerfrei	kleine Fehler	Ausschuss
Anzahl der Gardinen im letzten Jahr	9500	450	50

Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man davon ausgehen, dass die von der Näherei gelieferten Gardinen in die Klasse „fehlerfrei“ einzustufen sind?

- c) Ein idealer Würfel wird viermal geworfen. Die Augenzahl „6“ wird als Erfolg angesehen.
7. Bestimme bei folgenden Aufgaben die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  und die Länge der Bernoullikette  $n$ . Beschreibe dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit in der Form  $B_{n,p}(k)$ , ohne sie zu berechnen.
- a) Bei einem Glücksrad ist ein Sektor von  $72^\circ$  schraffiert. Genau dann, wenn der angebrachte Pfeil nach dem Stillstand des Rads auf diesen schraffierten Sektor zeigt, erhält der Spieler einen Punkt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler bei zehnmaligem Drehen des Rades 5 Punkte erhält?
- b) In den vergangenen Jahren konnte man davon ausgehen, dass 60 % der vom Rinderzüchter Reuter gelieferten Mastbullen in die Schlachtwertklasse A einzustufen sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den nächsten zwölf Bullen, die Reuter liefern wird, genau 9 der Schlachtwertklasse A zuzuordnen sind?
- c) Eine Firma produziert 200er Packungen Leuchtdioden, die ca. 1 % defekte Leuchtdioden enthalten. Gib die Wahrscheinlichkeit an, dass sich in einer Packung genau 2 defekte Dioden befinden.
- d) Ein idealer Würfel wird viermal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt die Augenzahl „6“  
(1) genau zweimal    (2) genau dreimal    (3) gar nicht

8. Berechne folgende Ausdrücke!

a)  $3!$     b)  $2!$     c)  $2 \cdot 3!$     d)  $0!$     e)  $2 + 3!$     f)  $\frac{8!}{5! \cdot 3!}$

9. Ein Bernoulli-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit  $p = 40\%$  wird zwölfmal durchgeführt.

- a) Bestimme den Erwartungswert.
- b) Kennzeichne den Erwartungswert in der Wahrscheinlichkeitsverteilung.
- c) Beschreibe Eigenschaften des Erwartungswertes der Verteilung.

Binomialverteilung  $n = 12$   $p = 0,4$



- 10.** Untersuche am Beispiel des Schießens auf eine Torwand die Eigenschaften des Erwartungswertes einer Binomialverteilung, indem du folgende Fragen beantwortest.
- Ist der Erwartungswert eine Wahrscheinlichkeit?
  - Ist der Erwartungswert immer eine Anzahl?
  - Ist der Erwartungswert immer der wahrscheinlichste Wert?
  - Welche statistische Kenngröße wird mit einem Erwartungswert vorausgesagt, wenn das Bernoulli-Experiment sehr oft durchgeführt wird?
- 11.** Vergleiche den Erwartungswert einer Binomialverteilung
- mit der Häufigkeitsinterpretation einer Wahrscheinlichkeitsangabe
  - mit dem arithmetischen Mittel einer Häufigkeitsverteilung.
- 12.** Welche Aussagen gelten für eine Bernoulli-Kette der Länge  $n$ ? Berichtige falsche Aussagen.
- Es sind 0; 1; 2; ... oder  $n$  Erfolge möglich.
  - Es sind niemals mehr als  $n$  Erfolge möglich.
  - Es gibt  $n$  Möglichkeiten für die Anzahl der Erfolge.
  - Es gibt stets mehrere Pfade, die zu genau einem Erfolg führen.
  - Es gibt stets  $n$  Pfade, die zu  $n$  Erfolgen führen.
  - Es gibt nur einen Pfad, der zu Null Erfolgen führt.
- 13.** Berechne folgende Binomialkoeffizienten.
- $\binom{5}{2}$
  - $\binom{6}{3}$
  - $\binom{7}{4}$
  - $\binom{7}{3}$
  - $\binom{10}{2}$
  - $\binom{10}{8}$
- 14.** Zeige mithilfe der Definition des Binomialkoeffizienten, dass Folgendes gilt.
- $\binom{n}{n} = 1$
  - $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
  - $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- 15.** Auf einem Markt werden Sets mit 4 verpackten Kaffeetassen billig verkauft, aber darauf hingewiesen, dass 25 % der Tassen kleine Fehler aufweisen. Frau Hinz kauft ein Set.
- Wie viele fehlerhafte Tassen kann Frau Hinz in ihrem Set erwarten?
  - Ermittle die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass Frau Hinz beim Öffnen der Verpackung keine, genau eine, genau 2, genau 3 bzw. genau 4 fehlerhafte Tassen findet! Nutze ein Baumdiagramm.
  - Stelle die Binomialverteilung in einem Streifendiagramm dar und kennzeichne den Erwartungswert.
- 16.** Bei einem Wettbewerb im Ballzielwerfen trifft Peter mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %, mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % wirft er daneben.
- Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Peter bei 10 Würfen  
(1) genau 5    (2) höchstens 3    (3) mindestens 4    (4) 5 oder 6-mal nicht trifft.
  - Wie oft muss Peter mindestens werfen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er wenigstens einmal trifft, mindestens 0,95 beträgt?
- 17.** Die Keimgarantie für ihre Tulpenzwiebeln beziffert eine Gärtnerei auf 95 %. Jemand kauft dort einen Topf mit 5 Zwiebeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit keimen folgende Anzahlen? Veranschauliche an einem Streifendiagramm.
- alle
  - keine
  - mindestens eine
  - mehr als 4
  - weniger als 3

18. Bei einem Mathematik - Test sollen 8 Fragen im Multiple-Choice-Format beantwortet werden, wobei jeweils eine von 4 vorgegebenen Antworten richtig ist. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur durch das Raten folgende Anzahl von Fragen richtig beantwortet wird und diskutiere, unter welchen Bedingungen sich so ein Test als Leistungskontrolle eignen könnte.  
a) alle                      b) keine                      c) mindestens eine                      d) mehr als 5                      e) mindestens 7
19. Der Nahverkehr kennt das Fahrscheinverhalten der Fahrgäste:  
– 35 % besitzen einen Einzelfahrschein (E)  
– 60 % können eine Zeitkarte vorzeigen (Z)  
– 5 % sind Schwarzfahrer (S)  
a) Berechne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:  
A: Unter 20 Fahrgästen befindet sich genau 1 Schwarzfahrer  
B: Bei 37 kontrollierten Personen werden mindestens 2 Schwarzfahrer angetroffen  
C: Unter 30 Personen haben 20 eine Zeitkarte  
b) Ein Kontrolleur überprüft 50 Fahrgäste. Mit welcher Wahrscheinlichkeit können mindestens 28 und höchstens 32 Zeitkarten vorweisen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft der Kontrolleur auf 2 oder 3 Schwarzfahrer?
20. Bei einem Wettbewerb im Ballzielwerfen trifft Peter mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %. Wie oft muss Peter mindestens werfen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er wenigstens einmal trifft, mindestens 0,95 beträgt?
21. Ein Baumarkt verkauft nach einem Wasserschaden alles verbilligt. Bei den Elektroartikeln ist nicht erkennbar, ob sie noch funktionstüchtig sind. Es wird geschätzt, dass 50 % der Artikel unbrauchbar sind. Charly benötigt 3 Schalter. Sicherheitshalber kauft er 6 Stück.  
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die 6 Schalter ausreichend?  
b) Charly möchte mindestens eine 90 %ige Sicherheit haben, dass die Zahl der gekauften Schalter ausreichend ist. Wie viele Schalter sollte Charly kaufen?  
c) Welche Sicherheit, dass die Zahl ausreichend ist, hat Charly, wenn er 10 Schalter kauft?
22. Zeichne unter Nutzung von Tafeln für die Binomialverteilung Streifendiagramme für Binomialverteilungen mit  $n = 5$  und folgenden Erfolgswahrscheinlichkeiten. Begründe, warum der längste Streifen immer weiter nach rechts „wandert“.  
a)  $p = 0,2$                       b)  $p = 0,4$                       c)  $p = 0,5$                       d)  $p = 0,6$                       e)  $p = 0,8$
23. Zeichne unter Nutzung von Tafeln für die Binomialverteilung Diagramme für Binomialverteilungen mit der Erfolgswahrscheinlichkeit 0,5 und folgenden Werten für  $n$  und begründe die Änderung der Form der Verteilung.  
a)  $n = 5$                       b)  $n = 10$                       c)  $n = 50$
24. Kilian löst Sachaufgaben gern anhand einer Skizze. In einem Diagramm markiert er sich deshalb bei Aufgaben zu Binomialverteilungen die gesuchten und die gegebenen Größen. Allerdings ist das Zeichnen eines Streifendiagramms bei großem  $n$  sehr aufwändig. Deshalb erstellt Kilian sich eine Skizze in folgenden Schritten:  
(1) Zeichnen der Achsen ohne Einteilung  
(2) Markieren von 0 und  $n$  als Begrenzung auf der  $k$ -Achse  
(3) Markieren von  $E = n \cdot p$  an einer geschätzten Stelle zwischen 0 und  $n$   
(4) Freihandzeichnung einer glockenförmigen Kurve von 0 bis  $n$  mit der höchsten Stelle bei  $E$ .  
Diskutiere die Idee Kilians.

## 2. Wissen und Können in der Bewertung von Hypothesen

### *Hinweise:*

- Diese Inhalte sollten nicht als eigenständiges Stoffgebiet, sondern in enger Verbindung mit der Binomialverteilung behandelt werden. Sie dienen der inhaltlichen Vorbereitung auf die Denkweisen der beurteilten Statistik, die in der Klasse 12 explizit behandelt werden.
- Es wird an dieser Stelle auf eine Strukturierung der Ziele nach ihrem Beherrschungsgrad verzichtet, da das Endniveau erst in Klasse 12 zu erreichen ist. (vgl. unsere Planungsvorschläge für Klasse 12)

### **Ziele**

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- man Fehler machen kann, wenn man von einer Stichprobe auf eine Gesamtheit schließt,
- die mithilfe der Binomialverteilung berechneten Wahrscheinlichkeiten Prognosen für die zu erwartenden (absoluten bzw. relativen) Häufigkeiten beim wiederholten Ablauf des Vorgangs der Kettenlänge  $n$  sind,
- aus den Ergebnissen nach Abschluss eines Experimentes (Untersuchung einer Stichprobe) Schlussfolgerungen über die angenommene Erfolgswahrscheinlichkeit gezogen werden können,
- man zur Bewertung der eingetretenen Ergebnisse nicht Einzelwahrscheinlichkeiten betrachtet, sondern summierte Wahrscheinlichkeiten (mehr als ..., weniger als ...),
- man von einer zufälligen Abweichung vom Erwartungswert spricht, wenn die Anzahl der beobachteten Erfolge vom Erwartungswert nicht oder nur wenig abweicht,
- man als Maß für die Größe der Abweichung die Wahrscheinlichkeit verwendet, dass die beobachtete Anzahl von Erfolgen oder eine noch größere Abweichung eintritt,
- man von einer signifikanten Abweichung vom Erwartungswert spricht, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass mehr oder weniger Erfolge als die erzielten eintreten, sehr gering ist,
- bei einer signifikanten Abweichung vom Erwartungswert das Ergebnis des Experimentes gegen die angenommene Erfolgswahrscheinlichkeit spricht und diese in Zweifel zu ziehen bzw. abgelehnt werden muss,
- die Wahrscheinlichkeit, bei deren Unterschreitung eine Abweichung als signifikant angesehen wird, als Signifikanzniveau  $\alpha$  bezeichnet wird,
- die Größe des Signifikanzniveaus vom Sachverhalt und den beteiligten Personen abhängt,

Die Schülerinnen und Schüler können

- eingetretene Ergebnisse bei Bernoulli-Ketten auf die angegebene Weise bewerten,
- die Anzahl der Erfolge bestimmen, so dass die Summe der Einzelwahrscheinlichkeit kleiner als eine bestimmte Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  ist, wenn  $n$ ,  $p$  und  $\alpha$  gegeben sind.



## Aufgaben

25. In einem Hotel mit 200 Zimmern fallen an heißen Tagen die Klimaanlage mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % aus.
- Skizziere die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Ausfall der Klimaanlage in einem Diagramm und markiere den Erwartungswert.
  - Welche der folgenden Ereignisse würdest du als „seltene“ Ereignisse einordnen? Begründe. Kennzeichne die Ereignisse verschiedenfarbig in deinem Diagramm.  
A: An einem heißen Tag fallen weniger als 20 Klimaanlage aus. ( $P = 0,00005$ )  
B: An einem heißen Tag fallen mehr als 50 Klimaanlage aus. ( $P = 0,02357$ )  
C: An einem heißen Tag fallen weniger als 35 Klimaanlage aus. ( $P = 0,16561$ )
26. Bei Getränkehersteller Durstig wird Fruchtsaft automatisch in Literflaschen abgefüllt. Herr Durstig garantiert, dass in höchstens 5 % aller Abfüllungen die Flaschen zu wenig Inhalt aufweisen. Herr Schluck kauft eine Sechserpackung des Saftes.
- Wie viele Flaschen mit weniger Inhalt kann Herr Schluck erwarten?
  - Herr Schluck findet in seiner Sechserpackung eine Flasche, die zu wenig Inhalt aufweist. Sollte er an der Garantie von Hersteller Durstig zweifeln? Begründe.
27. Eine Bäckerei steht unter dem Verdacht, Brote mit zu geringer Masse zu backen. Es ist zulässig, dass 5 % der Brote etwas zu leicht sind. Ein Gutachter kommt unangekündigt, wählt 100 Brote zufällig aus und bestimmt ihre Masse. Der Gutachter findet 7 Brote mit zu geringer Masse. Wie sollte er sich entscheiden?
28. Eine Gärtnerin kauft ihr Saatgut seit vielen Jahren beim gleichen Hersteller, der eine Keimfähigkeit von mindestens 95 % gewährt. Im vergangenen Jahr war sie mit ihren Zuchterfolgen nicht zufrieden. Sie vermutet, dass eine geringere Keimfähigkeit der Samen die Ursache war. In diesem Jahr möchte sie dies genauer untersuchen und die Keimung von 50 Samen einer Sorte beobachten. Wenn wieder weniger als 47 Samen keimen, wird sie sich beschweren und finanziellen Ausgleich fordern. Beurteile den Plan der Gärtnerin.
29. Beim Abfüllen von Konservendosen wird nach Herstellerangaben die Mindesteinwaage bei 90 % der Dosen eingehalten. Herr Kontra untersucht die Masse von 8 Doseninhalten dieses Herstellers, um die Einhaltung der Angabe zu untersuchen.
- Wie viele Dosen mit einem zu geringen Inhalt sind zu erwarten?
  - Skizziere eine entsprechende Binomialverteilung.
  - Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Kontra mehr als eine, mehr als 2 bzw. mehr als 3 Dosen mit zu geringem Inhalt findet.
  - Bei der Untersuchung der 8 Dosen hat Herr Kontra 2 gefunden, die zu wenig Inhalt hatten. Er beschwert sich schriftlich bei der Dosenfirma: „Ich habe 8 Dosen geöffnet und in 25 % davon einen zu geringen Inhalt gefunden. Ihre Angabe, dass 90 % der Dosen den Mindestinhalt enthalten, kann ich nur als Betrug am Kunden bezeichnen.“ Wie würdest du als Firmenchef in dem Antwortschreiben argumentieren?
30. Eine Umfrage hat ergeben, dass 70 % der Wahlberechtigten eines Landes den Spitzenpolitiker einer bestimmten Partei kennen. Für eine TV-Sendung mit dem Politiker wurden 5 Bürger zufällig ausgewählt.
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass 0; 1; 2; 3; 4 bzw. 5 der ausgewählten Bürger den Politiker kennen und stelle die Verteilung grafisch dar.
  - Würdest du den Bekanntheitsgrad von 70 % anzweifeln, wenn weniger als 2 Bürger in der TV-Sendung den Politiker kennen?

### **3. Wissen und Können zur bedingten Wahrscheinlichkeit**

#### **Ziele**

##### **Reaktivierbares Wissen und Können**

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen Schreib- und Sprechweisen der bedingten Wahrscheinlichkeit und wissen, dass diese an den Pfaden eines Baumdiagramms ab der zweiten Stufe auftreten,
- können bedingte Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Baumdiagrammen und ihrer Kenntnisse zu den Pfadregeln berechnen,
- wissen, dass man die Ergebnisse einer statistischen Untersuchung, in der an jedem Objekt zwei Merkmale betrachtet werden, in einer Vierfeldertafel darstellen kann und können zu gegebenen Daten eine Vierfeldertafel aufstellen
- wissen, dass man aus den Daten einer Vierfeldertafel zwei verschiedene Baumdiagramme gewinnen kann, können diese anfertigen und die jeweiligen Pfadwahrscheinlichkeiten interpretieren,
- können zu zweistufigen Baumdiagrammen eine Vierfeldertafel aufstellen
- wissen, dass die beiden Merkmale der untersuchten Objekte voneinander abhängig oder voneinander unabhängig sein können,
- können mithilfe der Vierfeldertafel oder eines Baumdiagramms ermitteln, ob die beiden Merkmale voneinander abhängig oder voneinander unabhängig sind,
- können mögliche Ursachen für die Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der Merkmale angeben, in dem sie die jeweils untersuchten Vorgänge und deren Bedingung betrachten

##### **Exemplarisches**

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen folgende Einsichten gewonnen:

- Aus den Daten einer Vierfeldertafel lassen sich entsprechend den beiden möglichen Baumdiagrammen zwei Sichtweisen ableiten, die unterschiedliche bedingte Wahrscheinlichkeiten verwenden und zu unterschiedlichen Aussagen führen können.
- Mithilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten, dies sich formal mit umgekehrten Baumdiagrammen ermitteln lassen, kann man die Wahrscheinlichkeit eines unbekannten Zustandes (einer Hypothese) nach neuen Informationen berechnen.
- Informationen zu Hypothesen über einen unbekannten Zustand, dessen relative Häufigkeit in einer Population sehr gering ist, ändern die Wahrscheinlichkeit der Hypothese in überraschender Weise manchmal nicht in dem Maße wie man intuitiv vermutet. Eine Aufklärung dieser fehlerhaften Intuition ist durch die Betrachtung von Erwartungswerten bei angenommenen Stichprobenumfängen möglich.

##### **Hinweise zur Behandlung der bedingten Wahrscheinlichkeit:**

- Betrachtungen zur bedingten Wahrscheinlichkeit sollten bereits bei der Einführung der Pfadregeln in Klasse 8 beginnen. Im neuen Rahmenplan für die Klasse 10 ist eine Weiterführung des Wissens und Könnens der Schüler zur bedingten Wahrscheinlichkeit in dem hier gekennzeichneten Umfang vorgesehen. In der Klasse 12 soll dann künftig eine abschließende Behandlung auch mit formalen Mitteln erfolgen.
- Es sind zwei unterschiedliche Schreibweise für bedingte Wahrscheinlichkeiten gebräuchlich:  $P_B(A)$  und  $P(A | B)$ . Beide Schreibweisen haben Vor- und Nachteile. Bei der Schreibweise  $P_B(A)$  wird deutlich, dass es sich bei bedingten Wahrscheinlichkeiten um ein neues

neues Wahrscheinlichkeitsmaß handelt. Wenn das Ereignis  $B$  in Worten ausgedrückt werden soll, ist Schreibweise  $P(A | B)$  zu empfehlen. Es ist allerdings zu beachten, dass es sich bei „ $A | B$ “ nicht um eine Verknüpfung von Ereignissen im üblichen Sinne handelt. Die Schüler sollten beide Schreibweisen kennen, da beide ihnen auch später begegnen können.

- Die Lösung von Aufgaben sollte in Klasse 10 nur mithilfe von Baumdiagrammen erfolgen. Die Schüler müssen dazu mit der formalen Technik des Vertauschens der Reihenfolge der Stufen eines Baumdiagramms (umgekehrtes Baumdiagramm) vertraut gemacht werden. Dabei ist zu beachten, dass ein umgekehrtes Baumdiagramm inhaltlich etwas ganz anderes bedeuten kann, insbesondere bei der Lösung von Aufgaben des Typs 3 und 4 (s. u.). Der Satz von Bayes sollte erst in Klasse 12 formuliert werden.
- Auch bei Aufgaben zur bedingten Wahrscheinlichkeit ist es in vielen Fällen angebracht, eine Prozessbetrachtung durchzuführen. Das bedeutet, nach den Vorgängen zu fragen, in deren Verlauf die einzelnen Ergebnisse entstanden sind und die Bedingungen dieser Vorgänge sowie ihren Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse zu betrachten.
- Bei der Behandlung der bedingten Wahrscheinlichkeit sollten folgende Aufgabentypen unterschieden werden.

Aufgabentyp 1: Es handelt sich um einzelne Vorgänge in der Wirklichkeit, die nacheinander ablaufen und die in einem inhaltlichen Zusammenhang stehen. Sie sind dann für die Betrachtung bedingter Wahrscheinlichkeiten interessant, wenn das Eintreten eines Ergebnisses die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse des nachfolgenden Vorgangs beeinflussen kann. Ein typischer Fall ist das Ziehen von Kugeln aus Urnen ohne Zurücklegen oder Vorgänge, die sich auf dieses Modell zurückführen lassen.

Aufgabentyp 2: Es handelt sich um die Betrachtung von Ergebnissen statistischer Untersuchungen, bei denen an den Objekten der Grundgesamtheit die Ausprägungen zweier Merkmale ermittelt wurden. Mit der statistischen Untersuchung werden sehr viele gleichzeitig in der Wirklichkeit ablaufende zufällige Vorgänge erfasst, deren Ergebnisse zum gleichen Zeitpunkt gemessen werden. Eine Darstellung der Daten kann mithilfe einer Vierfeldertafel sowie mit Baumdiagrammen erfolgen. Die Schüler sollten Vierfeldertafeln mit absoluten Zahlen und Baumdiagramme ineinander überführen können. Durch die Berechnung und den Vergleich von bedingten Wahrscheinlichkeiten, die hier Modelle von Verhältnissen von Daten sind, kann untersucht werden, ob die untersuchten Merkmale der Objekte voneinander abhängig oder unabhängig sind.

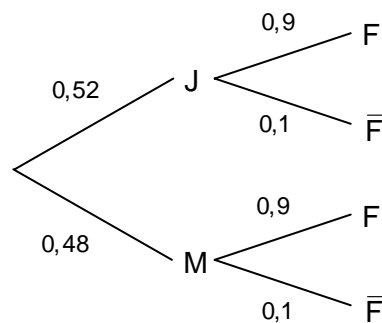
Aufgabentyp 3: Es handelt sich um einen einzelnen in der Regel nicht wiederholbaren Erkenntnisprozess, der im Kopf eines bestimmten Menschen abläuft. Dabei geht es um Wahrscheinlichkeitsaussagen über ein eingetretenes aber dem Menschen unbekanntes Ergebnis eines zufälligen Vorgangs (z. B. eine Krankheit). Eine weitere Information über das unbekannte Ergebnis wird als Bedingungen aufgefasst und ändert die Wahrscheinlichkeitsaussage über das unbekannte Ergebnis. Ein spezieller Fall des Aufgabentyps 3 ist Betrachtung von Aussagen über ein Merkmal eines Objektes, das sehr selten auftritt. Ein typischer Fall ist die Diagnose einer sehr seltenen Krankheit mit einem medizinischen Testverfahren. Dabei treten überraschende Ergebnisse auf.

- Zur Veranschaulichung einiger Sachverhalte bietet es sich besonders beim Aufgabentyp 3 und 4 an, die Wahrscheinlichkeit in einem Baumdiagramm durch fiktive Zahlen (z.B. von 1000 Personen ausgehend) zu ersetzen.

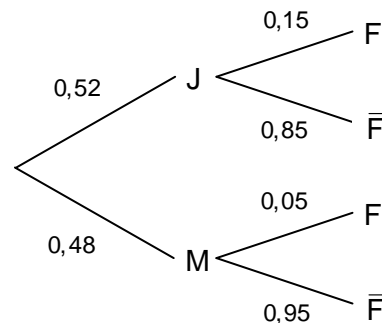
## Aufgaben

1. Kai hat sich aus den Daten einer statistischen Erhebung zwei Baumdiagramme gezeichnet.

(1)



(2)



J und M bedeutet „vierzehnjähriger Junge“ oder „vierzehnjähriges Mädchen“ und F beschreibt den Fahrradbesitz einer Person.

J und M bedeutet „vierzehnjähriger Junge“ oder „vierzehnjähriges Mädchen“ und F beschreibt die Mitgliedschaft einer Person in einer Fußballmannschaft.

- Beschreibe die Sachverhalte und entscheide jeweils, ob ein Merkmal von einem anderen abhängig ist.
  - Untersuche jeweils die Bedingungen der Vorgänge, in denen das Merkmal F untersucht wurde und finde mögliche Ursachen für die Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der Merkmale.
2. Einige Menschen haben eine angeborene Störung des Farbsinns, die Rotgrün-Blindheit. Diese Personen werden im folgenden Text farbenblind genannt. Während eines Fahrschultests wurden 2000 Personen (männlich oder weiblich) auf diese Krankheit untersucht. Die Ergebnisse sind in der angegebenen Vierfeldertafel dargestellt.
- Stelle die Ergebnisse und deren Wahrscheinlichkeiten in einem Baumdiagramm dar.
  - Ist die Farbblindheit in dieser Population geschlechtsabhängig?
3. Zeige, dass die beiden Artikel auf denselben statistischen Daten beruhen können. Worauf wollten die jeweiligen Autoren der Artikel besonders aufmerksam machen?

	farbenblind	nicht farbenblind
männlich	80	920
weiblich	4	996

### Eltern wünschen einen höheren Bildungsabschluss für ihre Kinder

37 % aller 10- bis 16-Jährigen besuchen derzeit ein Gymnasium. Jedoch nur 35 % dieser Jugendlichen haben Eltern, die selbst zum Gymnasium gegangen sind. Umgekehrt findet man unter den Schülerinnen und Schülern, die eine Haupt- oder Realschule besuchen, nur 8 %, deren Eltern ein Gymnasium absolvierten. (dpa)

### Eltern bevorzugen die Schulform, die sie selbst absolviert haben

72 % der Eltern, die selbst ein Gymnasium besuchten, schicken heute ihr Kind wieder auf ein Gymnasium. Bei den Eltern, die eine Haupt oder Realschule absolvierten, ist es ähnlich: 71 % lassen ihr Kind ebenfalls eine Schule dieser Schulform besuchen. (dpa)

4. In einem Landkreis wurde am 1. September den Journalisten folgende Statistik zugänglich gemacht. Sie erfasst, welchen Abschluss ein Schulabgänger des diesjährigen Jahrganges hat und ob er zum Ausbildungsbeginn eine Lehrstelle hat. Finde mögliche Überschriften für einen Zeitungsartikel, nachdem du 2 Baumdiagramme entwickelt hast, die unterschiedliche 1. Stufen haben.

	Hauptschulabschluss	Realschulabschluss
Lehrstelle	50	850
Keine Lehrstelle	100	200

5. Im Schuljahr 2000/2001 erwarben von den 926 700 Absolventen der allgemein bildenden Schulen in Deutschland 214 000 die allgemeine Hochschulreife, darunter 120 000 von insgesamt 453 400 Mädchen.
- Stelle die Daten in einer Vierfeldertafel dar.
  - Gib die beiden zugehörigen Baumdiagramme an und interpretiere die jeweiligen Pfadwahrscheinlichkeiten.
  - Untersuche den Zusammenhang zwischen dem Erwerb der allgemeinen Hochschulreife und dem Geschlecht.
  - Betrachte die Bedingungen der untersuchten Vorgänge, die zur allgemeinen Hochschulreife führen und versuche Ursachen für die in c) festgestellten Ergebnisse zu finden.
  - Entwirf mit den berechneten bedingten Wahrscheinlichkeiten einen Zeitungsartikel.
  - Suche in Zeitungen Daten, die in ähnlicher Weise dargestellt und interpretiert werden können.
6. Zur Diagnose seltener aber gefährlicher Krankheiten (z.B. Aids) existieren sehr empfindliche Testverfahren. So ergibt ein Aidstest mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,8 % einen positiven Befund, wenn eine HIV-Infektion vorliegt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % fällt bei einem Gesunden der Aidstest negativ (d.h. nicht infiziert) aus. In der Bundesrepublik Deutschland sind in der Altersgruppe von 18 bis 60 Jahren etwa 0,1 % mit dem Virus infiziert.
- Bei einer Blutuntersuchung auf Aids ergibt sich bei einer Person im Alter von 20 Jahren ein positiver Befund. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person tatsächlich infiziert ist, wenn keine weiteren Informationen über sie berücksichtigt werden?
  - Welche Konsequenzen ergeben sich für den behandelnden Arzt nach dem ersten Test?
  - Wie ändert sich diese Wahrscheinlichkeit nach einem zweiten positiven Testergebnis?
  - Die Wahrscheinlichkeit einer vorliegenden Infektion nach dem ersten Test ist ein überraschendes Ergebnis. Man versteht es besser, wenn man mit fiktiven Häufigkeiten rechnet. Betrachte dazu 1 000 000 zufällig ausgewählte Personen und berechne mithilfe der gegebenen Wahrscheinlichkeiten folgende Häufigkeiten bzw. Anteile:
    - Anzahl der infizierten und Anzahl der nicht infizierten Personen,
    - Gesamtzahl der Personen, die einen positiven Befund erhalten,
    - Anteil der infizierten Personen unter denen, die einen positiven Befund erhalten.
7. Anne, Ben und Christian haben nach einer Aufnahmeprüfung für ein Schauspielstudium erfahren, dass nur einer von ihnen angenommen wird. Jeder rechnet sich gleich große Chancen aus.
- Anne lauscht vor der Tür und hört, dass Christian mit Sicherheit nicht angenommen ist. Wie groß ist nun ihre Chance? Natürlich verrät sie ihr Wissen nicht.
  - Ben bittet den Protokollanten heimlich um einen Hinweis. Dieser darf nichts über Ben sagen, aber auch nicht, wer gewonnen hat. Wahrheitsgemäß sagt er, dass Christian nicht angenommen wurde. Da nun nur noch Anne und er selbst in Frage kommen, glaubt er, dass er jetzt mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % angenommen wurde. Ist das richtig?
8. Es seien A und B zwei Ereignisse mit  $0 < P(A) < 1$  und  $0 < P(B) < 1$ . Berechne aus den gegebenen Wahrscheinlichkeiten die gesuchten bedingten Wahrscheinlichkeiten mithilfe eines geeigneten Baumdiagramms.
- geg.:  $P(A) = 0,6$        $P(A \text{ und } B) = 0,3$        $P(B \mid \text{nicht } A) = 0,2$       ges.:  $P(B \mid A)$
  - geg.:  $P(B) = 0,2$        $P(\text{nicht } A \text{ und } B) = 0,09$       ges.:  $P(\text{nicht } A \mid B)$
  - geg.:  $P(\text{nicht } A) = 0,4$        $P(A \text{ und } B) = 0,024$       ges.:  $P(\text{nicht } B \mid A)$

## 1.6 Systematisierung von Funktionen

### Ziele

#### 1. Funktionsbegriff

##### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- der Funktionsbegriff in verschiedenen Situationen verwendet wird, in denen Abhängigkeiten oder Zusammenhänge zwischen zwei Größen beschrieben werden,
- es verschiedene Darstellungsmöglichkeiten für Funktionen gibt (wörtliche Beschreibung, Wertetabelle, Graphen, Funktionsgleichung),
- Funktionen stets bestimmte Eigenschaften zugeordnet werden (Definitionsbereich, Wertebereich, Verhalten im Unendlichen, Asymptoten, Nullstellen, Monotonie bzw. Änderungsverhalten, Symmetrie des Graphen, besondere Punkte).

Die Schülerinnen und Schüler können

- verschiedene Darstellungsmöglichkeiten für Funktionen ineinander umwandeln (z. B.: Gleichungen und Tabellen in Graphen, Gleichungen in Tabellen, Graphen in wörtliche Beschreibungen).

##### Reaktivierbares Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler können

- bestimmten Sachverhalten Funktionen zuordnen bzw. Beispiele für Funktionen in der Praxis nennen,
- in Formeln aus der Geometrie oder den Naturwissenschaften Zusammenhänge erkennen und interpretieren,
- Funktionsgleichungen erkennen und in die typische Schreibweise  $y = \dots$  umwandeln.

##### Exemplarisches

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- auch geometrische Abbildungen als Funktionen angesehen werden können,
- es bei der Untersuchung funktionaler Zusammenhänge oft sinnvoll ist zu untersuchen, wie sich eine Größe bei Veränderungen einer anderen ändert und können solche funktionalen Betrachtungen bei Füll- und Bewegungsvorgängen anstellen.

## 2. Merkmale von Funktionen

### Monotonie

##### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass beim Monotonieverhalten die Frage gestellt wird: „Wie ändert sich  $y$ , wenn  $x$  wächst?“,
- können inhaltliche Betrachtungen an Graphen und verbale Beschreibungen ohne Nutzung von Ungleichungen formulieren.

##### Reaktivierbares Wissen und Können

Die Schüler können

- das Änderungsverhalten von Funktionen unter verschiedenen Fragestellungen inhaltlich beschreiben, wenn ihre Graphen gegeben sind,
- die allgemeine Frage „Wie ändert sich  $y$ , wenn  $x$  wächst?“ konkreter fassen, indem sie

fragen: „Wie ändert sich  $y$ , wenn  $x$  um 1 wächst?“ oder „Wie ändert sich  $y$ , wenn  $x$  vervielfacht wird?“,

- Intervalle miteinander vergleichen, indem sie sich fragen: „In welchen Intervallen wächst  $y$  stärker/schwächer bzw. fällt  $y$  stärker/ schwächer?“.

### ***Verhalten von Funktionen mit waagerechten und senkrechten Asymptoten im Unendlichen und an Polstellen***

#### **Sicheres Wissen und Können**

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- „ $\infty$ “ das Symbol für „Unendlich“ ist,
- der Verlauf des Graphen für  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  betrachtet werden muss, wenn das Verhalten im Unendlichen betrachtet werden soll,
- der Verlauf des Graphen für  $x \rightarrow x_p$  von rechts und links betrachtet werden muss, wenn das Verhalten an Polstellen betrachtet werden soll,
- das Verhalten im Unendlichen und an Polstellen durch Asymptoten beschrieben werden kann,
- Potenzfunktionen mit  $y = x^{-n}$  Polstellen besitzen,
- die Polstellen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden.

Die Schülerinnen und Schüler können

- die Schreibweise  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  und  $x \rightarrow x_p$  und die entsprechenden Sprechweisen „ $x$  geht gegen  $\infty$ “ verwenden,
- Polstellen und Asymptoten im Graphen erkennen,
- Vermutungen über das Verhalten im Unendlichen / an Polstellen anstellen,
- inhaltliche Betrachtungen über das Verhalten im Unendlichen/ an Polstellen anhand eines Graphen vornehmen.

#### **Reaktivierbares Wissen und Können**

Die Schüler können

- Polstellen bzw. Gleichungen für waagerechte und senkrechte Asymptoten aus einem gegebenen Graphen ablesen,
- durch funktionale Betrachtungen von Funktionstermen das Verhalten der Funktion an Polstellen und im Unendlichen begründen.

### ***Nullstellen***

#### **Sicheres Wissen und Können**

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- Nullstellen spezielle Stellen auf der  $x$ -Achse sind,
- Nullstellen Berührungs- oder Schnittstellen sein können,
- Nullstellen  $x_0$  stets mit der Gleichung  $f(x_0) = 0$  berechnet werden und dass sie im Definitionsbereich liegen müssen.

Die Schülerinnen und Schüler können

- Nullstellen von Funktionen im Graphen erkennen.

#### **Reaktivierbares Wissen und Können**

Die Schülerinnen und Schüler können:

- Nullstellenberechnungen mit einem CAS vornehmen,
- die Begriffe „Abszisse“, „Ordinate“, „Argument“ und „Nullstelle“ richtig benutzen und in Beziehung zueinander setzen.

### *Maximale und minimale Funktionswerte*

#### **Sicheres Wissen und Können**

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- Funktionen minimale und maximale Funktionswerte besitzen können, die man Extremwerte nennt,
- Funktionsgraphen Hoch- und Tiefpunkte besitzen können, die man Extrempunkte nennt.

Die Schülerinnen und Schüler können

- an gegebenen Graphen Maximum, Minimum, Hochpunkt und Tiefpunkt (Extrempunkte) ablesen und die Eigenschaften beschreiben,
- Skizzen von Graphen anfertigen, wenn die Art eines Extremums gegeben ist.

#### **Reaktivierbares Wissen und Können**

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- man begriffliche Unterscheidungen von Maximum, Minimum, Hochpunkt und Tiefpunkt vornehmen muss.

#### **Exemplarisches**

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- man häufig Extremwertaufgaben in der Praxis lösen muss.

### *Symmetrie von Funktionen*

#### **Sicheres Wissen und Können**

Die Schülerinnen und Schüler:

- haben bildliche Vorstellungen von Graphen achsen- und punktsymmetrischer Funktionen.

#### **Reaktivierbares Wissen und Können**

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass es zur y-Achse achsensymmetrische (gerade) und zum Ursprung punktsymmetrische (ungerade) Funktionen gibt, deren Symmetrieeigenschaften mithilfe von Gleichungen beschrieben werden können,
- können den Nachweis für gerade und ungerade Funktionen mithilfe von Gleichungen führen,
- können Symmetrieuntersuchungen mit einem CAS vornehmen.

#### **Exemplarisches**

Die Schüler haben erlebt, dass sich die Eigenschaften der „linken“ Seite eines Graphen aus der „rechten“ Seite herleiten lassen, wenn die Art der Symmetrie bekannt ist.



### 3. Funktionen mit Parametern

#### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler

- wissen, dass man bei allgemeinen Beschreibungen wie  $y = x^n$  die Variable  $n$  als Parameter bezeichnet,
- können die Graphen folgender Prototypen skizzieren und daran die wesentlichen Eigenschaften von Potenz- und Exponentialfunktionen beschreiben:
  - $y = x$ ;  $y = x^2$ ;  $y = x^3$
  - $y = x^{-1}$ ;  $y = x^{-2}$
  - $y = \sqrt{x}$
  - $y = 2^x$ ;  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

#### Reaktivierbares Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- man Funktionen durch Parameter verändern kann und dass es Konventionen im Gebrauch der Parameter gibt ( $y = a \cdot f(x)$ ,  $y = f(x) + e$  bzw.  $y = f(x + d)$  mit  $a, e, d \in \mathbb{R}$ )
- die Parameter  $a$ ,  $e$  und  $d$  auf alle Funktionen die gleiche Wirkung haben (Verallgemeinerung),
  - $y = a \cdot f(x)$ : Stauchung, Streckung in  $y$ -Richtung bzw. Spiegelung an  $x$ -Achse; Veränderung des Änderungsverhaltens der Funktion,
  - $y = f(x) + e$ : Verschiebung des Graphen um  $e$  in  $y$ -Richtung; Veränderung des „Anfangswertes“,
  - $y = f(x + d)$ : Verschiebung des Graphen um  $-d$  in  $x$ -Richtung; Veränderung des „Bezugssystems“ (man betrachtet den Prozess früher oder später).

Die Schülerinnen und Schüler können

- für Funktionen der Formen  $y = a \cdot f(x)$ ,  $y = f(x) + e$  bzw.  $y = f(x + d)$  Graphen skizzieren, Nullstellen und besondere Punkte ablesen sowie die Monotonie, das Verhalten im Unendlichen und das Symmetrieverhalten des Graphen beschreiben sowie Polstellen und Asymptoten erkennen, wenn  $f$  eine Grundfunktion ist.

#### Exemplarisches

Die Schülerinnen und Schüler haben an Beispielen erlebt, dass

- man aus beliebigen Funktionen  $f$  neue Funktionen der Formen  $y = a \cdot f(x)$ ,  $y = f(x) + e$  bzw.  $y = f(x + d)$  erzeugen und für diese Graphen skizzieren, Nullstellen und besondere Punkte ablesen sowie die Monotonie, das Verhalten im Unendlichen und das Symmetrieverhalten des Graphen beschreiben sowie Polstellen und Asymptoten erkennen kann.

### 4. Bestimmen von Funktionen zu gegebenen Bedingungen

#### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler kennen:

- Prototypen für lineares und exponentielles Wachstum.

#### Reaktivierbares Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler können

- Funktionsgleichungen der Formen  $y = a \cdot f(x)$ ,  $y = f(x) + e$  bzw.  $y = f(x + d)$  für praktische Sachverhalte aufstellen bzw. die Parameter im Kontext interpretieren.

## Aufgaben

### 1. Funktionsbegriff

#### Sicheres Wissen und Können

1. Fülle die Lücken aus und löse folgende Aufträge für die Funktion mit der Gleichung  
 $y = 3x - 2$ .

Dem **Argument**  $x = 4$  wird der **Funktionswert**  $y = \dots$  zugeordnet.

Der Funktionswert  $y = 7$  gehört zum Argument  $x = \dots$ .

Eine Funktion mit dieser **Funktionsgleichung** heißt ..... Funktion.

Ihre graphische Darstellung im Koordinatensystem ergibt stets eine .....

Um den Graphen der Funktion zu zeichnen, könnte man wie folgt vorgehen :

.....  
 .....

Zeichne den Graphen der Funktion.

Wenn der **Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse** gefragt ist, muss man  
 ..... = 0 setzen und .... bestimmen.

Gib die Koordinaten des Schnittpunktes  $S_y$  des Graphen mit der y-Achse  
 an: .....

Wenn der **Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse** gefragt ist, muss man  
 ..... = 0 setzen und .... bestimmen und den Punkt  $S_x$  angeben.

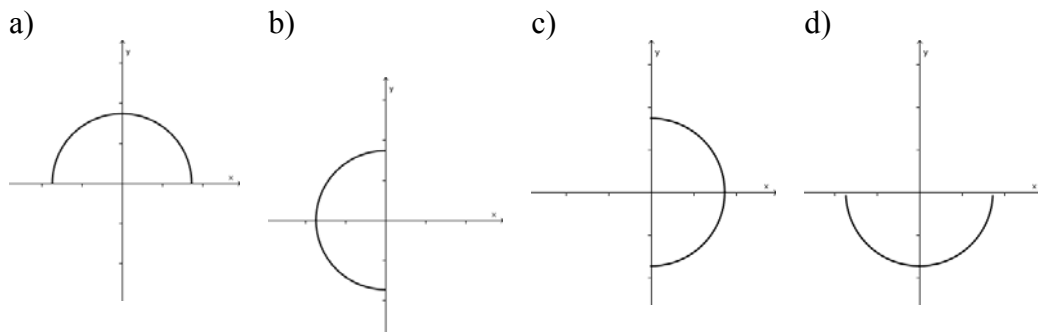
Gib die Koordinaten von  $S_x$  an: .....

**Nullstellen** einer Funktion sind solche Elemente aus dem Definitionsbereich,

.....

Gib die Nullstellen der Funktion an: .....

2. Welcher der dargestellten Kurven ist Graph einer Funktion?



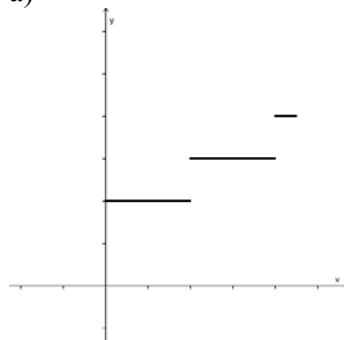
3. Können die folgenden Sachverhalte durch Funktionen beschrieben werden? Wenn ja, stelle sie geeignet dar.
- In den letzten 5 Jahren ist mein Einkommen so gewachsen, dass die jährliche Gehaltserhöhung gleich war.
  - In den letzten 5 Jahren ist mein Einkommen jährlich um 1 % gewachsen.
  - In den letzten 5 Jahren hatte ich stets dasselbe Einkommen.
  - In den letzten 5 Jahren hatte ich kein Einkommen.

### Reaktivierbares Wissen und Können

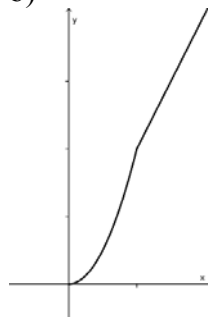
4. Die Formel  $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$  gilt für den freien Fall.
- Beschreibe den funktionalen Zusammenhang, den die Formel modelliert. Beachte den Definitionsbereich und die Gültigkeitsbedingungen.
  - Skizziere den Zusammenhang in einem Diagramm in einem selbst gewählten Intervall.

5. Schreibe eine Geschichte zu folgenden Graphen.

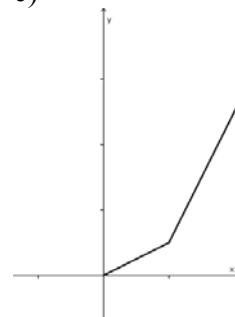
a)



b)



c)



6. Beantworte folgende Fragen und begründe jeweils deine Antwort durch Beispiele bzw. Gegenbeispiele.
- Lässt sich jede Funktion in Form einer Gleichung darstellen?
  - Lässt sich jede Gleichung als Gleichung einer Funktion auffassen?
  - Kann man zu jeder Funktion eine Wertetabelle angeben, die die Funktion vollständig beschreibt?
  - Kann man jede Tabelle als Darstellung einer Funktion ansehen?
  - Lässt sich jede Funktion graphisch darstellen?
  - Lässt sich jede Linie in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als Graph einer Funktion auffassen?
7. Welche der folgenden Gleichungen können als Funktionsgleichung für eine Funktion mit einer Veränderlichen aufgefasst werden? Schreibe in diesen Fällen die Funktionsgleichung in der üblichen Form  $y = f(x)$  und gib den Definitionsbereich an.
- a)  $x + y = 1$       b)  $x^2 + y^2 = 1$       c)  $x \cdot y = 1$       d)  $y = 1$       e)  $x = 1$       f)  $x^2 + y = 1$

### Exemplarisches

8. Begründe, dass die geometrische Abbildung „Verschiebung“ eine Funktion ist. Gib eine Zuordnungsvorschrift sowie den Definitions- und Wertebereich der Funktion an. Ist es möglich, die Funktion „Verschiebung“ durch eine Gleichung, einen Graphen oder eine Wertetabelle anzugeben?

## 2. Merkmale von Funktionen

### Monotonie

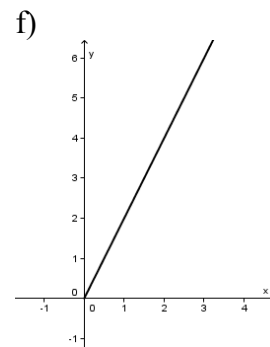
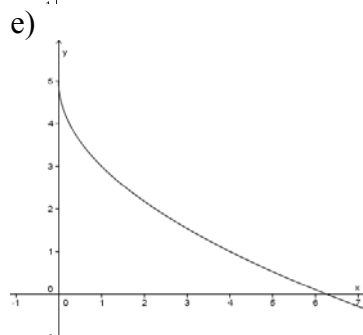
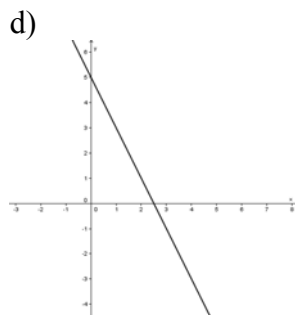
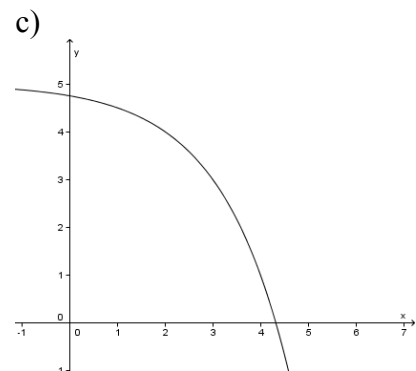
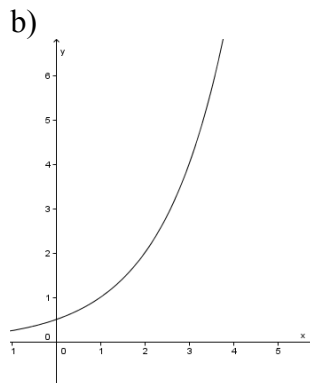
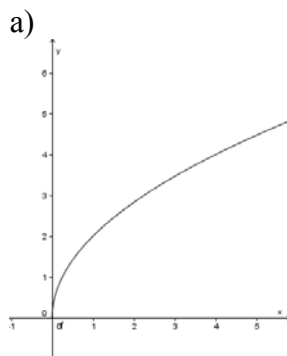
#### Sicheres Wissen und Können

1. Beschreibe das Monotonieverhalten folgender Funktionen. Wähle günstige Intervalle.

a)  $f(x) = x$     b)  $f(x) = x^2$     c)  $f(x) = x^3$     d)  $f(x) = \frac{1}{x}$     e)  $f(x) = 2^x$     f)  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

2. Ordne den folgenden Aussagen entsprechende Graphen zu.

- a) Wenn  $x$  wächst, wächst auch  $y$ .
- b) Wenn  $x$  wächst, fällt  $y$ .
- c) Mit wachsendem  $x$  wächst  $y$  immer stärker.
- d) Mit wachsendem  $x$  wird der Zuwachs von  $y$  geringer.
- e) Mit wachsendem  $x$  wird die Abnahme von  $y$  geringer.
- f) Mit wachsendem  $x$  wird die Abnahme von  $y$  immer größer.



3. Vergleiche die Bedeutung der folgenden Wörter in der Mathematik und in der Umgangssprache.

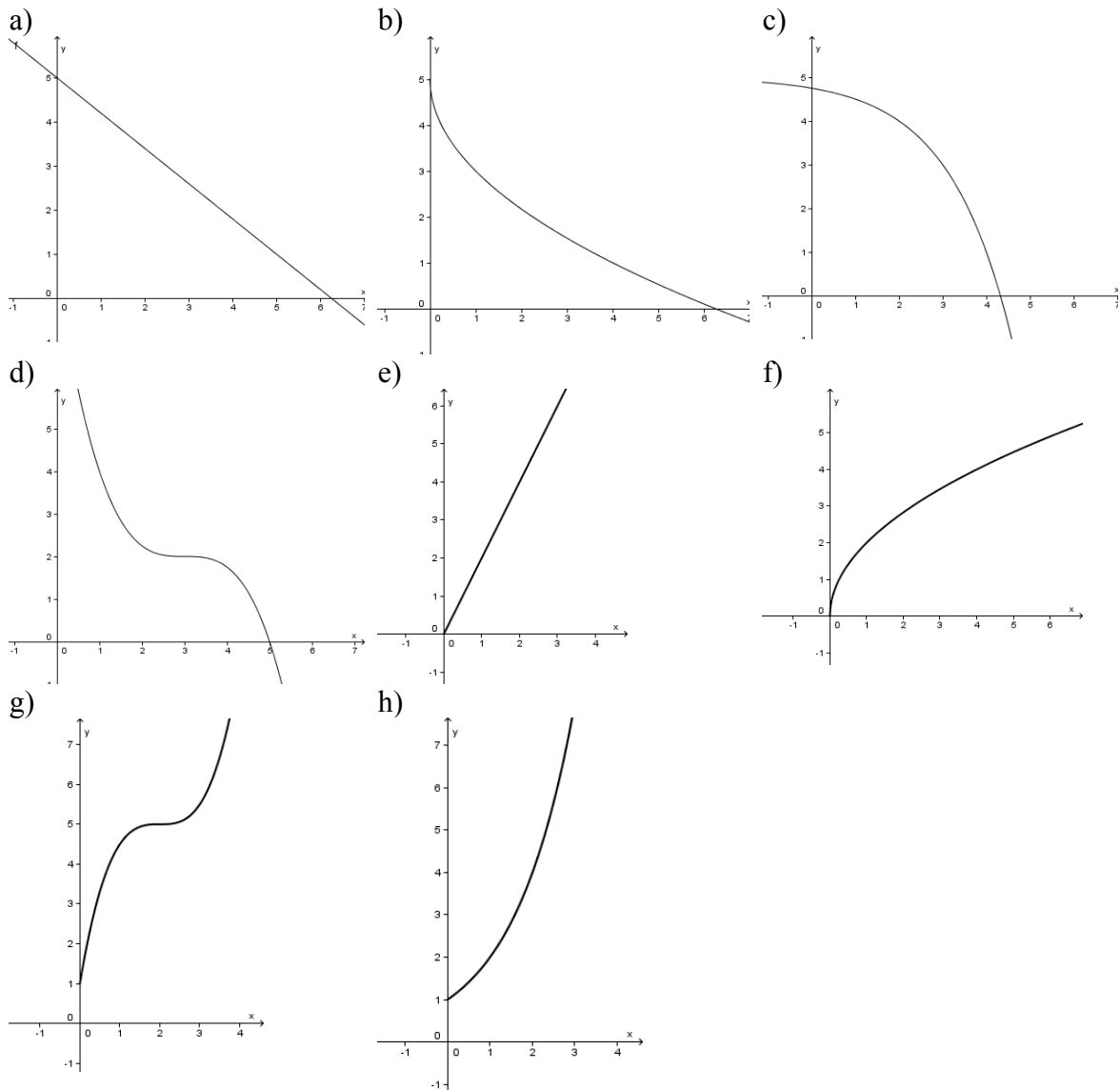
- a) Wachstum    b) Steigung    c) Monotonie

#### Reaktivierbares Wissen und Können

4. Will man das Änderungsverhalten von Funktionen quantitativ miteinander vergleichen, so kann man als Maß die Änderung der Funktionswerte verwenden, wenn  $x$  um 1 wächst. Berechne diese Änderungen für die folgenden Funktionen in den Intervallen  $[0; 1]$ ,  $[1; 2]$ ,  $[2; 3]$ ,  $[3; 4]$  und  $[4; 5]$ . Was stellst du fest?

- a)  $f(x) = x$     b)  $f(x) = x^2$     c)  $f(x) = 2^x$

5. Vergleiche das Änderungsverhalten der Funktion  $f(x) = x^2$  jeweils in den angegebenen Intervallen miteinander und finde eine Gesetzmäßigkeit.  
 a)  $[-1; 0]$  und  $[0; 1]$       b)  $[-2; -1]$  und  $[1; 2]$       c)  $[-3; -2]$  und  $[2; 3]$
6. Vergleiche das Änderungsverhalten der Funktionen  $f_1(x) = x^2$ ; und  $f_2(x) = x^4$ .  
 a) im Intervall  $[0; 1]$       b) in den beiden Intervallen  $[0; 0,5]$  und  $[0,5; 1]$ .
7. Man kann das Änderungsverhalten von Funktionen auch beschreiben, indem man das Verhalten der y-Werte untersucht, wenn x vervielfacht wird. Bestimme für die Funktionen  
 $f_1(x) = x$        $f_2(x) = x^2$        $f_3(x) = \frac{1}{x}$   
 jeweils für  $x > 0$  das Verhalten der y-Werte bei folgender Veränderung von x:  
 a) auf das Doppelte      b) auf das Dreifache      c) auf ein Viertel
8. Beschreibe das Änderungsverhalten der Graphen folgender Funktionen. Nenne eine Gemeinsamkeit. Ordne den Graphen mögliche Sachverhalte zu.



**Zum Verhalten von Funktionen mit waagerechten und senkrechten Asymptoten im Unendlichen und an Polstellen**

**Sicheres Wissen und Können**

9. Beschreibe das Verhalten folgender Funktionen bei Annäherung an  $x = 0$  von links und von rechts.

a)  $f(x) = x$       b)  $f(x) = x^2$       c)  $f(x) = x^3$       d)  $f(x) = \frac{1}{x}$       e)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$       f)  $f(x) = 2^x$

10. Beschreibe das Verhalten folgender Funktionen für  $x \rightarrow \infty$  und für  $x \rightarrow -\infty$ .

a)  $f(x) = x$       b)  $f(x) = x^2$       c)  $f(x) = x^3$       d)  $f(x) = \frac{1}{x}$       e)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$       f)  $f(x) = 2^x$

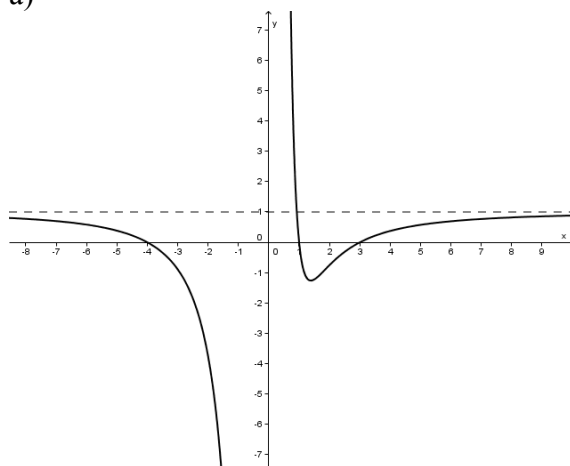
**Reaktivierbares Wissen und Können**

11. Beschreibe das Verhalten folgender Funktionen für  $x \rightarrow \infty$  und für  $x \rightarrow -\infty$ . Nutze dynamische Betrachtungen.

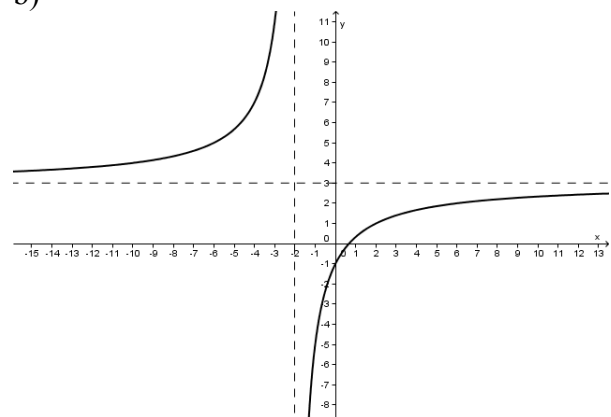
a)  $f(x) = -2x + 4$       b)  $f(x) = \frac{3}{2x+1}$       c)  $f(x) = 6 - \frac{3}{x+1}$   
d)  $f(x) = 5 - \frac{3}{x}$

12. Beschreibe das Verhalten folgender Funktionen im Unendlichen sowie an den Polstellen und lies die Gleichungen für waagerechte und senkrechte Asymptoten aus den gegebenen Graphen ab.

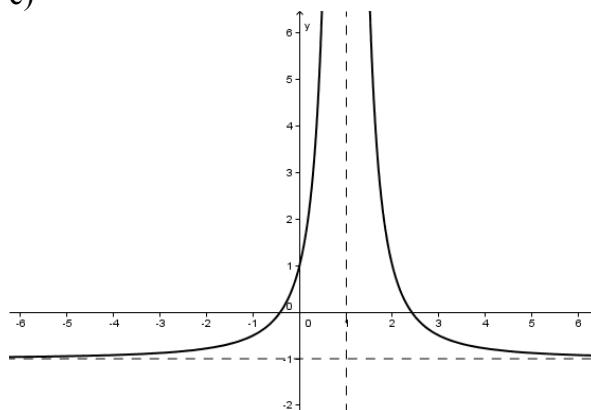
a)



b)

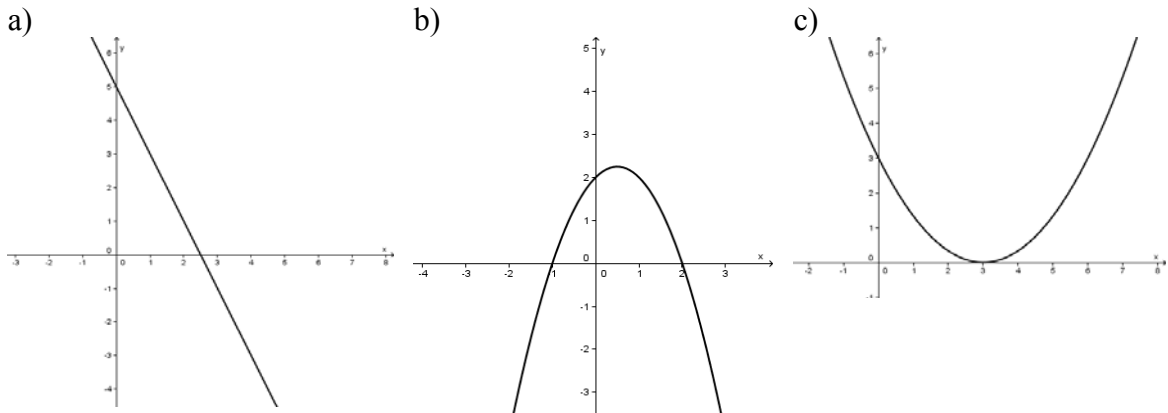


c)



**Nullstellen****Sicheres Wissen und Können**

13. Kennzeichne die Nullstellen der folgenden Funktionen und bestimme sie näherungsweise.



14. Die folgenden Funktionen haben jeweils die gleiche Nullstelle, obwohl sich die Graphen in ihrer Umgebung anders verhalten. Beschreibe die Unterschiede.

a)  $f_1(x) = x$

b)  $f_2(x) = x^2$

c)  $f_3(x) = x^3$

15. Diskutiere folgende Erklärung des Begriffes Nullstelle: „Eine Nullstelle ist ein Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse.“

**Reaktivierbares Wissen und Können**

16. Bringe folgende Begriffe in den richtigen Zusammenhang:

- a) Argument, Nullstelle, Schnittpunkt mit der x- Achse, Graph, Funktionswert.
- b) Argument, Schnittpunkt mit der y- Achse, Graph, Funktionswert.

17. Diskutiere folgende Aussagen.

(1) Der Graph einer Funktion kann die x-Achse

- a) mindestens einmal,
- b) höchstens einmal,
- c) beliebig oft,
- d) genau einmal,
- e) gar nicht schneiden.

(2) Der Graph einer Funktion kann die y-Achse

- a) mindestens einmal,
- b) höchstens einmal,
- c) beliebig oft,
- d) genau einmal,
- e) gar nicht schneiden.

18. Berechne die Nullstellen folgender Funktionen.

a)  $f(x) = 2x - 8$

b)  $f(x) = 2x^2 - 8$

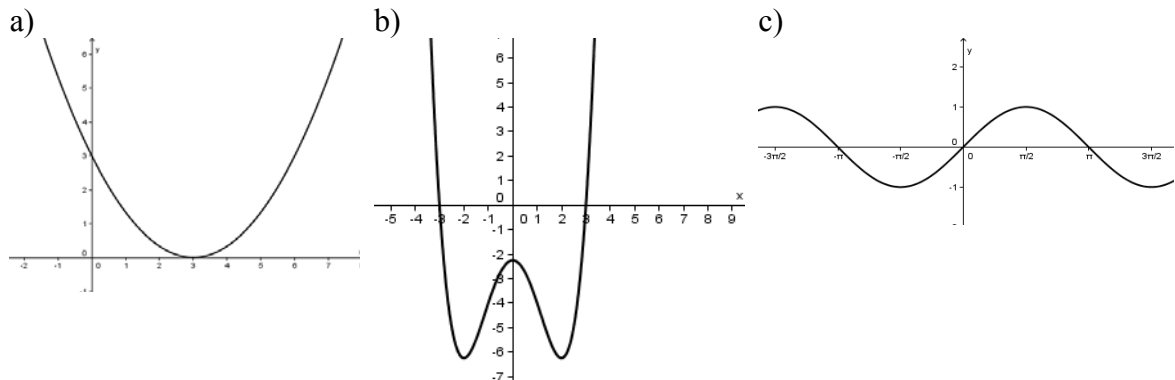
c)  $f(x) = 2x^3 - 8$

d)  $f(x) = 2x + 8$

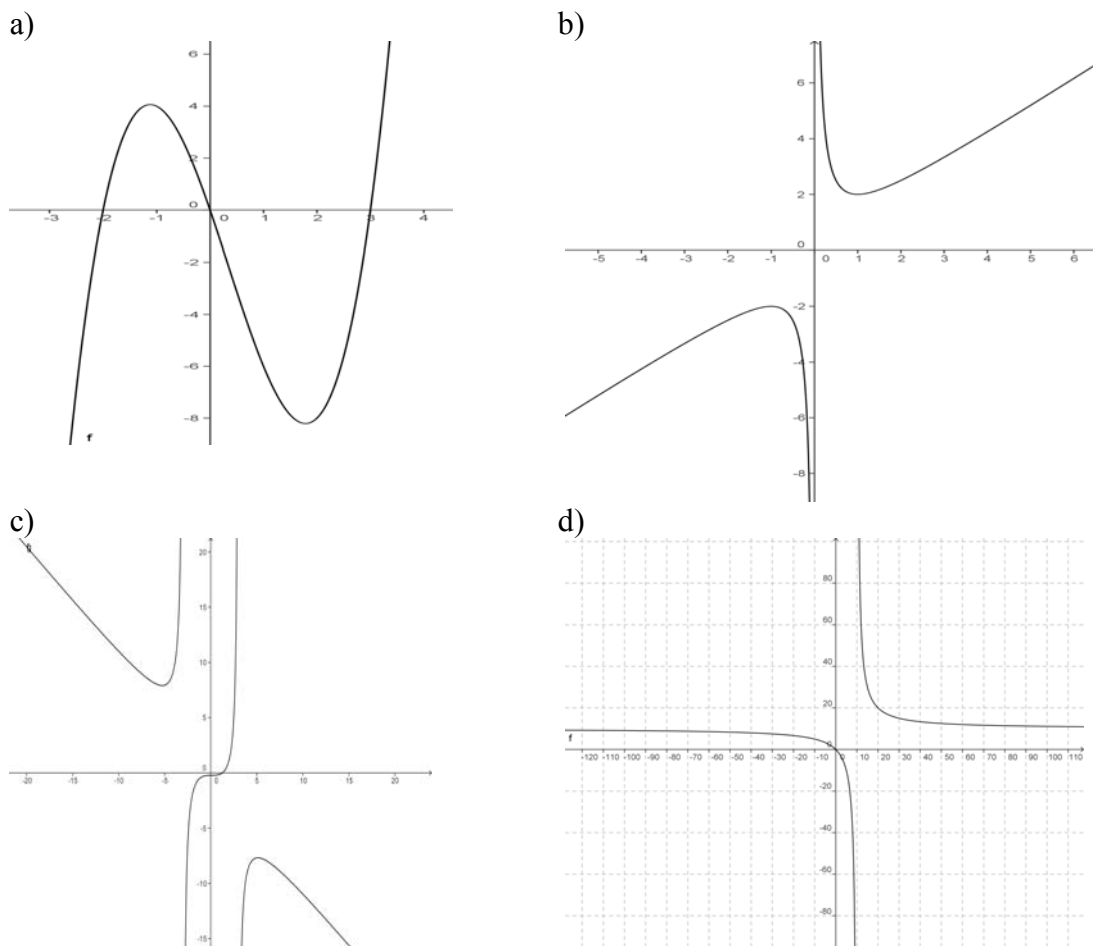
e)  $f(x) = 2x^2 + 8$

**Maximale und minimale Funktionswerte****Sicheres Wissen und Können**

19. Kennzeichne in den folgenden Zeichnungen maximale und minimale Funktionswerte

**Reaktivierbares Wissen und Können**

20. Lies näherungsweise für jeden dargestellten Funktionsgraphen Polstellen, Nullstellen und die Extrempunkte ab, wenn sie vorhanden sind.



21. Stelle mit einem CAS die Graphen der Funktionen dar und bestimme näherungsweise die Extremstellen und Extremwerte.

a)  $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x$

b)  $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2$

c)  $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$



22. Skizziere Graphen von Funktionen mit der folgenden Eigenschaft. Es wird davon ausgegangen, dass die Funktion keine weiteren Nullstellen und Extrempunkte besitzt.

- Die Funktion hat 2 Nullstellen und eine Maximumstelle.
- Die Funktion hat 3 Nullstellen und eine Minimumstelle.
- Die Funktion hat eine Nullstelle und ihr Graph hat einen Hochpunkt.
- Die Funktion hat eine Nullstelle und ihr Graph hat 2 Extrempunkte.
- Die Funktion hat 2 Nullstellen und ihr Graph keinen Extrempunkt.
- Die Funktion hat keine Nullstellen und unendlich viele Extrempunkte.

### Exemplarisches

23. Klaus möchte mit 13 m Maschendraht einen rechteckigen Platz für seinen Hund einzäunen. Er stellt dabei folgende Überlegungen an.

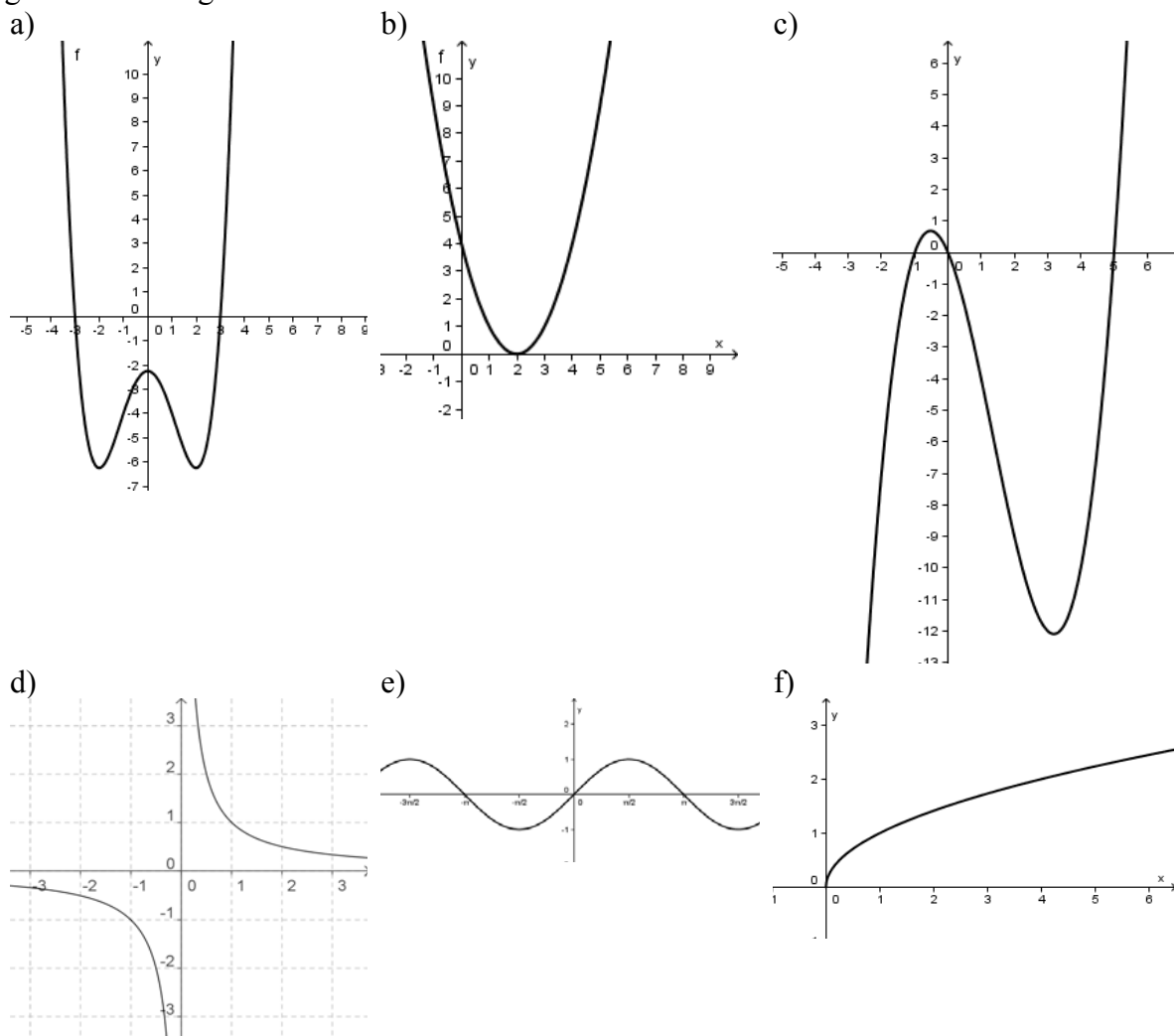
- Es wird ein freistehender Zwinger aufgebaut.
- Es wird die Rückwand der Garage in den Bau einbezogen.

Untersuche, bei welchen Abmessungen der Hundeplatz jeweils am größten wird.

### Symmetrie von Funktionen

#### Sicheres Wissen und Können

24. Gib an, welche der Funktionen aufgrund der Form des dargestellten Graphen vermutlich gerade bzw. ungerade sind.



**Reaktivierbares Wissen und Können**

25. Stelle folgende Funktionen mit einem CAS dar. Gib an, welche der Funktionen aufgrund der Form des dargestellten Graphen vermutlich gerade bzw. ungerade sind. Weise die vermutete Symmetrie nach.

a)  $y = x^4 - 8x^2 - 9$

b)  $y = (x - 2)^2$

c)  $y = x^3 - 4x^2 - 5x$

d)  $y = x^3 - 4x$

e)  $y = \frac{1}{x}$

f)  $y = \sin x$

g)  $y = 2^x$

26. Skizziere Graphen von Funktionen mit der angegebene Eigenschaft

- Die Funktion ist ungerade und hat 2 Nullstellen.
- Die Funktion ist gerade und hat 2 Nullstellen.
- Der Graph der Funktion hat 2 Schnittpunkte und einen Berührungspunkt mit der x-Achse.
- Die Funktion hat keine Nullstelle

**Exemplarisches**

27. Von einer Funktion ist Folgendes bekannt. Welche Schlussfolgerungen kannst du daraus ziehen, wenn die Funktion folgende Symmetrieeigenschaft hat?

- Sie ist gerade
- Sie ist ungerade.
  - Eine Nullstelle ist  $x_0 = 1,3$ .
  - Ein Hochpunkt ist  $H(-3; 8)$ .
  - Für  $x \rightarrow \infty$  gilt:  $y \rightarrow \infty$ .
  - Für  $x \rightarrow 0$  gilt:  $y \rightarrow -\infty$ .

**3. Funktionen mit Parametern****Sicheres Wissen und Können**

1. Es wird jeweils die Wertetabelle einer Funktion  $f$  angegeben. Dabei ist in jeder Tabelle genau ein Druckfehler. Berichtige diesen Fehler.

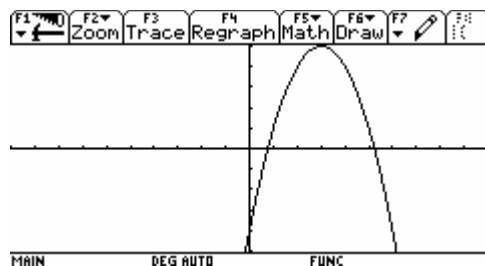
a)  $f$  ist eine lineare Funktion.

$x$	1	4	10	15
$f(x)$	3	9	12	31

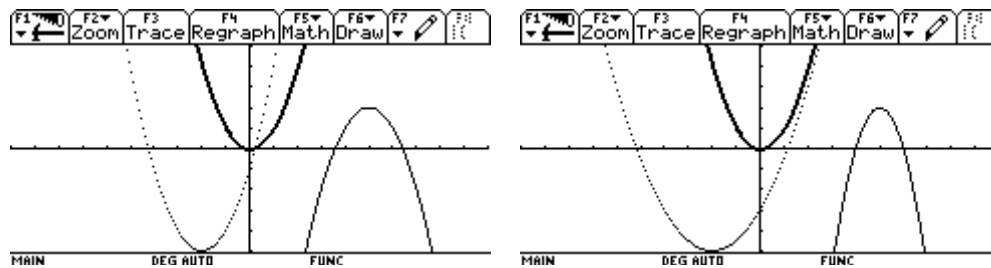
b)  $f$  ist eine quadratische Funktion.

$x$	0	1	2	3
$f(x)$	1	4	9	15

2. Beschreibe zunächst die verschiedenen Veränderungen gegenüber der Normalparabel und versuche dann, die Funktionsgleichung zu finden.



3. Die in den untenstehenden Abbildungen dargestellten Parabeln gehen aus der Normalparabel durch Verschieben, Spiegeln, Strecken und Stauchen hervor. Bestimme die Funktionsgleichungen der Parabeln.



4. Vergleiche die Graphen der folgenden Funktionen mit dem Graphen von  $f(x) = x^2$  und beschreibe, wie diese aus der Normalparabel hervorgehen können.
- a)  $g(x) = x^2 + 5$       b)  $h(x) = (x + 5)^2$       c)  $s(x) = -x^2 + 5$       d)  $t(x) = 5x^2$   
 e)  $k(x) = (x - 2)^2 + 3$       f)  $m(x) = -2x^2 + 3$

### Reaktivierbares Wissen und Können

5. Wie geht der Graph der Funktion aus dem Graphen der entsprechenden Grundfunktion  $f(x) = x^m$ ;  $m \in \mathbb{Z}$  hervor? Gib gegebenenfalls die Asymptoten an.
- a)  $f(x) = x^{-2} + 8$       b)  $f(x) = \frac{1}{x-3}$       c)  $f(x) = x^2 - 3$   
 d)  $f(x) = (x - 5)^3$       e)  $f(x) = \frac{1}{(x+4)^2} - 3$       f)  $f(x) = (x + 4)^2 - 3$
6. Skizziere die Graphen folgender Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem.  
 $f_1(x) = x^3$ ,  $f_2(x) = 0,5 \cdot x^3$ ,  $f_3(x) = x^3 - 4$ ,  $f_4(x) = 0,5 \cdot x^3 - 4$   
 a) Erläutere den Einfluss der Parameter 0,5 und -4 auf  $f_1$ .  
 b) Skizziere den Graphen der Funktion  $y = 0,5 \cdot x - 4$  und finde Gemeinsamkeiten.
7. Skizziere die Graphen folgender Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem.  
 $f_1(x) = x^{-3}$ ,  $f_2(x) = x^{-3} - 4$ ,  $f_3(x) = (x + 2)^{-3}$ ,  $f_4(x) = (x + 2)^{-3} - 4$   
 a) Erläutere den Einfluss der Parameter 2 und -4 auf  $f_1$ .  
 b) Gib jeweils alle Asymptotengleichungen an.
8. Gegeben sind Funktionen mit der Gleichung  $y = a \cdot x^n + e$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .  
 a) Erläutere den Einfluss der Parameter  $a$  und  $e$  auf Potenzfunktionen  $y = x^n$ .  
 b) Begründe, dass die linearen Funktionen  $y = mx + n$  Spezialfälle der Potenzfunktionen  $y = a \cdot x^n + e$  sind.
9. Skizziere den Graphen der Funktion  $y = 2^x$  in ein Koordinatensystem.  
 a) Spiegle den Funktionsgraphen an der  $y$ -Achse und gib die Funktionsgleichung des entstandenen Graphen an.  
 b) Wie lautet die Funktionsgleichung, wenn der Ausgangsgraph an der  $x$ -Achse gespiegelt wird?
10. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? ( $n \in \mathbb{N}$ )  
 a) Die Graphen der Potenzfunktionen  $y = x^{-n}$  erreichen die  $y$ -Achse nie.  
 b) Die Graphen der Potenzfunktionen  $y = x^{-n}$  berühren die  $y$ -Achse nur.  
 c) Die Graphen der Potenzfunktionen  $y = x^{-n}$  schneiden die  $y$ -Achse nicht.  
 d) Die Graphen der Potenzfunktionen  $y = x^{-n}$  nähern sich der  $y$ -Achse ständig.

11. Untersuche jeweils die Änderung der y-Werte der Funktionen in den gegebenen Intervallen  $[0;1]$ ,  $[1;2]$  und  $[2;3]$ . Finde Gesetzmäßigkeiten.

- a)  $f_1(x) = x$        $f_2(x) = 3x$        $f_3(x) = -2x$   
 b)  $f_1(x) = x^2$        $f_2(x) = 3x^2$        $f_3(x) = -2x^2$   
 c)  $f_1(x) = x^2$        $f_2(x) = x^2 + 3$        $f_3(x) = x^2 - 2$

12. Bestimme für die Funktionen  $f_1(x) = x$ ;  $f_2(x) = 2x$  und  $f_3(x) = -2x$  das Verhalten der y-Werte bei folgender Veränderung von x:

- a) auf das Doppelte      b) auf das Dreifache      c) auf die Hälfte

13. Berechne die Nullstellen folgender Funktionen und beschreibe den Einfluss des Faktors a auf die Anzahl und die Lage der Nullstellen.

- a)  $f_1(x) = x^2$        $f_2(x) = 4x^2$        $f_3(x) = -3x^2$        $f_4(x) = 0,5x^2$   
 b)  $f_1(x) = x^3$        $f_2(x) = 4x^3$        $f_3(x) = -3x^3$        $f_4(x) = 0,5x^3$   
 c)  $f_1(x) = 2^x$        $f_2(x) = 4 \cdot 2^x$        $f_3(x) = -3 \cdot 2^x$        $f_4(x) = 0,5 \cdot 2^x$

14. Berechne die Nullstellen folgender Funktionen und beschreibe den Einfluss des Summanden e auf die Anzahl der Nullstellen.

- a)  $f_1(x) = x^2$        $f_2(x) = x^2 - 4$        $f_3(x) = x^2 + 1$        $f_4(x) = x^2 - 2,25$   
 b)  $f_1(x) = x^3$        $f_2(x) = x^3 - 4$        $f_3(x) = x^3 + 1$        $f_4(x) = x^3 - 8$   
 c)  $f_1(x) = 2^x$        $f_2(x) = 2^x - 4$        $f_3(x) = 2^x + 1$        $f_4(x) = 2^x - 2$ ,

15. Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen. Erläutere den Einfluss des Faktors 0,5 und die Besonderheit des Parameters 4 auf  $f_1$ .

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = 0,5 \cdot \sin x, \quad f_3(x) = \sin(4x), \quad f_4(x) = 0,5 \cdot \sin(4x)$$

16. In die folgenden Aussagen haben sich Fehler eingeschlichen. Korrigiere sie.

Es gilt stets  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 0$  und  $x \geq 0$ .

- a) Der Zuwachs der Potenzfunktionen  $y = x^n$  ist in einem Intervall der Länge 1 umso größer, je größer n ist.  
 b) Die Exponentialfunktionen  $y = b^x$ ,  $b > 1$  wachsen stärker als alle Potenzfunktionen.  
 c) Die Abnahme der Potenzfunktionen  $y = x^{-n}$ ,  $x \neq 0$  ist in einem Intervall der Länge 1 mit wachsendem n immer geringer.

### Exemplarisches

17. Welche der folgenden Aussagen treffen auf alle Funktionen der Funktionenschar  $y = ax^4 + bx^2 + c$  mit  $a \neq 0$  zu?

*Hinweis:* Zeichne mit einem grafikfähigen Rechner die Funktion  $y = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 3$  und

bestimme in der graphischen Darstellung die Anzahl der Nullstellen und der Extrempunkte. Finde Vermutungen dadurch, dass du a, b und c variiert und dir diese Repräsentanten darstellst.

- a) Alle Graphen dieser Schar sind gerade.  
 b) Alle Funktionen dieser Schar haben 4 Nullstellen.  
 c) Es gibt Funktionen dieser Schar, die keine Nullstelle haben.  
 d) Es gibt Funktionen dieser Schar, die keine Extremstelle haben.  
 e) Eine Extremstelle der Funktion ist stets  $x = 0$ .

#### 4. Bestimmen von Funktionen zu gegebenen Bedingungen

##### Sicheres Wissen und Können

1. Skizziere einen Graphen für eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:
  - a) Die Geraden  $x = 4$  und  $y = 6$  sind Asymptoten der Funktionen.
  - b) Die Gerade  $x = -1$  ist Asymptote, und die Funktion hat die Nullstelle  $x_0 = 2$ .
  - c) Die Gerade  $x = 4$  ist Asymptote, die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
  - d) Die Gerade  $x = 6$  ist Asymptote, der Graph ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse.
2. Eine Funktion  $f$  besitzt den Definitionsbereich  $D(f) = [-5; 5]$  und den Wertebereich  $W(f) = [-3; 3]$ . Skizziere jeweils einen möglichen Funktionsgraphen für  $f$ , wenn weiterhin folgende Eigenschaften gefordert werden.
  - a) Der Graph von  $f$  ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse.
  - b) Die Funktion  $f$  besitzt nur die Nullstellen  $-2$  und  $4$ . Der Schnittpunkt des Graphen von  $f$  mit der  $y$ -Achse lautet  $S_y(0 \mid -4)$ .
  - c) Der Graph von  $f$  ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Die Funktion  $f$  besitzt genau 4 Nullstellen.
3. Ordne den folgenden Sachverhalten je eine der folgenden Gleichungen zu:  
 $f_1(x) = x^3$ ,  $f_2(x) = a \cdot x^2$ ,  $f_3(x) = a \cdot x^{-1}$ ,  $f_4(x) = mx + n$ ,  $f_5(x) = a \cdot b^x$   
Sachverhalte:
  - A: Eine Bakterienart verdoppelt ihren Anfangsbestand stündlich.
  - B: Alkohol wird im Körper so abgebaut, dass sich der Blutalkoholspiegel stündlich um  $0,2\%$  verringert.
  - C: Das Volumen eines Würfels entspricht der 3. Potenz seiner Seitenlänge.
  - D: Die Fläche eines Kreises ist proportional zum Quadrat seines Radius.
  - E: Je mehr Arbeiter auf einer Baustelle arbeiten, desto kürzer ist die Zeit, in der die Arbeit bewältigt ist.

##### Reaktivierbares Wissen und Können

4. Der Graph einer Funktion verläuft durch die Punkte  $P(0 \mid 1)$  und  $Q(2 \mid 5)$ .  
Gib möglichst viele Funktionen mit dieser Eigenschaft durch eine Gleichung an.
5.
  - a) Der Graph einer quadratischen Funktion verläuft durch den Punkt  $P(-1 \mid 1)$  und berührt die  $x$ -Achse (d.h. der Scheitelpunkt liegt auf der  $x$ -Achse).  
Gib eine solche Funktion durch eine Gleichung an.
  - b) Eine Funktion hat die Gleichung  $f(x) = a \cdot b^x$ . Weiterhin gilt  $f(-1) = 0,75$  und  $f(5) = 3072$ . Berechne  $a$  und  $b$ .
  - c) Gegeben wird die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \log_a x$  und  $f(343) = 3$ . Berechne  $a$ .
6. Auf einer  $15 \text{ cm}^2$  großen Fläche eines Nährbodens wird ein Bakterienstamm gezüchtet. Seine Zellen vermehren sich bei gleich bleibenden Versuchsbedingungen im Durchschnitt pro Tag auf das 1,4-fache des Vortages. Am Ende des ersten Versuchstages nahmen die Bakterien eine Fläche von etwa  $0,7 \text{ cm}^2$  ein.
  - a)  $A(n)$  sei die Größe der Fläche, die von den Bakterien am Ende des  $n$ -ten Versuchstages eingenommen wird. Gib eine Berechnungsvorschrift für  $A(n)$  an.
  - b) An welchem Versuchstag wird der Nährboden vollständig von Bakterien bedeckt?
7. Gib die Gleichung von vier linearen Funktionen so an, dass ihre Graphen zusammen den Buchstaben M beschreiben. Achte dabei auch auf die Angabe der Definitionsbereiche.

8. Es sind verschiedene Funktionen so anzugeben, dass ihre Graphen den Längsschnitt eines Weinglases ergeben. Achte bei der Normierung des Koordinatensystems auf reale Größenverhältnisse.
9. Das Bierglas :  
Direkt nach dem Zapfen ist der Bierschaum 4 cm hoch. Alle 15 s verringert sich seine Höhe um 9 %.  
Beschreibe den Zusammenhang zwischen der vergangenen Zeit und der Schaumhöhe durch eine Gleichung.
10. Über das Bevölkerungswachstum auf der Erde gibt es folgende Angaben.

Jahr	1950	1960	1970	1980	1990
Weltbevölkerung in Mrd.	2,555	3,039	3,707	4,456	5,283

Versuche, diesen Wachstumsprozess durch eine geeignete Funktion zu beschreiben. Untersuche, ob das Ergebnis auch die aktuellen Zahlenwerte sowie Schätzwerte für die zukünftige Entwicklung (z.B. Jahr 2050 9,104 Mrd.) wiedergeben.

11. Folgende Sachverhalte können mit Funktionen der Form  $y = a \cdot x^n + e$  beschrieben werden. Präzisiere für jeden Sachverhalt die Variablen  $x$  und  $y$  sowie die Parameter  $a$ ,  $e$  und  $n$ .
- Beim freien Fall sind die erreichte Geschwindigkeit  $v$  bzw. der zurückgelegte Weg von der Fallzeit  $t$  abhängig. Es gelten die Formeln:  $v = g \cdot t$  und  $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$ .
  - Die Lufttemperatur sinkt jeweils um  $6,5^\circ\text{C}$  wenn die Höhe um 1 km zunimmt. Auf Meeresspiegelhöhe beträgt die Temperatur  $25^\circ\text{C}$ .
  - Die Volumina verschiedener Quader mit gleicher Höhe  $h = 10$  cm sind nur vom Inhalt der Grundfläche abhängig.
  - Die Form einer Wasserrutsche entspricht dem rechten Ast einer mit  $0,5$  gestauchten Normalparabel, die in einer Höhe von 1 m ihren Scheitelpunkt hat.
12. Mit einer Länge von 2.694 Metern und einer Hauptspannweite von 1.624 Metern ist die Storebælt-Brücke in Dänemark derzeit die längste Hängebrücke in Europa. Die Stahlbetonpylone haben eine Höhe von 254 m, der Überbau ist 31 Meter breit und liegt ungefähr 70 Meter über dem Meeresspiegel. (Wikipedia) Beschreibe den Bogen zwischen den Stahlbetonpylonen durch eine geeignete Funktion.



### Wachstums- und Zerfallsprozesse sowie periodische Vorgänge

13. Beschreibe folgende Sachverhalte durch eine Funktion.
- Gib eine Gleichung an.
  - Gib den Definitionsbereich an.
  - Skizziere zu jedem Sachverhalt ein Diagramm.
- Ein Mann hat 500 € gespart.
- Er nimmt sich davon täglich 5 €.
  - Er will täglich 5 % des Restes verbrauchen.
  - Er legt das Geld für 10 Jahre fest bei einer Bank mit 4 % Zinsen pro Jahr an.
  - Er spart in den kommenden 100 Tagen weiterhin 2 € pro Tag.

14. Die 1922 entwickelte Norm DIN 476 gibt die Größe der Blätter von A0 bis A10 an. Längen, Breiten und Flächeninhalte genügen bestimmten Gesetzmäßigkeiten. Decke diese mithilfe der folgenden Tabelle auf und beschreibe sie näherungsweise durch Gleichungen.

Bezeichnung	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Länge l in mm				420	297	210					37
Breite b in mm			420	297	210	148					26
Fläche A in mm <sup>2</sup>											

15. Die Lufttemperatur an einem Ort ist von seiner Höhe über dem Meeresspiegel abhängig. Es gilt die Faustregel: Bei einer Zunahme der Höhe um 1000 m sinkt die Temperatur durchschnittlich um 6,5 °C. Müllers verbringen ihren Urlaub auf der Insel Madeira im Ort Santa Cruz, der auf Meeresspiegelhöhe liegt. In Santa Cruz beträgt die Temperatur 20°C.
- Stelle die Abhängigkeit der Temperatur von der Höhe über dem Meeresspiegel für die Insel Madeira dar. Beachte, dass der höchste Berg 1860 m hoch ist.
  - Müllers wollen eine Wanderung auf den höchsten Berg unternehmen. Auf welche Temperatur sollen sie sich mit ihrer Kleidung einstellen?
  - In Santa Cruz befindet sich auch der Flughafen der Insel, dessen Startbahn auf das Meer hinausragt. In welcher Höhe hat ein Flugzeug die Außentemperatur von 0°C erreicht?
  - Eine Seilbahn führt in den 600 m höher gelegenen Ort Monte. Welcher Temperaturunterschied erwartet die Reisenden beim Ausstieg aus der Bahn?
16. Ein Prozess der zeitlichen Veränderung von Werten einer Größe hat die angegebenen Eigenschaften. Mit welchem Funktionstyp würdest du ihn beschreiben?
- Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist ein Anfangswert  $> 0$  vorhanden. Die Werte nehmen erst langsam und dann immer schneller zu.
  - Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist ein Anfangswert  $> 0$  vorhanden. Die Werte nehmen erst schnell und dann immer langsamer ab. Theoretisch bleibt der Wert immer positiv, praktisch ist er irgendwann so klein, dass er nicht mehr messbar ist.
  - Vom Zeitpunkt  $t = 0$  an wachsen die Werte vom Anfangswert Null auf ein Maximum. Von dort aus fallen sie immer schneller, bis sie den Wert Null wieder erreicht haben.
  - Die gleichen Maxima und Minima der Werte wechseln sich periodisch ab.
  - Vom Zeitpunkt  $t = 0$  ausgehend wachsen die Werte mit dem Anfangswert Null erst schnell und dann immer langsamer.
17. Skizziere zu folgenden Vorgängen passende Diagramme.
- Wenn man eine Strecke von 50 km mit höherer Durchschnittsgeschwindigkeit zurücklegt, benötigt man eine kürzere Zeit.
  - Ole hat 100 € und nimmt sich vor, davon pro Monat nur je 10 € zu verbrauchen.
  - Von einem radioaktiven Material zerfällt pro Stunde  $\frac{1}{4}$  des noch vorhandenen Materials. Am Anfang sind 100 g vorhanden.
  - Ein Fahrstuhl hat als Belastungsgrenze 480 kg. Welche durchschnittliche Masse dürfen 1, 2, ..., 12 Personen höchstens haben, um noch gemeinsam fahren zu dürfen?
  - Wird eine Brausetablette einer Sorte in ein Glas mit 20 °C kaltem Wasser gelegt, so lösen sich pro Minute 30 % des noch vorhandenen Tablettenrestes auf.

## 2 Ziele und Aufgaben Klasse 11

### 2.1 Planungsvorschlag für die Klasse 11

Std.	Inhalte / Schwerpunkte	Bemerkungen
<b>13</b>	<b>Zahlenfolgen</b>	
3	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Begriff der Zahlenfolge (allgemein)</li> <li>- Darstellung</li> <li>- explizite und rekursive Zuordnungsvorschrift</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- arithmetische und geometrische Zahlenfolgen nur als Beispiele</li> <li>- in überschaubaren Fällen auch ohne CAS</li> <li>- Untersuchung rekursiv definierter Folgen mit CAS zur Leistungsdifferenzierung</li> </ul>
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Monotonienachweise (wachsende, fallende bzw. konstante Folgen)</li> <li>- Folgen mit wechselnder Monotonie</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Inhaltliche Bezüge zum Änderungsverhalten einer Funktion herstellen</li> <li>- Deutung der Ergebnisse der Differenzbildung</li> </ul>
5	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Grenzwerte, Grenzwertuntersuchungen, Grenzwertsätze</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Nutzung des CAS (grafisch und numerisch)</li> <li>- Definition und inhaltliches Verständnis</li> </ul>
3	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Begriff der Partialsumme und der Partialsummenfolge (Reihe)</li> <li>- Umgang mit dem Summenzeichen</li> <li>- Berechnungen mit CAS</li> <li>- Anwendungsaufgaben</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Grenzwertbetrachtungen zu ausgewählten Partialsummen</li> </ul>
<b>8</b>	<b>Grenzwerte und Stetigkeit</b>	
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Grenzwerte von Funktionen an einer Stelle bzw. im Unendlichen</li> <li>- Übertragung der Grenzwertsätze von Folgen auf Funktionen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- inhaltlich- anschaulicher Grenzwertbegriff</li> <li>- Grundprinzip: Untersuchung mit Hilfe von Testfolgen</li> <li>- komplizierte Funktionsgleichungen mit CAS</li> </ul>
6	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Untersuchung von gebrochen-rationalen und abschnittsweise definierten Funktionen auf Grenzwerte</li> <li>- Begriff der Stetigkeit von Funktionen</li> <li>- Untersuchung von Funktionen auf Stetigkeit unter Nutzung der Definition</li> <li>- Definitionslücken (Polstellen, stetig behebbare Definitionslücken) und Sprungstellen mit Nachweis</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Einführung der Begriffe der gebrochen-rationalen Funktionen und der abschnittsweise definierten Funktionen (einfache Beispiele)</li> <li>- CAS als Hilfsmittel zur Visualisierung, zur Annäherung mit Testfolgen und zur Gewinnung von Einsichten</li> </ul>



Std.	Inhalte / Schwerpunkte	Bemerkungen
<b>14</b>	<b>Differenzierbarkeit</b>	
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>– lokale, globale Differenzierbarkeit</li> <li>– Differenzenquotient und Differenzialquotient</li> <li>– Tangentenproblematik</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Anstiege, geometrische Deutung</li> <li>– Tangenten -und Normalengleichungen, ständiger Praxisbezug</li> </ul>
8	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Zusammenhang von Stetigkeit und Differenzierbarkeit</li> <li>– Ableitungsregeln</li> <li>– Zusammenhang von Monotonie und erster Ableitung</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Produkt- und Quotientenregel, Kettenregel</li> <li>– inhaltliche Deutung des Änderungsverhaltens</li> <li>– Modellieren von Anwendungssituationen durch ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen</li> <li>– Zusammenhang zur Monotonie von Zahlenfolgen herstellen</li> </ul>
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>– geometrische Zusammenhänge zwischen dem Graphen von <math>f(x)</math> und dem Graphen von <math>f'(x)</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Untersuchung mit und ohne CAS mit Interpretation durch den Schüler</li> </ul>
<b>12</b>	<b>Kurvenuntersuchungen</b>	
8	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Geometrische Zusammenhänge zwischen den Graphen von <math>f</math>, <math>f'</math>, <math>f''</math>, <math>f'''</math></li> <li>– notwendige und hinreichende Bedingungen für Extrempunkte</li> <li>– notwendige und hinreichende Bedingungen für Wendepunkte</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– inhaltliches Verständnis</li> <li>– Art des Extremums mit Nachweis</li> <li>– Art des Wendepunktes mit Nachweis</li> <li>– Konzentration auf ganzrationale und gebrochen-rationale Funktionen</li> </ul>
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Kurvendiskussionen mit und ohne CAS</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Anwenden von Regeln und Verfahren ohne CAS auf übersichtliche Beispiele und wenige Übungsaufgaben beschränken</li> </ul>
<b>23</b>	<b>Anwendungen der Differenzialrechnung</b>	
23	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Erzeugung funktionaler Zusammenhänge, die durch Verknüpfung, Verkettung und abschnittsweise Definition entstehen</li> <li>– Lösen verschiedenster Extremwertprobleme auch mit komplizierteren Funktionen möglich (CAS)</li> <li>– Modellieren von Anwendungssituationen durch Funktionen und durch Auffinden geeigneter Parameter</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– ganzrationale und gebrochenrationale Funktionen</li> <li>– Erweiterung der Differenziationsregeln auf die Wurzelfunktion und <math>y = \sin x</math> und <math>y = \cos x</math></li> <li>– Nutzung des CAS</li> <li>– Rekonstruktion von Funktionen</li> <li>– Kurvenscharen</li> <li>– inhaltliches Verständnis des Newtonverfahrens</li> </ul>

Std.	Inhalte / Schwerpunkte	Bemerkungen
<b>10</b>	<b>Stammfunktion</b>	
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Umkehrung des Differenzierungsprozesses</li> <li>– Ermitteln von Stammfunktionen</li> </ul>	– einfache Funktionen ohne CAS
2	– Flächeninhalt der Punktmenge, die vom Graphen von $f$ , der $x$ -Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird (Grenzwert der Ober- und Untersumme)	– Der Wechsel zwischen numerischer Berechnung und grafischer Darstellung mit CAS ermöglicht ein vertieftes Verständnis mathematischer Zusammenhänge.
6	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Das bestimmte Integral</li> <li>– Eigenschaften und Berechnung bestimmter Integrale</li> <li>– Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung</li> <li>– uneigentliche Integrale</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Abgrenzung vom Flächeninhalt der Punktmenge</li> <li>– inhaltliches Verständnis</li> </ul>
<b>10</b>	<b>Anwendungen der Integralrechnung</b>	
6	– Flächenberechnungen	– Flächen unter und zwischen Funktionsgraphen (praxisnahe Zusammenhänge)
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Volumen von Rotationskörpern</li> <li>– Bogenlänge</li> </ul>	– Berechnungen mit CAS
<b>20</b>	<b>Die e-Funktion – weiterer Ausbau der Differenzial- und Integralrechnung</b>	
4	– Zusammenführen von Differenziation und Integration bei vielfältigen Aufgaben	
12	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Wiederholung und Anwendung des bisherigen Wissens und Könnens auf e-Funktionen</li> <li>– Herleitung und Bedeutung von <math>e</math></li> </ul>	– Betrachtung der $\ln$ -Funktion nur als Umkehrfunktion der $e$ -Funktion und zur Integration gebrochenrationaler Funktionen
4	– Kurvenscharen	
<b>(10)</b>	<b>Gesamtwiederholung an differenzierten Komplexaufgaben, integratives Thema</b>	

Hinweis:

Für einige Aufgaben der Klasse 11, die mit einem CAS lösbar sind, wurden ausführliche Lösungen erstellt. Entsprechende Aufgaben sind mit (L) gekennzeichnet. Die Lösungen befinden sich unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de) (Lösungen von Aufgaben der Klasse 11).

Weiterhin existiert unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de) (Zusätzliche Aufgaben zum Exemplarischen Lernen in Klasse 11) eine Datei mit Aufgaben und Hinweisen zum Exemplarischen Lernen in der Klasse 11.

## 2.2 Zahlenfolgen

### Vorhandenes Wissen:

- Funktionen: beschreiben Zusammenhänge, Begriffe: Argument, Funktionswert, Definitionsbereich, Wertebereich, Darstellung im Koordinatensystem, in Tabellen, verbal, mit Funktionsgleichungen, Schreibweise z.B.  $y = f(x) = m \cdot x + n$ ,
- Folgen: Umgangssprachliche Vorstellung einer Folge als Aneinanderreihung von endlich vielen Dingen mit einer bestimmten Ordnung (Malfolge, Ziffernfolge bei Dezimalzahlen), Fortsetzen von Zahlenfolgen,
- Index: bezeichnet einzelne Lösungen mit besonderen Eigenschaften, fest, hebt etwas Besonderes hervor ( $x_{1/2}$  oder  $x_0$ ).
- natürliche Zahlen: Null ist die kleinste natürliche Zahl. Es werden für die Null stets besondere Betrachtungen angestellt. Die Folge der natürlichen Zahlen ist unendlich.
- Wachstum : lineares und exponentielles, verbale Beschreibung, Darstellung im Koordinatensystem, mit Tabellen und Gleichungen,
- Terme: Termwertberechnungen, Belegung von Variablen in Termen.

Voraussetzungen aus Klasse 10 für das Arbeiten mit dem Voyage200 zum Thema Folgen:

- Arithmetische Operationen
- Eingabe von Termen (Struktur von Termen erkennen und Klammern richtig setzen)
- Termumformungen, insbesondere: Entwick; gemNenn; PzlBruch; im Algebramenü des Hauptbildschirms
- Lösen und Interpretieren von Gleichungen in unterschiedlichen Zahlenbereichen
- graphische Darstellung von Funktionen, Erstellen von Wertetabellen

## Ziele

### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler

- haben inhaltliche Vorstellungen zu Zahlenfolgen und wissen, dass Folgen besondere Funktionen mit einem Definitionsbereich aus den natürlichen Zahlen und dem Wertebereich  $\mathbb{R}$  sind und kennen die besonderen Bezeichnungen,
- haben inhaltliche Vorstellungen zum Grenzwert einer Zahlenfolge und wissen, dass sich die Folgeglieder einer konvergenten Zahlenfolge einem Grenzwert mit wachsendem  $n$  beliebig nahe annähern,
- wissen, dass Partialsummen und Partialsummenfolgen entstehen, wenn man die Glieder einer Folge systematisch addiert und dass eine unendliche Partialsummenfolge Reihe genannt wird.

Die Schülerinnen und Schüler können

- arithmetische, geometrische und einfache Folgen erkennen oder fortführen, wenn konkrete aufeinander folgende Glieder gegeben sind,
- Zahlenfolgen grafisch darstellen und das Monotonieverhalten an Graphen beschreiben,

- die Schreibweise  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  sicher verwenden,
- zu einer gegebenen expliziten oder rekursiven Vorschrift Glieder der Zahlenfolge berechnen und Vermutungen über den Grenzwert bzw. das Konvergenzverhalten anstellen,
- erklären, wie aus einer Folge die entsprechende Partialsummenfolge entsteht.

### Reaktivierbares Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler wissen:

- Die Folgen mit  $a_n = 1/n$  und  $a_n = q^n$  mit  $|q| < 1$  sind Nullfolgen.

Die Schülerinnen und Schüler können

- Folgen durch Aufzählen der ersten Glieder, verbal und in Tabellen darstellen,
- praktische Anwendungen geometrischer Folgen mit CAS bearbeiten,
- ein CAS für die Darstellung von Folgen und zur Berechnung von Gliedern nutzen,
- die Differenz  $a_{n+1} - a_n$  für überschaubare Folgen bilden, berechnen und deuten,
- Vermutungen für den Grenzwert aus grafischen und tabellarischen Darstellungen bilden und Sätze über konstante Folgen, Nullfolgen, Summen, Differenzen und Produkten von Folgen nutzen,
- die Begriffe konvergente und divergente Folge unter Nutzung grafischer Veranschaulichungen erklären,
- aus einfachen Folgen entsprechende Partialsummenfolgen bilden,
- Grenzwertbetrachtungen zu ausgewählten Reihen durchführen,
- in überschaubaren Fällen eine gegebene ausführliche Summe mithilfe des Summenzeichens schreiben,
- die Verwendung des Summenzeichens zur Beschreibung einer Summe und zur Bestimmung des Grenzwertes einer Reihe unterscheiden.

### Exemplarisches

Die Schülerinnen und Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen.

- Es gibt endliche und unendliche Folgen.
- Unter bestimmten Bedingungen ist es sinnvoll,  $n = 0$  im Definitionsbereich zuzulassen.
- Die Glieder der Zahlenfolgen können auch als Punkte auf der Zahlengerade veranschaulicht werden. Damit wird der Grenzwert von Funktionen, das Verhalten an Polstellen und die Einführung der 1. Ableitung vorbereitet.
- Zwischen arithmetischen Folgen, linearen Funktionen, linearen Wachstumsprozessen bzw. geometrischen Folgen und Exponentialfunktionen und exponentiellen Wachstumsprozessen gibt es enge Zusammenhänge.
- Die Monotonie geometrischer Folgen ist auch durch die Differenzbildung unter Anwendung der Potenzgesetze berechenbar.
- Manchmal ist es sinnvoll, zwischen streng monoton und monoton zu unterscheiden.
- Bei Anwendung der Grenzwertdefinition auf eine Zahl, die nicht der Grenzwert ist, ergibt sich ein Widerspruch.

- 
- Für kleine  $n$  kann der Grenzwert beliebig oft überschritten werden, erst im Unendlichen geschieht die Annäherung.
  - Man muss zwischen der Annäherung an den Grenzwert von oben oder unten unterscheiden.
  - Die Bezeichnung uneigentlicher Grenzwert für die Schreibweise  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ist widersprüchlich.
  - Die beliebig genaue Annäherung an einen Wert ist ein mathematisches Modell für Grenzprozesse. In der Praxis gibt es immer einen kleinsten Wert der Annäherung, der nicht unterschritten werden kann.
  - Mit dem Grenzwertbegriff wird der Begriff des unendlich Kleinen und der beliebig genauen Annäherung mathematisch korrekt erfasst und auf das Arbeiten mit Ungleichungen zurückgeführt.
  - Die Begründung und Anwendung der Summenformel für geometrische Reihen wird an einem einprägsamen Beispiel erlebt.

## Aufgaben

### Sicheres Wissen und Können

- Vergleichen Sie: (1)  $f(x) = -3x + 7$  mit (2)  $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$
- Vergleichen Sie die Bedeutung der Klammer in den folgenden Ausdrücken:  
A:  $(a + n)(a - n)$       B:  $(a_n)$       C:  $(a_n + 1)^2$
- Geben Sie je ein Beispiel für Zahlenfolgen an, die die gegebenen Bedingungen erfüllen:
  - Die Folge wird durch eine rekursive Bildungsvorschrift beschrieben.
  - Die Folge wird durch eine explizite Bildungsvorschrift beschrieben. Die Glieder der Folge werden immer größer.
- Finden Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede bei dem Gebrauch des Wortes „Grenze“ in der Umgangssprache und in der Mathematik.
- Paul bewirbt sich um einen Ferienjob und versucht, den Personalchef zu überzeugen, ihn einzustellen, weil er für wenig Lohn zu arbeiten anfangen möchte. Paul schlägt vor, am 1. Tag für nur 50 Cent zu arbeiten und an jedem weiteren Tag den doppelten Lohn des Vortages zu erhalten. Würden Sie als Personalchef auf das Angebot eingehen, wenn Paul 3 Wochen á 5 Tage arbeiten möchte? Begründen Sie.
- Nennen Sie Beispiele für monoton wachsende (alternierende; fallende mit rekursiver Bildungsvorschrift) Zahlenfolgen.
- Skizzieren Sie eine monoton wachsende (fallende, alternierende, konstante) Folge in ein Koordinatensystem.
- Finden Sie Zahlenfolgen mit folgenden Eigenschaften:
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1$  ;  $a_n > 1$  für  $n > 0$
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1$  ;  $a_n < 1$  für  $n > 0$
- Es sind drei Zahlenfolgen gegeben:
 
$$(1) a_n = 1 + \frac{1}{n} \quad (2) a_n = 1 + n \quad (3) a_n = \frac{n-1}{2n}$$
  - Stellen Sie die ersten zehn Glieder folgender Zahlenfolgen auf je einem Zahlenstrahl dar. Geben Sie eine Vermutung über die Konvergenz der Folgen an.
  - Finden Sie alle Folgenglieder, für die gilt:  
 $a_n > 1$        $a_n < 1$        $a_n = 1$        $a_n < 1,1$        $a_n < 1,01$        $a_n < 1,001$
- Setzen Sie die Folgen fort.
  - 0; 2; 4; 6; .....
  - $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{8}$ ; .....
  - 25; 27; 24; .....
- Schreiben oder zeichnen Sie auf, was Sie sich unter folgenden Formulierungen vorstellen.
  - die Folge der natürlichen Zahlen von 1 bis 10
  - die Folge der Zweierpotenzen
  - die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 10
  - die Summe der Zweierpotenzen
- Nennen Sie Beispiele für Partialsummen und Partialsummenfolgen.

**Reaktivierbares Wissen und Können:**

**13.** Geben Sie für jeden Begriff eine Beispielfolge an! Stellen Sie sie mit dem Voyage200 dar und übernehmen Sie eine Skizze der Folge in die Tabelle!

Begriff	Bildungsvorschrift	Skizze
Nullfolge		
konvergente Folge		
divergente Folge		
konstante Folge		

**14.** Gegeben sind die Zahlenfolgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  mit  $a_n = 2 + \frac{1}{n}$  ;  $b_n = 5 - \frac{4}{n}$

a) Speichern Sie die Bildungsvorschriften für beide Folgen im CAS und stellen sie die Folgen grafisch dar!

b) Ermitteln Sie den Grenzwert der Folge  $(a_n)$  bzw.  $(b_n)$ ,

c) Ermitteln Sie die Folgen

$$c_n = a_n + b_n \quad d_n = a_n - b_n \quad e_n = a_n \cdot b_n \quad f_n = \frac{a_n}{b_n}$$

d) Welchen Grenzwert vermuten Sie für die Folgen aus Aufgabe c)?

Überprüfen Sie Ihre Vermutung an Hand der Grafik und der Tabellen.

**15.** Entscheiden Sie, bei welcher der Folgen es sich um eine Nullfolge handelt.

a)  $a_n = \frac{-2}{n^3}$  ; b)  $a_n = \frac{5}{2^n}$  ; c)  $a_n = \frac{n-1}{n^3}$  ; d)  $a_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^n$

**16.** Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge mit Hilfe der Grenzwertsätze und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen, die mit einem CAS ermittelt wurden.

a)  $a_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}$    b)  $a_n = \frac{2n-4}{5+n}$    c)  $a_n = \frac{5n-7}{n^2-3n}$

**17.** Untersuchen Sie die Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt. Widerlegen Sie die falschen Aussagen durch ein Gegenbeispiel und erläutern Sie die richtigen an einem Beispiel.

a) Jede geometrische Folge mit  $q < 0$  ist konvergent.

b) Jede geometrische Folge mit  $|q| > 1$  ist divergent.

c) Wenn eine Folge alternierend ist, dann kann sie nur konvergent sein.

d) Wenn eine arithmetische Folge monoton wachsend ist, dann ist sie divergent.

e) Wenn eine Folge monoton wachsend ist, dann ist sie divergent.

f) Es gibt Folgen, die gleichzeitig divergent und konstant sind.

g) Eine monoton fallende Folge kann sich nur von oben einem Grenzwert nähern.

**18.** Ermitteln Sie die Anzahl der Summanden der gegebenen Summen. Bestimmen Sie jeweils die ersten 3 Summanden jeder Aufgabe.

a)  $\sum_{k=1}^{45} (2k-1)$

b)  $\sum_{k=5}^{18} (3k+2)$

c)  $\sum_{i=1}^8 80 \cdot 0,5^i$

**19.** Berechnen Sie die nachfolgenden Partialsummen mit Hilfe des CAS.

a)  $\sum_{k=1}^{45} (2k-1)$

b)  $\sum_{k=1}^{18} (3k+2)$

c)  $\sum_{i=1}^8 80 \cdot 0,5^i$

d)  $\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)$

**20.** Geben Sie an, ob die gegebene geometrische Reihe konvergiert. Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert der Reihe.

a)  $\sum_{k=1}^n 0,7^{k-1}$

b)  $\sum_{k=1}^n 1,01^{k-1}$

c)  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$

**21.** Schreiben Sie mithilfe eines Summenzeichens.

a)  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{2187}$

b)  $101 + 105 + 109 + \dots + 177 + 181$

c)  $1 + 4 + 9 + 16 + \dots$

**Exemplarisches:**

**22.** Finden Sie Zusammenhänge zwischen dem Anstieg einer linearen Funktion und der Monotonie arithmetischer Folgen.

**23.** Vergleichen Sie miteinander:

a)  $y = 0,4 \cdot x - 7,4$  und  $a_n = -7 + (n-1) \cdot 0,4$

b)  $b_n = 32 \cdot 0,5^{n-1}$  und  $y = 64 \cdot 0,5^x$

c)  $c_n = n^2$  und  $y = x^2$

**24.** Untersuchen Sie, ob das Verfahren zur Monotonieuntersuchung von Folgen auf die Funktion  $y = 3x - 5$  zu übertragen ist.

**25.** Überlegen Sie, ob es möglich ist, eine lineare Funktion rekursiv zu beschreiben. Geben Sie gegebenenfalls ein Beispiel an.

**26.** Entwickeln Sie einen Vorschlag, wie das Verfahren zur Monotonieuntersuchung von Folgen auf Funktionen zu übertragen wäre. Erläutern Sie ihn an Beispielen.

**27.** Untersuchen Sie, ob das Verfahren zur Bestimmung des Grenzwertes der Folge

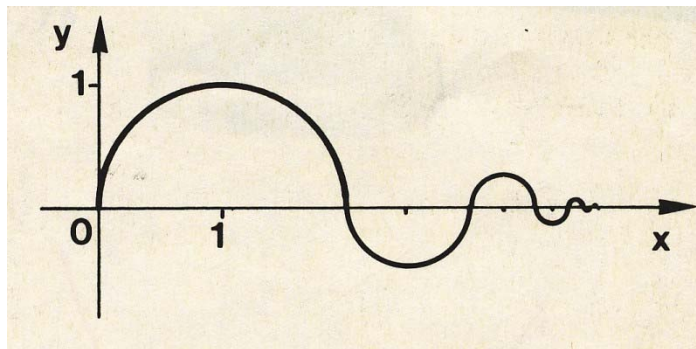
$a_n = \frac{5n-4}{n}$  auf die Funktion  $y = \frac{5x-4}{x}$  zu übertragen ist.



28. Vervollständigen Sie die Übersicht über die Monotonie geometrischer Folgen und überlegen Sie, welche Teile auf Exponentialfunktionen übertragbar sind.

	$a_1 > 0$	$a_1 < 0$	$a_1 = 0$
$q > 0$			
$q < 0$			
$q = 0$			

29. Anne geht jeden Tag einen 2 km langen Weg zur Schule. An einem Morgen überlegt sie: „Ich könnte meinen Schulweg auch so in Etappen zerlegen, dass meine erste Etappe einen Kilometer beträgt. Die zweite Etappe ist die Hälfte der ersten Etappe, die dritte die Hälfte der zweiten Etappe usw.“ Nehmen Sie zu diesen Gedanken Stellung.
30. Herr Buddel möchte ein Haus bauen und nimmt einen Kredit von 100 000 € zu einem Zinssatz von  $x$  % auf. Er weiß, dass er maximal jährlich 12000 € zurückzahlen kann. Er beginnt mit der Rückzahlung am Ende des ersten Jahres. Die Zinsbindung endet nach 10 Jahren. Erkundigen Sie sich bei einer Bank nach den aktuellen Zinssätzen für ein Darlehen von 100 000 € und einer Laufzeit von 10 Jahren (ohne Bearbeitungsgebühren). Vereinfachen Sie Ihre Rechnungen gegebenenfalls durch die Annahme einer jährlichen Zahlungsweise. Beraten Sie Herrn Buddel ausführlich!
31. Untersuchen Sie folgende Aussage: Die Partialsummenfolge der ungeraden natürlichen Zahlen entspricht der Folge der Quadratzahlen.
32. Die untenstehend abgebildete Figur ist durch das Aneinanderfügen von Halbkreisen entstanden, wobei jeder neue Durchmesser das 0,6fache des vorherigen Durchmessers ist. Der erste Durchmesser beträgt 2 cm. Wie lang ist die Linie, wenn man sich das Aneinanderfügen der Halbkreise beliebig oft fortgesetzt denkt?



## 2.3 Grenzwert von Funktionen

### Vorhandenes Wissen

*Aus dem Mathematikunterricht:*

- Verhalten von Funktionen im Unendlichen: Wenn  $x$  sehr groß oder sehr klein wird, sagt man: „ $x$  strebt gegen  $+\infty$  bzw.  $-\infty$ “. Die Funktionswerte können dann auch gegen  $+\infty$  bzw.  $-\infty$  streben oder aber sich einer Geraden (meist parallel zur  $x$ -Achse) annähern, wie z. B. bei  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Die Geraden heißen Asymptoten.
- Verhalten von Funktionen an bestimmten Stellen (Polstellen): Man sagt: „ $x$  strebt gegen den Wert  $a$ “, wenn sich die Werte von  $x$  der Stelle  $a$  immer weiter annähern und der Abstand von  $x$  zu  $a$  immer geringer wird. Funktionswerte streben gegen  $+\infty$  bzw.  $-\infty$ , wenn sich die  $x$ -Werte einer Stelle auf der  $x$ -Achse immer weiter annähern, wie z. B. bei  $f(x) = \frac{1}{x}$ , wenn  $x$  sich der Stelle  $0$  immer weiter annähert.
- Grenzwert einer Zahlenfolge: inhaltliche Vorstellung vom Grenzwert der Folge für  $n \rightarrow \infty$ , Definition mit der  $\varepsilon$ -Umgebung, Grenzwertsätze, Konvergenz, Divergenz

*umgangssprachlich:*

- Grenze: als Ende einer Straße, die aber unter gewissen Bedingungen zu überschreiten ist, Landesgrenze, Grenzen setzen, Vorrat ist begrenzt, Grenzwert als Wert, der nicht überschritten werden darf (Grenzwert der Belastung)
- Konvergieren (sich einander annähern), Divergieren (sich voneinander entfernen)

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- die Schreibweise  $x \rightarrow \pm\infty$  bedeutet, dass  $x$  beliebig groß/klein wird,
- die Schreibweise  $x \rightarrow a$  bedeutet, dass  $x$  sich von rechts bzw. links einer Stelle  $a$  annähert,
- es bei Funktionen Grenzwerte für  $x \rightarrow \pm\infty$  und für  $x \rightarrow a$  gibt. Das ergibt sich aus dem erweiterten Definitionsbereich von Funktionen gegenüber Folgen.
- das Grundprinzip zur Bestimmung von Grenzwerten von Funktionen die Nutzung von Testfolgen ist. Diese nähern sich der zu untersuchenden Stelle  $a$  auf der  $x$ -Achse oder den Grenzen des Definitionsbereiches an. Gleichzeitig muss das Verhalten der zugehörigen Funktionswerte untersucht werden.

Die Schülerinnen und Schüler können:

- die *limes*-Schreibweise für  $x \rightarrow a$  und  $x \rightarrow \pm\infty$  sicher verwenden,
- Prototypen für Testfolgen sicher zuordnen (z.B.: Die Folgen  $a + \frac{1}{n}$  und  $a - \frac{1}{n}$  nähern sich von rechts bzw. links dem Grenzwert  $a$ )

**Reaktivierbares Wissen und Können**

Die Schülerinnen und Schüler können

- ein CAS zur Grenzwertberechnung ( $x$  durch Testfolgen ersetzen) nutzen,
- Vermutungen für Grenzwerte aus grafischen und tabellarischen Darstellungen bilden,
- Sätze über konstante Folgen, Nullfolgen, Summen, Differenzen und Produkten von Folgen auf Grenzwertberechnungen bei Funktionen übertragen,

**Exemplarisches**

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

- Der rechtsseitige und linksseitige Grenzwert an einer Stelle (Polstelle bei bekannten Potenzfunktionen mit negativen Exponenten wie z.B.:  $x = 0$  bei  $f(x) = x^{-n}$ ) können gleich oder unterschiedlich sein.
- Rechtsseitige und linksseitige Grenzwerte an einer Stelle können Zahlen oder uneigentliche Grenzwerte (Unendlich) sein.
- Die Grenzwerte für  $x \rightarrow +\infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  sind häufig unterschiedlich.
- Im Definitionsbereich können die Grenzwerte beliebig oft über- oder unterschritten werden.

## Aufgaben

### Sicheres Wissen und Können

1. Geben Sie je eine Testfolge an, die sich für  $n \rightarrow \infty$  dem gegebenen Grenzwert nähert.

Grenzwert	Bildungsvorschrift	Skizze (Zahlenstrahl)
3		
-2		
$-\infty$		
0		
$\infty$		

2. Stellen Sie eine Übersicht auf, in der mindestens die Begriffe Grenzwert, Stelle, im Unendlichen, konvergent und divergent vorkommen.

3. Vergleichen Sie das Grenzwertverhalten von Folgen und Funktionen.

4. Beschreiben Sie die Unterschiede zwischen  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 2) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{x} = 2$ .

5. Vergleichen Sie:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{x}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3}{n}$ .

6. Bringen Sie die Kenntnisse über umgekehrte Proportionalität in Zusammenhang mit dem Grenzwertverhalten von Funktionen.

7. Bei einigen Fahrzeugen gibt es eine Automatik – Stellung für die Scheibenwischer. In der Beschreibung steht, dass die Scheibenwischer automatisch angehen, wenn der Regen einen bestimmten Grenzwert erreicht hat. Vergleichen Sie den Grenzwert – Begriff in diesem Zusammenhang mit seiner mathematischen Bedeutung.

### Reaktivierbares Wissen und Können

8. Ersetzen Sie bei folgenden Funktionen die Argumente jeweils durch eine Folge, die gegen  $+\infty$  und eine Folge, die gegen  $-\infty$  divergiert.

Bestimmen und vergleichen Sie die entsprechenden Grenzwerte der Funktionswerte.

a)  $f(x) = \frac{3}{2x+1}$       b)  $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$       c)  $f(x) = \frac{x^2-3}{x+1}$       d)  $f(x) = 2^x$

9. Vergleichen Sie das Verhalten der Funktionen im Unendlichen.

a)  $f(x) = \frac{3}{x}$       b)  $f(x) = 3^x$       c)  $f(x) = -5x + 2$       d)  $f(x) = x^{-1} + 2$ .

10. Geben Sie eine Funktion mit folgender Eigenschaft an,

- Sie hat den Grenzwert 3.
- Ihr Graph nähert sich einer Geraden an.
- Sie ist divergent.
- Sie hat eine Polstelle bei  $x = 4$ .

## 2.4 Stetigkeit von Funktionen

### Vorhandenes Wissen

*Aus dem Mathematikunterricht:*

- Polstellen: treten bei Potenzfunktionen mit negativen Exponenten auf, gehören nicht zum Definitionsbereich. Sie entstehen häufig dort, wo die Funktion nicht definiert ist (z.B. durch die Division durch 0). Es gibt unterschiedliche Schreibweisen für den Ausschluss einer Zahl aus dem Definitionsbereich. (senkrechte Asymptoten mit Gleichungen beschreiben)
- Grenzwerte von Funktionen: Behandlung unmittelbar vorher: Systematisierung der Grenzwerte für  $x \rightarrow \pm\infty$  und für  $x \rightarrow a$

*umgangssprachlich:*

- „stetig“ wird mit einer gleichmäßigen Entwicklung ohne Höhen und Tiefen gleichgesetzt.
- „stetig“ heißt: „ohne Unterbrechung“.

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- die Graphen stetiger Funktionen in einem abgeschlossenen Intervall in einem Zug „durchgezeichnet“ werden können,
- die bis Klasse 10 behandelten Funktionsklassen in ihrem Definitionsbereich stetig sind.
- die Funktionsklassen durch die gebrochenrationalen Funktionen und abschnittsweise definierten Funktionen erweitert werden,
- gebrochenrationale Funktionen Polstellen oder stetig behebbare Definitionslücken besitzen können,
- abschnittsweise definierte Funktionen Sprungstellen aufweisen können,
- auf dem Voyage200 Definitionslücken kaum zu erkennen sind.

Die Schülerinnen und Schüler können

- stetige/unstetige Funktionen und Unstetigkeitsstellen am Graphen erkennen,
- Prototypen für stetige und unstetige Funktionen nennen oder ihre Graphen skizzieren,
- die Schreibweise für abschnittsweise definierte Funktionen lesen,
- die Betragsfunktion abschnittsweise schreiben.

#### Reaktivierbares Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen die Definition der Stetigkeit an einer Stelle  $a$ ,
- verbinden die Vorstellung von Stetigkeit in einem abgeschlossenen Intervall mit dem „Durchzeichnen“ des Graphen in diesem Intervall.
- wissen, dass gebrochenrationale Funktionen in ihrem Definitionsbereich stetig sind, obwohl man den Graphen an den Polstellen nicht „durchzeichnen“ kann.

- Wissen, dass es verschiedene Schreibweisen für abgeschlossene und offene Intervalle und für eingeschränkte Definitionsbereiche gibt.

Die Schülerinnen und Schüler können

- Vermutungen für Unstetigkeitsstellen aus grafischen und tabellarischen Darstellungen bilden,
- die Definition der Stetigkeit an einer Stelle  $a$  auf einfache Beispiele/Gegenbeispiele anwenden,
- den rechts- und linksseitigen Grenzwert an Unstetigkeitsstellen mithilfe von Testfolgen ermitteln,
- ein CAS zur Grenzwertbestimmung an Unstetigkeitsstellen nutzen,
- Unstetigkeitsstellen und die zugehörigen Punkte im Graphen durch entsprechende Klammern und Kreise kennzeichnen,
- die mathematisch exakte Schreibweise für abschnittsweise definierte Funktionen benutzen,
- das asymptotische Verhalten gebrochenrationaler Funktionen im Unendlichen untersuchen, wenn sie sich einer Asymptote (= Gerade) nähert.

### Exemplarisches

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

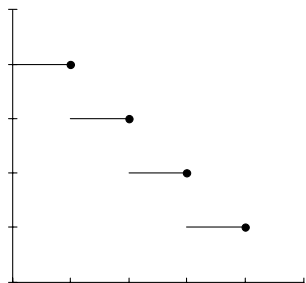
- Aus den Grenzwertsätzen für Funktionen (konstante, Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten) folgen die Sätze über stetige Funktionen an einer Stelle  $a$ .
- Es gibt Funktionen, die sich asymptotisch einer Funktion annähern, die nicht konstant oder linear ist (asymptotische Funktion = Funktion, der sich eine Funktion im Unendlichen annähert).
- Es kann nicht nur eine Unterteilung in „stetig“ und „unstetig“, sondern auch in „stetig“ und „diskret“ vorgenommen werden. Zahlenfolgen sind Beispiele für diskrete Funktionen. Durch Erweiterung des Definitionsbereiches können aus ihnen stetige Funktionen entstehen.

## Aufgaben

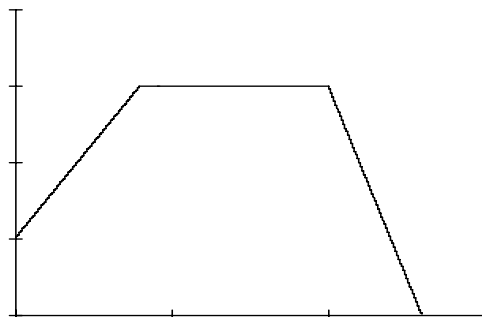
### Sicheres Wissen und Können

1. Beschreiben Sie passende Vorgänge zu den Graphen

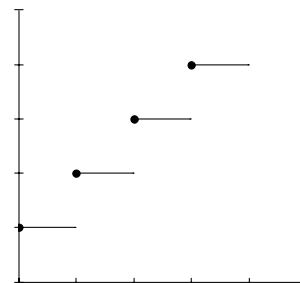
a)



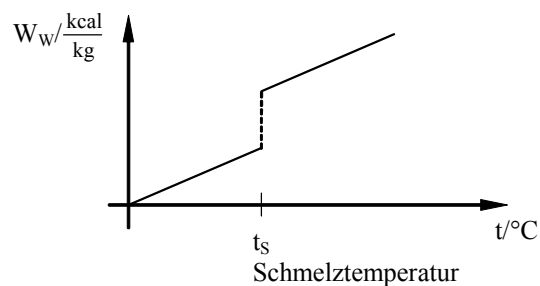
b)



c)

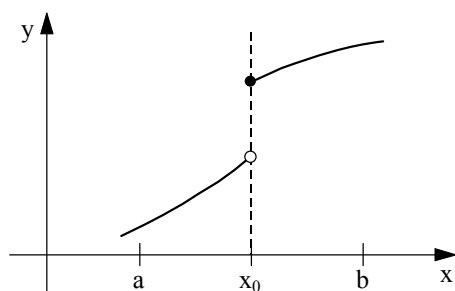


2. Interpretieren Sie das folgende Diagramm.

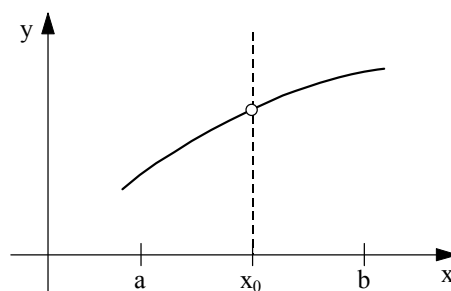


3. Beschreiben Sie das Verhalten der folgenden Graphen an der Stelle  $x_0$ .

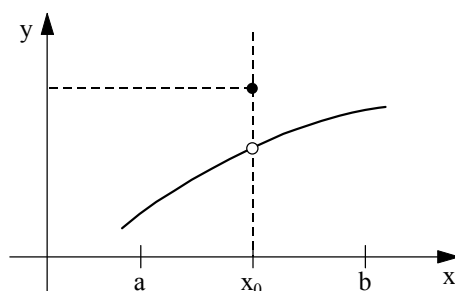
a)



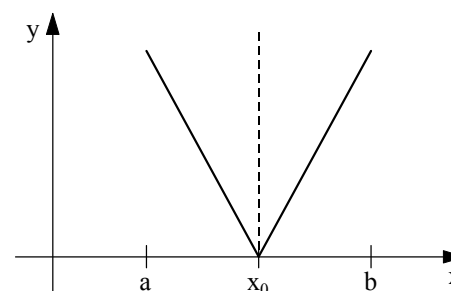
b)



c)



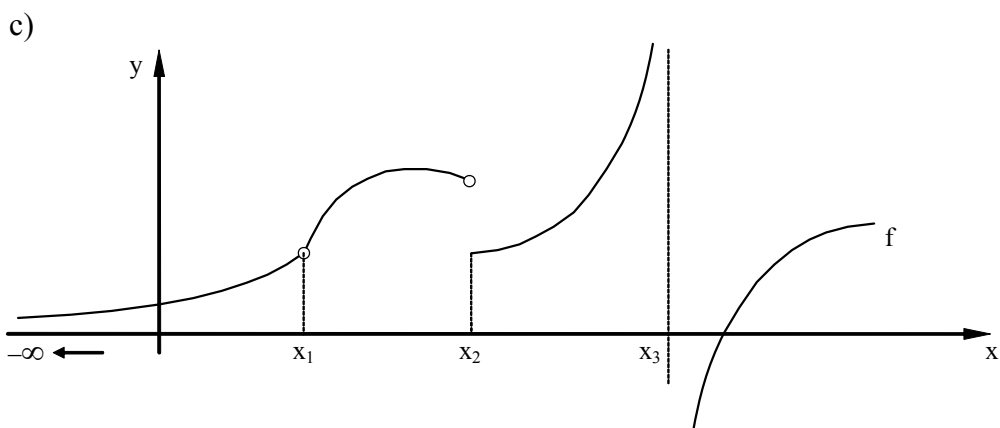
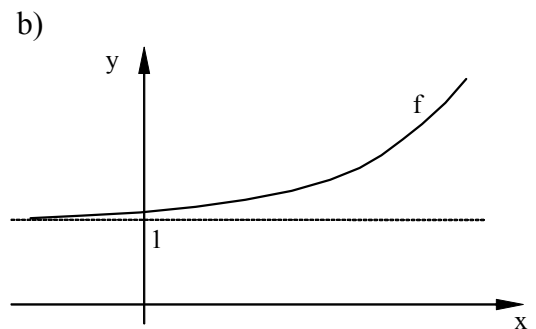
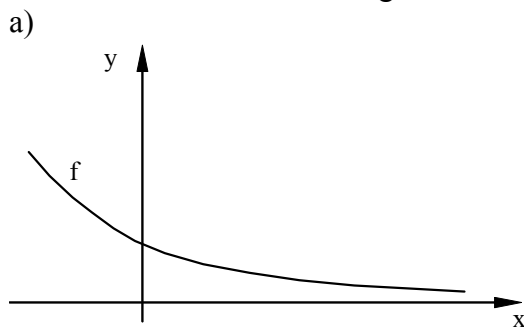
d)



4. Vergleichen Sie das Verhalten von Funktionen bei Annäherung an eine Polstelle und an eine stetig behebbare Definitionslücke.
5. Geben Sie Beispiele für Funktionen an.
- mit einer Polstelle,
  - ohne Polstellen,
  - mit einer Definitionslücke,
  - ohne Definitionslücken.
6. Woran denken Sie, wenn Sie sich eine Funktion vorstellen, die folgende Eigenschaft hat?

Die Funktion...	Vorstellung
ist stetig	
hat eine Polstelle	
hat eine stetig behebbare Definitionslücke	
Hat eine Sprungstelle	

7. Diskutieren Sie das mögliche Verhalten von Funktionen im Unendlichen und an einer Stelle. Nutzen Sie dazu die folgenden Darstellungen.





**Reaktivierbares Wissen und Können**

8. Geben Sie eine Funktion mit folgender Eigenschaft an.
- Sie hat eine Polstelle bei  $x = 5$ .
  - Sie hat an der Stelle  $x = 2$  eine Definitionslücke.
  - Sie weist an der Stelle  $x = 1$  einen endlichen Sprung auf.
9. Konstruieren Sie eine Funktion, die an der Stelle  $x = 2$  nicht definiert und dort auch nicht stetig ist.
10. Vergleichen Sie das Verhalten der Funktionen an der Stelle 2. Nutzen Sie ein CAS zur grafischen Darstellung.

(1)  $f(x) = \frac{3}{x-2}$

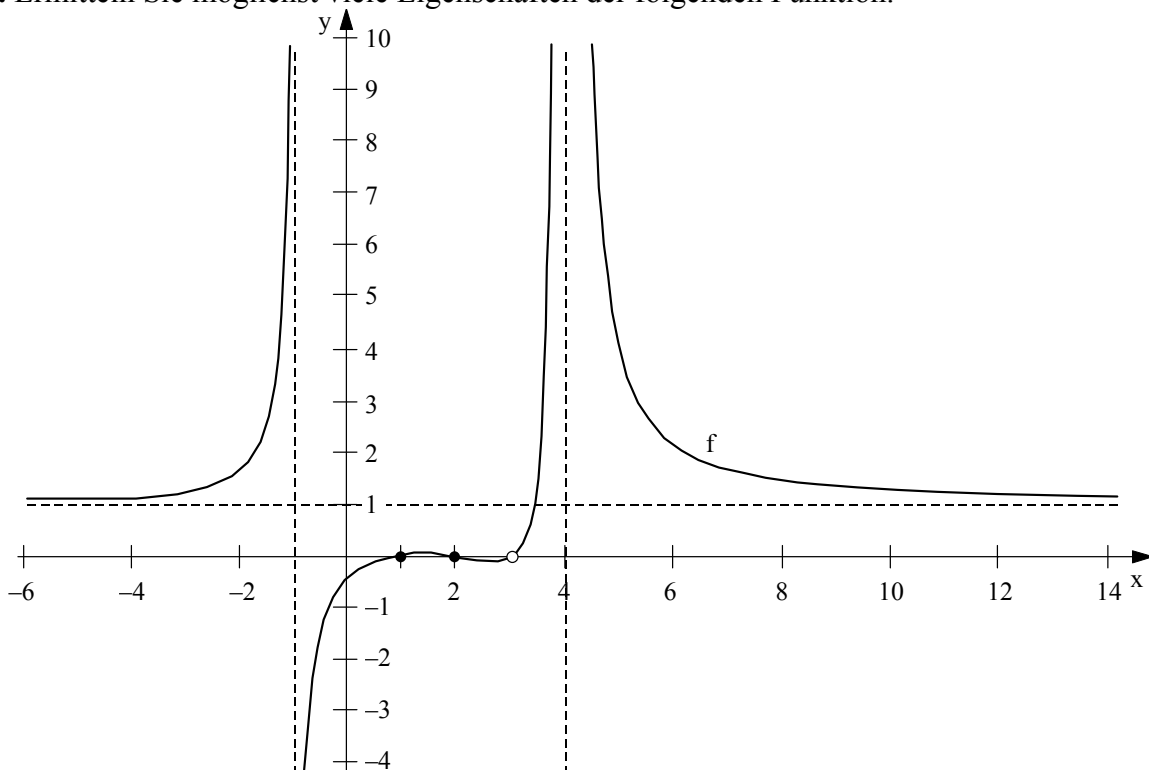
(2)  $f(x) = 2^x$

(3)  $f(x) = -4x + 2$

(4)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{für } x \leq 2 \\ x + 2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

11. Beschreiben Sie die Unterschiede zwischen  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2) = -2$  und  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-3}{x} = \pm \infty$

12. Ermitteln Sie möglichst viele Eigenschaften der folgenden Funktion.



13. Geben Sie eine Funktion mit folgender Eigenschaft an.
- Sie ist an der Stelle  $-1$  unstetig.
  - Sie ist an den Stellen  $-2$  und  $2$  unstetig.
  - Sie ist in ihrem Definitionsbereich stetig ist, der Graph kann an der Stelle  $0$  aber nicht durchgezeichnet werden.
  - Sie ist in ihrem Definitionsbereich stetig ist, besitzt aber unendlich viele Sprungstellen.

**14.** Geben Sie Bedingungen an, unter denen die Vorgänge stetig bzw. unstetig verlaufen könnten.

- a) die Entwicklung des Gewichtes eines Menschen innerhalb von 10 Jahren
- b) die Parkgebühren für ein Fahrzeug
- c) der Preis pro Liter für ein Getränk
- d) die Benzinpreise an der Tankstelle

**15.** Ordnen Sie die folgenden Funktionsgleichungen einem Graphen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung anhand einer markanten Stelle.

a)  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{9}(x+2)^2(x-4)(x-6)}$

b)  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{9}(x+2)(x-4)(x-5)}$

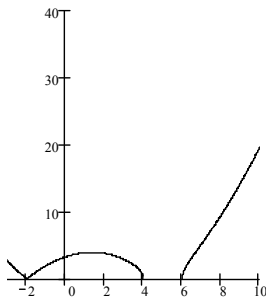
c)  $f(x) = \sqrt{\frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)}}$

d)  $(x) = |x| \cdot (|x+4| - 2)$

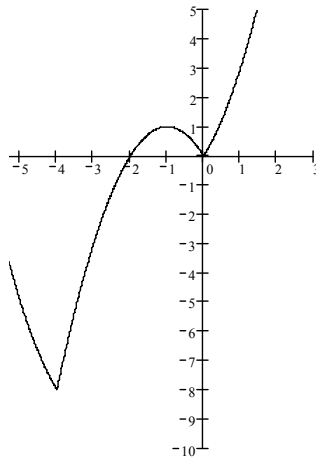
e)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2(4x^2+1)}}{2x}$

f)  $f(x) = \frac{2x^3 - 10x^2 + 13x + |x-2| - 2}{4-2x}$

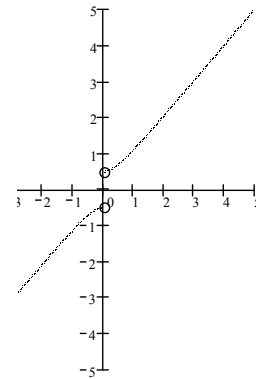
I



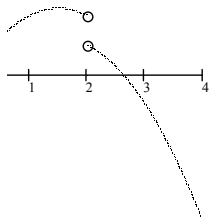
II



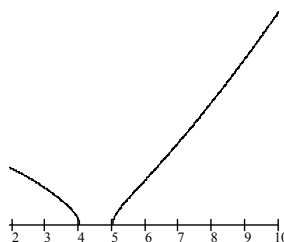
III



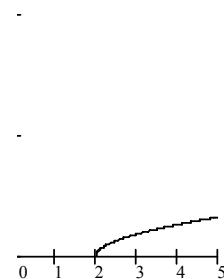
IV



V



VI



**16.** Interpretieren Sie die folgende Einkommenssteuerfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 5617 \\ 0,19x - 1067 & \text{für } 5617 \leq x < 8154 \\ 151,94((x-8100):10000)^2 + 1900((x-8100):10000) + 472 & \text{für } 8154 \leq x < 120042 \\ 0,53x - 22842 & \text{für } x \geq 120042 \end{cases}$$

17. Ermitteln Sie den rechts- und linksseitigen Grenzwert an den Unstetigkeitsstellen mithilfe von Testfolgen.

a)  $f(x) = \frac{1}{x}$

b)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

c)  $f(x) = \frac{2x}{x - 2}$

d)  $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

e)  $f(x) = \frac{5}{x^2 - 1}$

f)  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2}$

18. Ermitteln Sie alle Unstetigkeitsstellen der folgenden Funktionen und begründen Sie deren Art.

a)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$

b)  $f(x) = \frac{(x - 3)}{x^2 - 9}$

c)  $f(x) = \frac{2x}{x - 2}$

d)  $f(x) = \frac{5}{x^2 - 1}$

### Exemplarisches

19. Informieren Sie sich mithilfe eines CAS über die Eigenschaften folgender Funktionen:

a) Heaviside-Funktion:

$$H(x) = 1 \text{ für } x > 0$$

$$H(x) = 0 \text{ für } x \leq 0$$

b) Signum-Funktion (Eingabe in CAS: sign(x))

$$1 \text{ für } x > 0$$

$$\text{sgn}(x) = 0 \text{ für } x = 0$$

$$-1 \text{ für } x < 0$$

## 2.5 Differenzierbarkeit von Funktionen

### Vorhandenes Wissen

*Aus dem Mathematikunterricht:*

- Sekante und Tangente am Kreis
- Anstiegsdreieck und Gleichung zur Berechnung des Anstiegs linearer Funktionen
- Tangens eines Winkels
- Grenzwertbegriff für Folgen und Funktionen
- Monotonie von Funktionen beschreiben, Monotonieuntersuchungen von Folgen

*umgangssprachlich:*

- ableiten: in eine andere Richtung leiten, etwas auf seinen Ursprung zurückführen
- differenzieren: genau, bis ins Einzelne unterscheiden
- steigen: im Niveau höher werden, zunehmend an Bedeutung gewinnen, stattfinden
- Anstieg: Steigung, Erhöhung oder Zunahme
- Wachsen: als lebender Organismus an Größe, Länge, Umfang zunehmen, an Größe, Ausmaß, Zahl, Menge, Stärke, Intensität zu nehmen, sich ausbreiten, sich ausdehnen
- Fallen: seine Höhe vermindern, im Wert geringer werden, sinken
- Rate: vereinbarter Geldbetrag der in regelmäßigen Zeitabständen zu zahlen ist oder meist in Prozent ausgedrücktes Verhältnis zwischen zwei Größen, das das Tempo einer bestimmten Entwicklung angibt
- Durchschnittsgeschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit:  $v = s/t$  als Formel der Durchschnittsgeschwindigkeit (gilt nur bei geradlinig gleichförmiger Bewegung auch für die Momentangeschwindigkeit), Momentangeschwindigkeit kann man vom Tachometer ablesen, entspricht im Allgemeinen nicht der Durchschnittsgeschwindigkeit
- Mittleres Wachstum: Wachstumsraten sind bezogen auf gleiche Zeiteinheiten

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- der Differenzenquotient einer Funktion  $f$  für das Intervall  $[a ; b]$  definiert ist als:  

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
- der Differenzenquotient geometrisch als Anstieg einer Sekante und inhaltlich als mittlere Änderungsrate gedeutet werden kann,
- der Differenzialquotient geometrisch als Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion in einem Punkt gedeutet werden kann,
- der Differenzialquotient inhaltlich als lokale Änderungsrate gedeutet werden kann, 1. Ableitung an einer Stelle  $a$  genannt und mit  $f'(x)$  bezeichnet wird,

- die Ableitungsfunktion jedem Argument genau die Ableitung der Ausgangsfunktion an dieser Stelle zuordnet,

Die Schülerinnen und Schüler können

- das Änderungsverhalten von Funktionen an außer- und innermathematischen Beispielen beschreiben,
- den Differenzenquotienten auch in Anwendungssituationen berechnen,
- die Potenz-, Summen-, Faktor- und Konstantenregel anwenden.

### **Reaktivierbares Wissen und Können:**

Die Schülerinnen und Schüler wissen

- unter welchen Bedingungen eine Funktion differenzierbar ist,
- die Definition des Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten im Intervall  $[a;b]$  für  $b \rightarrow a$ ,
- dass es unterschiedliche Schreibweisen für die Ableitungsfunktion ( $f'(x)$  und  $\frac{dy}{dx}$ ) gibt

Die Schülerinnen und Schüler können:

- das Wachstumsverhalten von Graphen qualitativ beschreiben (z.B. der Graph ist steigend, aber das Wachstum wird immer geringer..),
- bei Funktionen an gegebenen Stellen die Nichtdifferenzierbarkeit begründen,
- in einfachen Fällen (möglichst ohne Monotoniewechsel) zu einem Intervall eines Funktionsgraphen einen möglichen Verlauf eines Graphen einer Ableitungsfunktion skizzieren,
- für ein Intervall eines Graphen einer linearen Ableitungsfunktion einen möglichen Verlauf eines Graphen einer Funktion skizzieren,
- die Produkt-, Quotienten- und Kettenregel anwenden,
- die Tangenten- und Normalengleichung an einen Graphen in einem Punkt aufstellen,
- die Zusammenhänge zwischen dem Differenzenquotienten, dem Differenzialquotienten, der Ableitung, dem Anstieg von Sekante bzw. Tangente und der mittleren bzw. lokalen Änderungsrate für das Intervall  $[a;b]$  bzw. an der Stelle  $a$  beschreiben,
- die Zusammenhänge zwischen der Ableitung an einer Stelle und der Ableitungsfunktion beschreiben,
- Zusammenhänge zwischen Monotonie und der Ableitungsfunktion herstellen:  
 $f'(x) > 0$ , dann ist  $f(x)$  monoton steigend bzw.  $f'(x) < 0$ , dann ist  $f(x)$  monoton fallend.

**Exemplarisches**

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

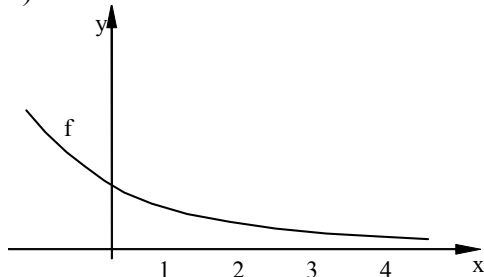
- Die mittlere Änderungsrate hat in großen Intervallen eine beschränkte Aussagekraft, die Aussagekraft wird größer durch Betrachtung der mittleren Änderungsrate für immer kürzer werdende Intervalle,
- Der Differenzialquotient geht als Grenzwert aus dem Differenzenquotienten hervor. Der Differenzialquotient als Grenzwert ist ein mathematisches Modell. In der Realität kann dieser Grenzwert nicht dadurch bestimmt werden, dass die Intervalle beliebig verkleinert werden, da jede Messgröße letztendlich diskret ist. (z.B.: Momentangeschwindigkeit eines Fahrzeugs kann nicht durch die Durchschnittsgeschwindigkeit bestimmt werden, indem die Intervalle für die Zeitmessung gegen 0 gehen, sondern durch andere Methoden wie Tachometer, Dopplereffekt.
- Ein Graph kann für kleine Intervalle durch Geraden approximiert werden. Mit einem CAS wird ein Graph in sehr kleinen Intervallen geradlinig, was an seiner Auflösung liegt. Diese Besonderheit kann genutzt werden, um den Anstieg des Graphen an einer Stelle zu verdeutlichen.
- Zusammenhang zwischen Wachstumsverhalten und der Ableitungsfunktion,
- Wenn eine Funktion an einer Stelle  $a$  differenzierbar ist, so ist sie dort stetig, aber die Umkehrung muss nicht gelten (Betragsfunktion),
- Es gibt beim Einsatz eines CAS aufgrund des numerischen Näherungsverfahrens, das es nutzt, Situationen bei denen konkrete Zahlen für die Ableitung angegeben werden, obwohl die Funktion an der gegebenen Stelle nicht differenzierbar ist.

## Aufgaben

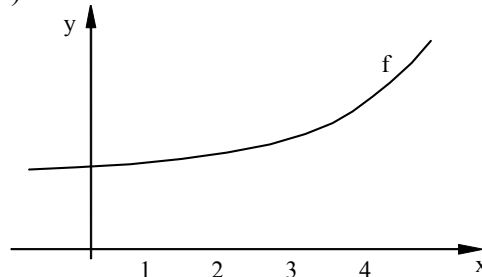
### Sicheres Wissen und Können:

1. Vergleichen Sie das Wachstumsverhalten folgender Graphen jeweils für die Intervalle  $[1;2]$  und  $[3;4]$ .

a)



b)



2. Woran denken Sie, wenn Sie sich eine Funktion vorstellen, die folgende Eigenschaft hat?

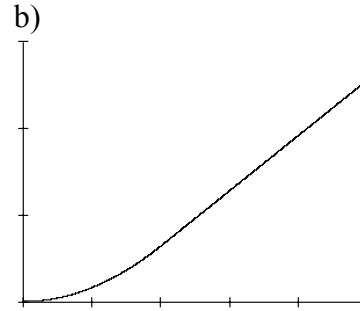
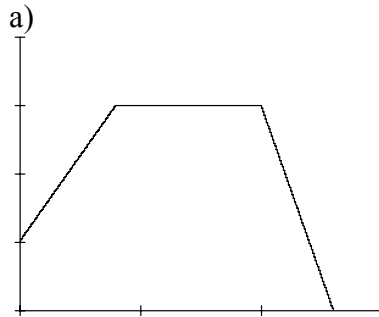
Die Funktion ist an der Stelle a...	Vorstellung / Skizze
stetig.	
differenzierbar.	
stetig, aber nicht differenzierbar.	
weder stetig noch differenzierbar.	

3. Beschreiben Sie Beispiele für Vorgänge, bei denen Sie sowohl die mittlere als auch die lokale Wachstumsrate berechnen oder messen können.
4. Stellen Sie einen möglichen Temperaturverlauf im Laufe eines Tages als Funktion dar und beschreiben Sie die Temperaturänderung in Intervallen.
5. Die Bevölkerung einer Stadt wächst mit der Zeit. Führen Sie eine Funktion ein, die das Wachstum beschreibt. Präzisieren Sie den Begriff Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$ .
6. Vergleichen Sie die Bedeutung des Verbs „ableiten“ (wachsen, fallen, steigen, differenzieren) in der Mathematik und in der Umgangssprache.
7. Skizzieren Sie mindestens 3 Graphen, deren Funktionen für das Intervall  $[2;6]$  einen Differenzenquotienten von 0,5 haben.
8. Geben Sie einen Funktionsgraphen an, der an der Stelle  $x = 2$  nicht differenzierbar ist.
9. Zeichnen Sie einen Funktionsgraphen, für den beim Durchlaufen von links nach rechts gilt: Die Steigung ist immer positiv (negativ), wird aber immer größer.

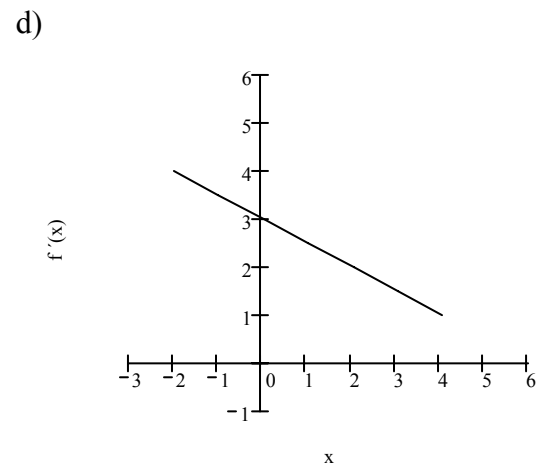
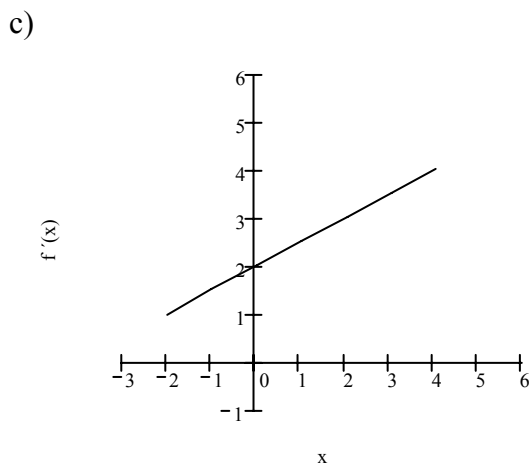
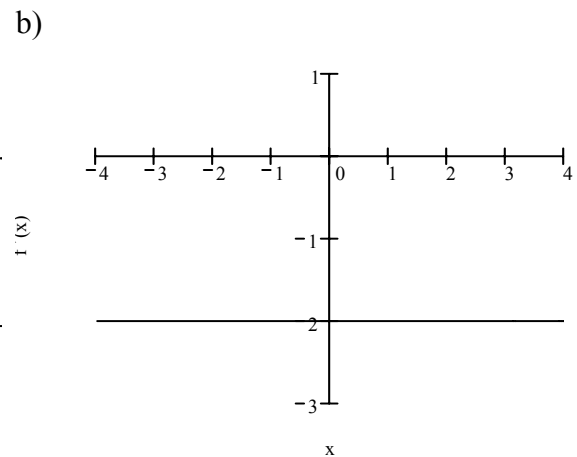
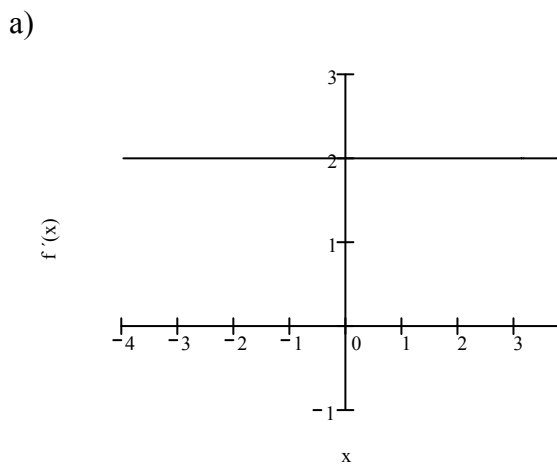
10. Skizzieren Sie einen Funktionsgraphen und legen Sie einen Punkt P fest, so dass folgendes gilt: Die Steigung in P ist 1, und der Graph verläuft oberhalb der Tangente in P.

11. Vergleichen Sie „Ableitung an einer Stelle“ und „Ableitungsfunktion“ miteinander.

12. Skizzieren Sie zu den folgenden Graphen den möglichen Verlauf eines Graphen der Ableitungsfunktion in dem gegebenen Intervall.



13. Skizzieren Sie zu den folgenden Graphen  $f'(x)$  der ersten Ableitungsfunktion den möglichen Verlauf der Ausgangsfunktion  $f(x)$ . Machen Sie Aussagen zur Monotonie der Ausgangsfunktion.

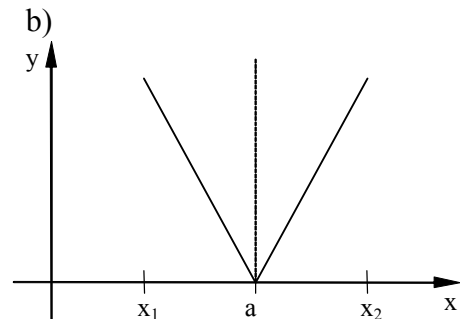
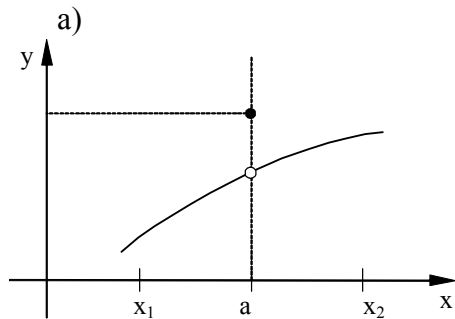




**Reaktivierbares Wissen und Können**

14. Stellen Sie die Funktionen  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = x^3$ ,  $f(x) = x^4$  mit dem CAS im Bereich  $0 \leq x \leq 2$  und im Bereich  $0,95 \leq x \leq 1,05$  dar! Vergleichen Sie die Graphen in den unterschiedlichen Intervallen.

15. Begründen Sie, ob die Funktion an der Stelle  $a$  differenzierbar ist.



16. Stellen Sie eine Übersicht auf, in der mindestens die Begriffe Differenzenquotient, Differenzialquotient, Ableitung, Anstieg einer Sekante bzw. Tangente und mittlere bzw. lokale Änderungsrate vorkommen.

17. Vergleichen Sie die Anstiege der Graphen folgender Funktionen, nachdem Sie sie mit einem CAS dargestellt haben.

a)  $y_1 = x^2$       b)  $y_2 = 2x - 1$       c)  $y_3 = 4x - 4$

18. Gegeben seien ganzrationale Funktionen:  $f(x) = 2$ ;  $g(x) = x - 2$ ;  $h(x) = x^2 - 4$ ;  $j(x) = x^3 + x$ .

Bilden Sie aus ihnen beliebige gebrochenrationale Funktionen und bestimmen Sie ihre Ableitungsfunktionen.

**Exemplarisches**

19. Suchen Sie im Internet Entwicklungskurven. Berechnen Sie die durchschnittliche Entwicklung für bestimmte Intervalle. Ist es möglich, Aussagen über momentane Entwicklungen zu treffen?

20. Bringen Sie die Kenntnisse über die Monotonie von Funktionen in Zusammenhang mit der Ableitungsfunktion.

21. Vergleichen Sie das Verfahren zur Monotonieuntersuchung von Folgen mit der Bildung der Ableitungsfunktion einer Funktion mithilfe des Differenzialquotienten.

22. Beschreiben Sie eine praktische Situation, in der die mittlere Änderungsrate einer Größe Bedeutung hat. Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang die lokale Änderungsrate als Grenzwert.

## 2.6 Kurvenuntersuchungen

### Vorwissen

*Aus dem Mathematikunterricht:*

- inhaltliche Vorstellungen von Extrempunkten (Hochpunkten, Tiefpunkten) eines Graphen
- kleinste und größte Funktionswerte (Maxima, Minima) bei quadratischen Funktionen
- Potenzfunktionen ( $y = a \cdot x^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ) und Winkelfunktionen
- verbale Beschreibung des Trends bei Entwicklungskurven
- Symmetrie von Funktionen bei quadratischen und Potenzfunktionen
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Nullstelle
- Verbale Beschreibung Monotonie von Funktionen (Wachstum, Zunahme, Abnahme)
- Verhalten im Unendlichen und an einer Stelle
- Definitionslücken und deren Art
- Stetigkeit von Funktionen

*umgangssprachlich:*

- maximal, minimal, Maximum, Minimum: gleiche Bedeutungsinhalte wie in der Mathematik
- lokal: örtlich, für einen bestimmten Ort oder Bereich geltend
- global: weltumspannend; umfassend; allgemein (globale Vorstellungen)
- hinreichend: für einen bestimmten Zweck ausreichend, genügend (hinreichendes Einkommen, Die Fakten sind hinreichend bekannt.)
- notwendig: unbedingt erforderlich, unerlässlich; in der Natur einer Sache liegend, zwangsläufig (notwendige Folge)
- Rechtskurve bzw. Linkskurve: rechtsherum (im Uhrzeigersinn) bzw. linksherum fahren

### Ziele

#### 1. Sicheres Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- man beliebig viele Ableitungen formal bilden kann,
- die Ableitungen mit  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f^{(n)}(x)$  bezeichnet werden,
- die zweiten Ableitung als Änderung des Wachstums- bzw. Abnahmeverhaltens interpretiert werden kann,
- eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes „ $f'(x_E) = 0$ “ ist, aber diese Bedingung nicht hinreichend (ausreichend) ist,
- bei einer Kurvenuntersuchung folgende Aspekte betrachtet werden **können**, ohne dass stets alle Punkte „abgearbeitet“ werden müssen:

Definitionsbereich, Wertebereich, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie zum Koordinatenursprung bzw. zur y-Achse, Extrem- und Wendepunkte, Monotonie, Verhalten im Unendlichen, Krümmungsverhalten, Verhalten bei Annäherung an Definitionslücken und im Unendlichen, Asymptotengleichungen

Die Schülerinnen und Schüler können

- folgende Begriffe unterscheiden: Extremstelle  $x_E$ , Extremum  $f(x_E)$  (Maximum, bzw. Minimum) und Extrempunkt  $P(x_E | f(x_E))$  (Hochpunkt, bzw. Tiefpunkt),
- aus dem Graphen einer Funktion auf den Verlauf der Graphen der Funktionen der ersten und zweiten Ableitungen schrittweise schließen und umgekehrt,
- die Ergebnisse einer Kurvendiskussion graphisch in einer Skizze darstellen,
- das Vorgehen zur Bestimmung der Nullstellen, der Monotonieeigenschaften, der Extrem- und Wendepunkte einer Funktion erläutern.

### Reaktivierbares Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler kennen

- notwendige und hinreichende Kriterien bei Extrem- und Wendepunkten,
- die Wendestelle als Stelle der Änderung des Krümmungsverhaltens des Graphen,
- den Sattelpunkt als besonderen Wendepunkt,
- die Zusammenhänge zwischen der ersten Ableitung und der Monotonie (Monotoniesatz), der zweiten Ableitung und dem Krümmungsverhalten eines Graphen.

Die Schülerinnen und Schüler können

- das notwendige Kriterium für das Vorhandensein einer Extremstelle nutzen,
- die Extremstelle mithilfe eines hinreichenden Kriteriums nachweisen und auf die Art des Extremums schließen,
- Rückschlüsse aus dem Vorzeichen der 1. Ableitung in einem Intervall auf das Monotonieverhalten einer Funktion in diesem Intervall ziehen,
- das notwendige Kriterium für das Vorhandensein einer Wendestelle nutzen,
- die Wendestelle mithilfe eines hinreichenden Kriteriums nachweisen,
- Gleichungen für senkrechte und waagerechte Asymptoten aufstellen.

### Exemplarisches

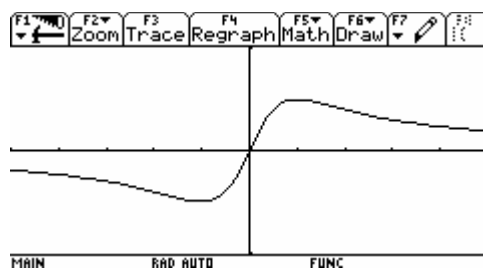
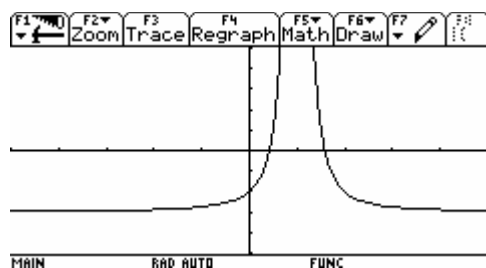
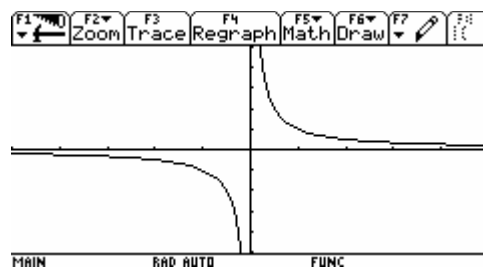
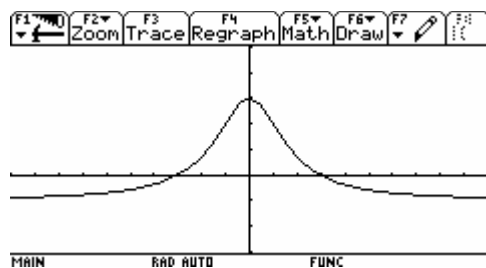
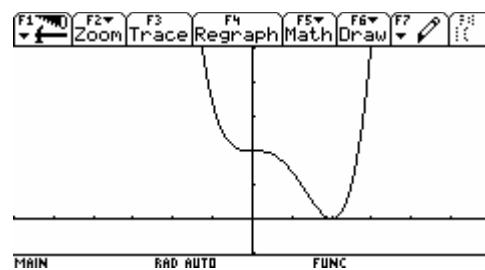
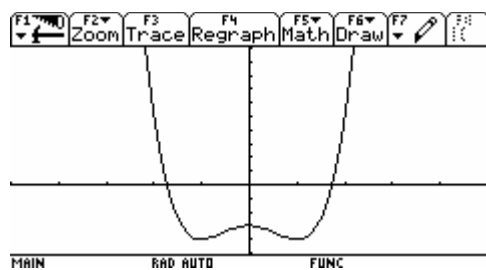
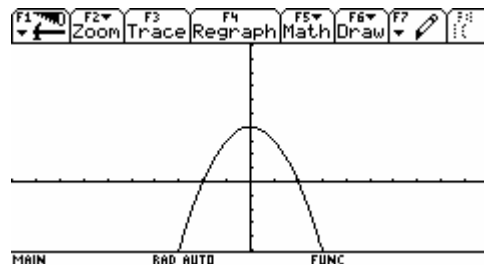
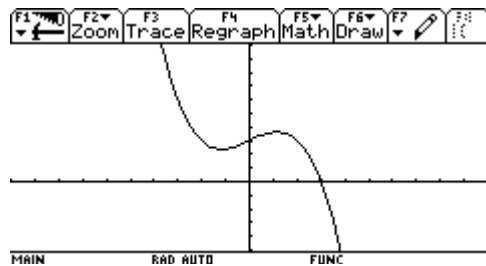
Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

- Das Verhalten im Unendlichen kann bei gebrochenrationalen Funktionen in besonderen Fällen durch eine schräge Asymptote angenähert werden.
- Man kann beim Vorhandensein mehrerer Extrema unterscheiden zwischen lokalen (relativen) und globalen (absoluten) Extrema.
- Anhand fachübergreifender Beispiele werden inhaltliche Bedeutungen der ersten und zweiten Ableitung erschlossen (z. B. Geschwindigkeit, Beschleunigung oder Wirtschaftswachstum und deren Änderung).
- Die Durchführung einer vollständigen Kurvendiskussion wird an einem übersichtlichen Beispiel erlebbar.

## Aufgaben

### Sicheres Wissen und Können

- Die folgenden Graphen sind für vielseitige Aufgabenstellungen zu verwenden, z.B.:
  - Lesen Sie prägnante Merkmale der Funktion aus dem Graphen ab.
  - Kennzeichnen Sie in den Graphen verschiedenfarbig die Extremstellen, die Extrema und die Extrempunkte.
  - Wählen Sie geeignete Intervalle und beschreiben Sie das Wachstumsverhalten sowie die Änderung des Wachstumsverhaltens der Funktionen in diesen Intervallen.



- Bilden Sie jeweils die ersten drei Ableitungen der Funktionen:

a)  $f(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 + 9$

b)  $f(x) = 5x(x^2 + 3)$

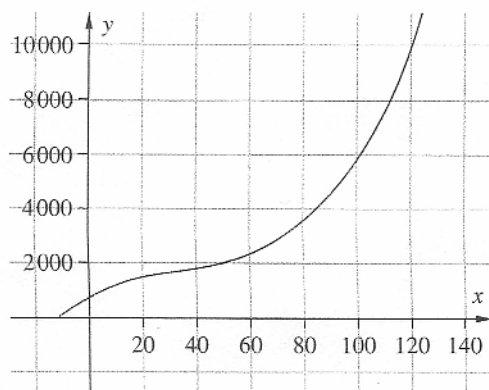
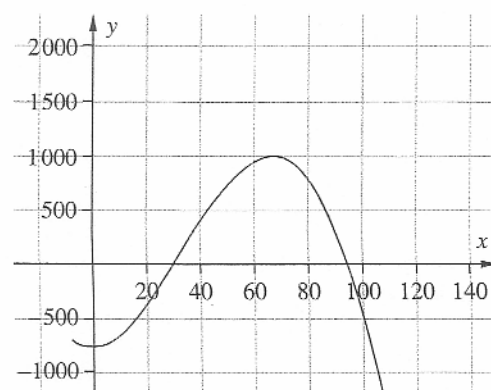
c)  $f(x) = 3x^{-3}$

d)  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

e)  $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2}{x}$

f)  $f(x) = \frac{15}{x^6}$

3. Wie viele von Null verschiedene Ableitungen besitzt die Funktion  $f(x) = 7x^5 + 4x^2 + 2$ ?
4. Bei welcher Ableitung ergibt sich erstmals derselbe Funktionsterm für  $f(x) = 3x^6 - x^2$  und  $g(x) = 3x^6 - 4x^2 + 7x - 1$ ?
5. In den Graphen sind die Kosten und der Gewinn (in Euro) bei einer Produktion eines speziellen elektronischen Gerätes in Abhängigkeit von den Stückzahlen dargestellt. Beschreiben Sie den Verlauf der Funktionen.

Kostenfunktion  $K(x)$ Gewinnfunktion  $G(x)$ 

6. Skizzieren Sie jeweils 2 verschiedene Funktionsgraphen, für die folgende Bedingungen gelten:
  - (1)  $f(x)$  besitzt genau 2 Nullstellen bei  $x_{01} = -1$  und  $x_{02} = 2$ .
  - (2)  $g(x)$  besitzt eine waagerechte Asymptote sowie genau ein Maximum und ein Minimum.
  - (3)  $h(x)$  ist symmetrisch zum Koordinatenursprung und besitzt genau eine Polstelle.
  - (4)  $r(x)$  besitzt die lokale Maximumstelle  $x_{E1} = 2$  und das lokale Minimum  $x_{E2} = -3$ .
  - (5)  $s(x)$  hat den Tiefpunkt  $T(-2 | 1)$  und einen Hochpunkt an der Stelle  $x_E = 1$ .
7. Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung für eine gebrochenrationale Funktion mit folgenden Eigenschaften an.
  - (1) Sie hat eine Polstelle bei  $x_P = 4$  und eine Nullstelle bei  $x_0 = 2$ .
  - (2) Sie hat die Gerade  $y = 5$  als waagerechte Asymptote.
8. Die 1. Ableitung der Funktionen  $f(x) = x^5$  und  $g(x) = x^6$  an der Stelle  $x = 0$  hat jeweils den Wert Null. Erläutern Sie, warum  $f(x)$  im Unterschied zu  $g(x)$  an dieser Stelle kein Extremum besitzt.
9. Begründen Sie, warum jede Funktion 3. Grades mindestens eine Nullstelle hat.
10. Eine Funktion  $f(x)$  hat an der Stelle  $x = 2$  eine waagerechte Tangente, und die Funktion bildet im Intervall  $-1 < x < 5$  eine Rechtskurve. Welche besondere Stelle ist  $x = 2$ ?
11. Begründen Sie: Funktionen, die sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden, haben die gleiche Ableitungsfunktion.

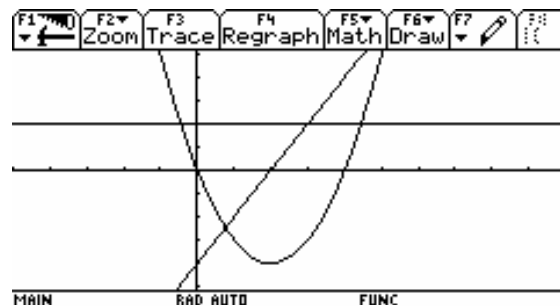
12. Von einer für alle reellen Zahlen definierten Funktion  $f$  ist bekannt:

- (1) Der Graph ihrer zweiten Ableitung  $f''$  ist eine konstante Funktion mit der Gleichung  $y = -1$ .
- (2)  $f'(0) = 0$ .

Skizzieren Sie mögliche Graphen von  $f''$ ,  $f'$  und  $f$ .

13. Die Skizze zeigt die Graphen von  $f''$ ,  $f'$  und  $f$  einer ganzrationalen Funktion  $f$ .

Beschriften Sie die Graphen mit  $G$ ,  $G'$  und  $G''$  und begründen Sie Ihre Zuordnung.

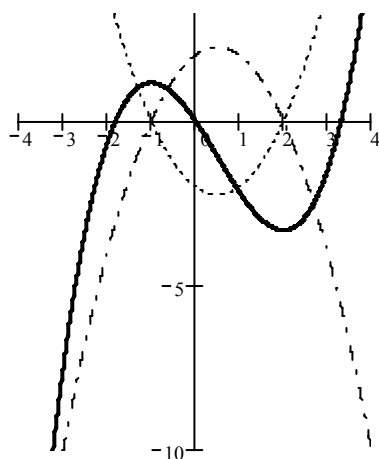


14. Zeichnen Sie Graphen von zeitlichen Entwicklungen, die zu folgenden Aussagen passen.

Beschreiben Sie den Verlauf der Graphen umgangssprachlich und mit mathematischen Fachbegriffen.

- a) Die Zuwachsraten sinken.
- b) Der Aufschwung erlahmt.
- c) Die Talfahrt ist gebremst.

15. Ordnen Sie der folgenden Funktion deren richtige Ableitungsfunktion zu. Nennen Sie mindestens einen Grund für Ihre Zuordnung.



Ausgangsfunktion:

Ableitungsfunktion a):

Ableitungsfunktion b):

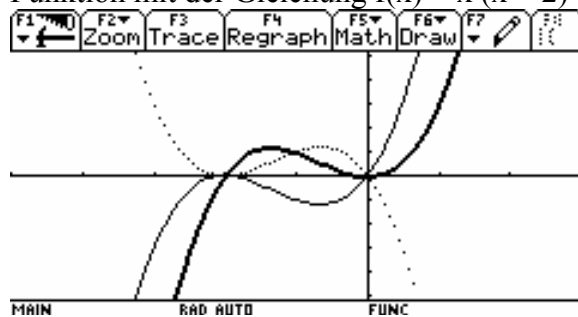
\_\_\_\_\_

.....

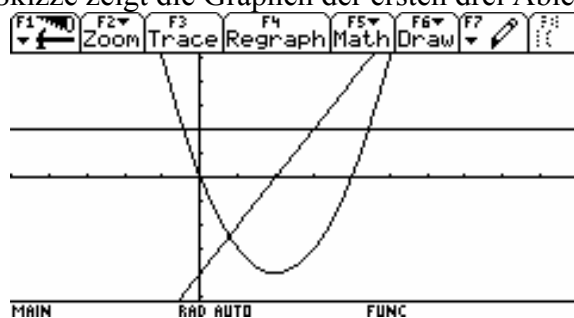
- - - - -

## Reaktivierbares Wissen und Können

16. In dem untenstehenden Bild sind mehrere Graphen abgebildet. Welcher Graph gehört zur Funktion mit der Gleichung  $f(x) = x(x+2)^2$ ?

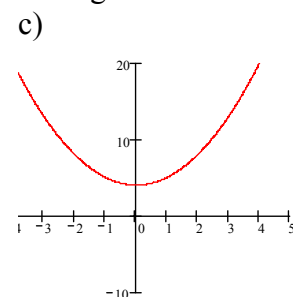
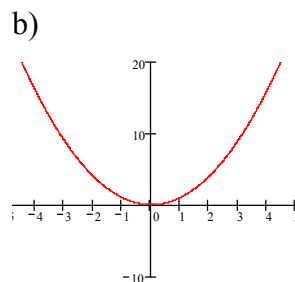
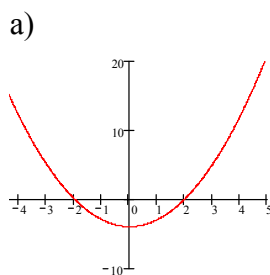


17. Die Skizze zeigt die Graphen der ersten drei Ableitungen einer ganzrationalen Funktion  $f$ .

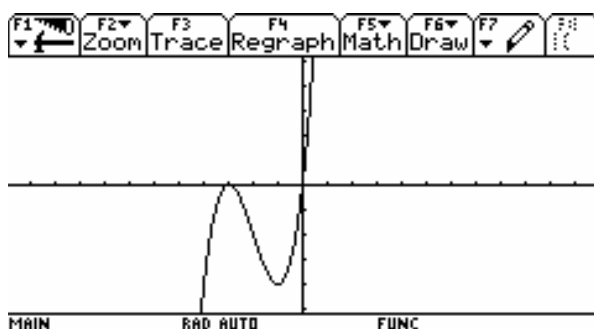


- Beschreiben Sie das Monotonieverhalten der unbekannten Funktion  $f$  sowie die Krümmung ihres Graphen.
- Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen von  $f$ .

18. Skizzieren Sie jeweils eine Ausgangsfunktion für folgende Ableitungsfunktionen. Gehen Sie auf wesentliche Unterschiede und Gemeinsamkeiten Ihrer Ergebnisse ein.



19. Untersuchen Sie die Veränderung des Anstieges der Funktion  $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$  zwischen den beiden Extrempunkten  $H(-3/0)$  und  $T(-1/-4)$ . Begründen Sie, dass im Wendepunkt  $W(-2/-2)$  der kleinste Anstieg über den gesamten Definitionsbereich vorliegt.



20. Beweisen Sie: Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades besitzt genau einen Wendepunkt.
21. Weisen Sie anhand einer Skizze nach, dass eine Funktion mit genau 3 Wendestellen keine ganzrationale Funktion 6. Grades sein kann.
22. Der Erfolg eines Unternehmens wird durch eine Funktion Erf beschrieben, die jeder produzierten Menge  $x$  den erzielten Erfolg  $\text{Erf}(x)$  zuordnet.  $\text{Erf}(x) > 0$  weist auf einen Gewinn hin,  $\text{Erf}(x) < 0$  auf einen Verlust, bei  $\text{Erf}(x) = 0$  arbeitet das Unternehmen kostendeckend. Für ein Unternehmen ist  $\text{Erf}(x) = -0,5x^2 + 10x - 5$ .
- Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion  $\text{Erf}(x)$  an.
  - Entnehmen Sie der Grafik, in welchen Intervallen  $\text{Erf}(x)$  monoton steigt bzw. monoton fällt. Interpretieren Sie das Verhalten der Funktion aus Sicht des Unternehmens.
  - Bei wie vielen Mengeneinheiten arbeitet das Unternehmen kostendeckend?
  - Für wie viele Mengeneinheiten ist der Erfolg maximal?
  - Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion  $\text{Erf}'(x)$  und skizzieren Sie diese im Definitionsbereich der Funktion  $\text{Erf}(x)$ . Was gibt  $\text{Erf}'(x)$  an?
  - Was bedeutet  $\text{Erf}'(x) = 0$ ? Wie verhält sich die Funktion  $\text{Erf}(x)$  an dieser Stelle?

### Exemplarisches

Eine Aufgabe, in der alle Elemente einer vollständigen Kurvendiskussion mit CAS beschrieben sind, befindet sich unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de). (Zusätzliche Aufgaben zum Exemplarischen Lernen in Klasse 11). Wir gehen davon aus, dass im Unterricht nur einmal exemplarisch eine vollständige Diskussion durchgeführt wird, da sich ihr Sinn beim Arbeiten mit CAS nahezu erübrigt.

23. (L) Ein Unternehmen stellt Monitore her. Bei der Herstellung von  $x$  Monitoren entstehen die Kosten  $K(x)$  in €. Die Kosten  $K(x)$  werden aus der Summe der festen Kosten  $F(x) = k$  und der variablen Kosten  $V(x) = 0,001x^3 - 1,29x^2 + 600x$  gebildet ( $x > 0$ ;  $k \in \mathbb{R}^+$ ). Der Verkauf der Monitore an die Händler erfolgt zurzeit zum Stückpreis von 300 € und bildet den Umsatz des Unternehmens, der durch die Umsatzfunktion  $U(x)$  beschrieben wird. Der Gewinn des Betriebes  $G(x)$  ergibt sich aus der Differenz von Umsatz und Kosten  $G(x) = U(x) - K(x)$ .
- Zurzeit betragen die festen Kosten  $F(x) = 1200$  €. Geben Sie  $K(x)$  und  $U(x)$  an. Stellen Sie mithilfe einer Wertetabelle ( $0 \leq x \leq 1000$ , Schrittweite 200, Betrag auf 1000 € gerundet) beide Funktionen in demselben Koordinatensystem dar.
  - Untersuchen Sie die Funktion  $K(x) = 0,001x^3 - 1,29x^2 + 600x + 12000$  ( $x \in \mathbb{R}^+$ ) auf Existenz von Wendepunkten und geben Sie die Monotonieintervalle des Graphen an. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse aus der Sicht des Unternehmens.
  - Berechnen Sie die Schnittstellen zwischen den Funktionen  $K(x) = 0,001x^3 - 1,29x^2 + 600x + 12000$  und  $U(x) = 300x$ . Interpretieren Sie das Intervall zwischen den beiden Schnittstellen hinsichtlich Gewinn und Verlust des Unternehmens. Berechnen Sie den maximalen Gewinn.
  - Der Verkaufspreis für die Monitore ist durch den Konkurrenzdruck um 12 % gesunken. Deshalb werden die Kosten  $K(x) = 0,001x^3 - 1,29x^2 + 600x + 12000$  durch Rationalisierungsmaßnahmen um 10 % reduziert. Berechnen Sie die Anzahl der Monitore, die verkauft werden müssen, um den optimalen Gewinn zu erzielen. Vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus c).
  - Die positive Entwicklung kann folgendermaßen beschrieben werden: Im Jahre 1 ist der Gesamtgewinn 82 500 €. In den folgenden Jahren stieg der Gewinn jährlich um 1,25 %. Fassen Sie die Gewinnentwicklung als eine geometrische Folge auf und geben die explizite und rekursive Bildungsvorschrift an. Berechnen Sie den Gewinn für das 9. Geschäftsjahr, wenn sich die Gewinnentwicklung wie beschrieben fortsetzt.



## 2.7 Anwendung der Differenzialrechnung

### Vorhandenes Wissen

*Aus dem Mathematikunterricht:*

- Verständnis für Extremwertprobleme (bei quadratischen Funktionen)
- Kenntnisse über die Sinus- und die Wurzelfunktion
- Können im Lösen linearer Gleichungssysteme (2 Gleichungen mit 2 Variablen)
- Kenntnis des Einflusses von Parametern auf den Funktionsverlauf bei bisher untersuchten Funktionen, (Streckung, Stauchung oder Verschiebung von Graphen)

*Umgangssprachliche Betrachtungen:*

- Optimum: unter den gegebenen Voraussetzungen, im Hinblick auf ein zu erreichendes Ziel die bestmögliche Lösung, das höchste erreichbare Maß,
- Extrem: bis an die äußerste Grenze, (extreme Temperaturen, extreme Ansichten)
- Schar: größere Anzahl von zusammen auftretenden Menschen od. Tieren (*Kurvenschar* ist also eine größere Anzahl von zusammen auftretenden Kurven),
- Parameter: veränderliche kennzeichnende Größe

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- Extremwertaufgaben nicht algorithmisch gelöst werden können, sondern ein Spezialfall von Problem- oder Sachaufgaben sind (heuristische Vorgehensweisen),
- bei jeder Extremwertaufgabe zum Erfassen und Analysieren des Sachverhalts zunächst die Hauptinformation erfasst, eine Skizze angefertigt, unbekannte Begriffe geklärt werden sollten und sie sich die Veränderung der Zielgröße vorstellen müssen,
- es bei Extremwertproblemen meist sinnvoll ist, von der Zielgröße auszugehen und nach Formeln oder Gleichungen mit der Zielgröße zu suchen (Rückwärtsarbeiten),
- Parameter einer Funktion den Verlauf des Graphen beeinflussen,
- der Begriff Kurvenschar für eine Menge von Graphen einer Funktion mit einem Parameter benutzt wird.

Die Schülerinnen und Schüler können

- die Ableitungsregeln auf einfache ganzrationale, gebrochenrationale sowie  $f(x) = \sin x$  und  $f(x) = \sqrt{x}$  und deren Verknüpfungen und Verkettungen in überschaubaren Fällen anwenden.

#### Reaktivierbares Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler kennen

- die Vorgehensweise bei der Lösung von Extremwertaufgaben,
- eine Strategie zum Auffinden von Funktionstermen aus gegebenen Bedingungen.

Die Schülerinnen und Schüler können

- mittels abschnittsweise definierter, verknüpfter bzw. verketteter Funktionen funktionale Zusammenhänge beschreiben und darstellen,
- aus Anwendungsaufgaben Informationen entnehmen und mathematische Zusammenhänge formulieren,
- sich die Veränderung der Zielgröße vorstellen und in Skizzen darstellen,
- Nebenbedingungen erkennen und diese bei der Veränderung der Zielgröße berücksichtigen,
- Ganzrationale Funktionen zur Modellierung inner- und außermathematischer Sachverhalte auffinden, dafür lineare Gleichungssysteme mit CAS rationell lösen,
- mit CAS Kurvenscharen und Regressionsfunktionen darstellen,
- aus Funktionsgleichungen für Kurvenscharen unter vorgegebener Bedingung den konkreten Parameter ermitteln.

### **Exemplarisches**

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

- Bei einer Regressionsanalyse wird bei gegebener „Punktwolke“ eine Regressionsfunktion mit CAS erzeugt, evtl. unter Nutzung den Schülern bekannter Zusammenhänge aus anderen Fächern (z. B. Auswertung gewonnener Daten aus Experimenten des naturwissenschaftlichen Unterrichts Ph/Geo/Bio/Ch und der Technik),
- Die Bestimmung einer Ortskurve der Extrem- bzw. Wendepunkte einer Kurvenschar ist ohne umfassende Untersuchung der Kurvenschar möglich.
- Das Newton-Verfahren ist ein Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung und gewährt Einblick in Verfahren der numerischen Mathematik und in Arbeitsweisen von Rechenprogrammen.

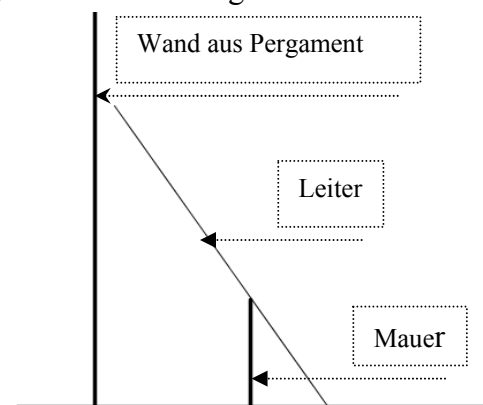
## Aufgaben

### Sicheres Wissen und Können

1. Der Stützbogen einer Brücke hat die Form einer Parabel. Seine höchste Stelle liegt 40 m über der Bezugslinie. Er hat eine Spannweite von 120 m.  
Zeichnen Sie drei gleiche Koordinatensysteme. Skizzieren Sie den beschriebenen Stützbogen in drei unterschiedlichen Lagen in die Koordinatensysteme.  
Stellen Sie jeweils eine Funktionsgleichung für den Parabelbogen auf.
2. Es ist ein Rechteck gesucht, das einen Flächeninhalt von  $24 \text{ cm}^2$  und einen möglichst kleinen Umfang hat. Stellen Sie sich verschiedene Rechtecke mit dieser Bedingung vor und skizzieren Sie alle Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen (in Zentimetern).  
Ermitteln Sie unter diesen das Rechteck mit dem kleinsten Umfang.
3. Es ist ein Rechteck gesucht, das einen Umfang von 24 cm und einen möglichst großen Flächeninhalt hat. Veranschaulichen Sie sich das Problem mithilfe eines Bindfadens und skizzieren Sie alle Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen (in Zentimetern).  
Ermitteln Sie unter diesen das Rechteck mit dem größten Flächeninhalt.
4. Ein Punkt  $Q(a | f(a))$  wandert im 1. Quadranten auf dem Graphen der Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$ . Die Tangente an den Graphen im Punkt Q und die zugehörige Normale schließen mit der x-Achse ein Dreieck ein.  
Fertigen Sie Skizzen für mindestens 3 verschiedene Punkte Q an. Beschreiben Sie die Veränderung der Flächeninhalte der Dreiecke.
5. Bestimmen Sie für folgende Aufgabenstellungen jeweils die veränderliche Zielgröße und die konstante Nebenbedingung.
  - a) Für einen Abwasserkanal, der die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis hat und einen Querschnitt von  $2,5 \text{ m}^2$  hat, soll möglichst wenig Material verbraucht werden.
  - b) Von allen Dosen mit einem Volumen von 850 ml wird diejenige mit dem geringsten Materialverbrauch gesucht.
  - c) Unter einem gleichschenkligen Spitzdach mit einer Neigung von  $45^\circ$  und einer Höhe von 4,10 m soll ein möglichst großer Raum mit geraden Wänden abgetrennt werden.
6. Geben Sie Merkmale von linearen bzw. einer quadratischen Funktionen an, die durch einen Parameter erfasst werden können.
7. Welche der Variablen in den folgenden Gleichungen sind als Parameter im Sinne der üblichen Konventionen für Bezeichnungen in der Mathematik aufzufassen?
  - a)  $mx + n = 0$
  - b)  $x^2 + 2px + q = 0$
  - c)  $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$
  - d)  $y = a^{\lambda x}$
8. Geben Sie eine Funktionsgleichung mit einem (2; 3; 4) Parameter(n) an.

### Reaktivierbares Wissen und Können

9. Zylindrische Konservendosen mit einem Inhalt von 550 ml haben unterschiedliche Formen. Eine Würstchendose hat eine Höhe von 14 cm, eine runde Fischdose hingegen nur 3 cm. Bei einer Ananasdose wurde ein Durchmesser von 10 cm, bei einer Spargeldose einer von nur 3 cm gemessen. Skizzieren Sie die Dosen und ermitteln Sie die Maße einer Dose, die bei einem Volumen von 550 ml den geringsten Materialverbrauch hat.
10. (L) Der Schanzentisch einer Skisprunganlage ist parabelförmig gebogen und verläuft durch die Punkte  $(0/0)$ ;  $(1/0,1)$  und  $(6/3,6)$ . Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion, die den Schanzentisch beschreibt. Wie ist die gerade Anlaufspur nach oben weiter zu bauen, damit es an der Anschlussstelle keinen Knick gibt? Begründen Sie Ihre Vorgehensweise.
11. (L) Durch ihre kartesischen Koordinaten sind die Orte A, B, C, D und E gegeben:  $A(0|0)$ ,  $B(2|-1)$ ,  $C(5|2)$ ,  $D(8|5)$ ,  $E(10|4)$  (Einheit 1 km). Die Orte A und B sowie D und E sind geradlinig miteinander verbunden. Der Verkehrsweg von B über C nach D befindet sich in der Planungsphase. Neben den Kosten müssen verkehrstechnische Überlegungen berücksichtigt werden. Insbesondere dürfen in den Anschlusspunkten B und D keine Lücken oder Knicke auftreten. Geben Sie für die Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{DE}$  je eine Funktionsgleichung und den zugehörigen Definitionsbereich an. Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion  $g$  sowie deren Definitionsbereich für die kürzeste Verbindung  $V_1$  von B nach D. Prüfen Sie, ob C auf diesem Verbindungsweg liegt. Begründen Sie, dass  $V_1$  verkehrstechnisch abzulehnen ist. Berechnen Sie eine Polynomfunktion  $h$  maximal 6. Grades für die knickfreie Verbindung  $V_2$  von B über C nach D, so dass in den Randpunkten B und D die zweite Ableitung von  $h$  den Wert null annimmt. Ermitteln Sie den prozentualen Mehraufwand der Materialkosten beim Bau von  $V_2$  gegenüber  $V_1$ , wenn die Kosten proportional zur Länge des Verkehrsweges sind.
12. (L) Ein Bühnenbild besteht aus einer 1,60 m hohen Mauer, an der eine 5 m lange Leiter lehnt, die am Boden befestigt ist und in einer Schiene läuft. Hinter der Mauer befindet sich eine Landschaft, die auf Pergamentpapier gezeichnet wurde. Die Mauer ist 2 m von der Wand aus Pergamentpapier entfernt. Was passiert, wenn die Leiter sich in der Schiene am Boden bewegt? Kann die Leiter die Wand aus Pergamentpapier zerstören?



13. (L) Eine Gemeinde hat einen Überschuss erwirtschaftet und möchte eine Sportanlage bauen. Der Laufverein wünscht sich eine 400 m Laufbahn (Innenabmessung). Im Innern der Laufbahn soll ein Spielfeld zur vielfältigen Nutzung rechteckig angelegt werden. Die Laufbahn soll 5 m breit sein, parallel zur Länge des Spielfeldes verlaufen und halbkreisförmig um dessen Breite führen. Das Gelände lässt aber nur eine Breite der Sportanlage von höchstens 60 m zu. Wie ist die Sportanlage anzulegen, wenn das Spielfeld einen möglichst großen Flächeninhalt haben soll? Wie groß ist dann die Fläche, die zu Verfügung steht?

## Exemplarisches

## Das Newton-Verfahren

Da die Schüler mit dem CAS-Rechner problemlos Gleichungen lösen und somit Nullstellen berechnen können, sollte das Newton-Verfahren lediglich exemplarisch als eine weitere Anwendung der Differenzialrechnung demonstriert werden. Die wäre etwa auch in Form eines Schülervortrages möglich.

Eine Möglichkeit, das Newton-Verfahren zuerst graphisch zu veranschaulichen, um dann der Herleitung der Formel stärkere Beachtung gegenüber der eigentlichen Ausführung der Rechenschritte zu schenken, ist unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de). (Zusätzliche Aufgaben zum Exemplarischen Lernen in Klasse 11) vorgestellt.

14. (L) Bei 12 Schülern bestimmte man ihre Größe und ihre Masse.

Größe in cm	170	163	172	160	166	170	174	165	162	167	165	168
Masse in kg	67,5	65	80	57,5	68	74	79	70	56	62,5	59,5	66

- Stellen Sie den Zusammenhang beider Größen in einem Diagramm dar. Bestimmen Sie die Regressionsgerade.
- Welche Masse wird man für einen Schüler schätzen (voraussagen), wenn man nur seine Größe von 160 cm kennt?

15. (L) Folgende Messwerte ergaben sich bei der Messung der Periodendauer eines Fadenpendels: l...Länge des Pendels T... Periodendauer der Schwingung

l in m	T in s
0.2	0.9
0.3	1
0.4	1.3
0.5	1.4
0.6	1.5
0.7	1.7
0.8	1.8
0.9	1.9
1	2

Stellen Sie die Daten als Punktwolke dar! Führen Sie eine Potenzregression aus und vermuten Sie daraus einen allgemeinen Zusammenhang der Größen!

16. Bei einem sportlichen Wettkampf haben die Teilnehmer an verschiedenen Punkten mit unterschiedlichen Abständen einer geraden Strecke verschiedene Aufgaben zu erfüllen. Die Ergebnisse werden dann von einem Helfer zur Jury gebracht. Wo ist der günstigste Standort für die Jury?

Zusatz: Wie sieht die Lösung der Aufgabe aus, wenn die Läuferstrecke nicht geradlinig ist sondern als Steckenzug gestaltet wird?

17. (L) Gegeben sei eine Funktionenschar mit  $f_k(x) = \frac{-1}{4k}x^3 + \frac{3}{4}k \cdot x$ ,  $k \neq 0$

Zunächst soll  $k > 0$  betrachtet werden.

Zeichnen Sie die Funktionen  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$  und  $f_4(x)$  in einem geeigneten Intervall mit Ihrem CAS und beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen!

(1) Berechnen Sie die Nullstellen von  $f_k(x)$  und beschreiben Sie den Einfluss des Parameters  $k$  auf deren Lage.

- (2) Berechnen Sie die Hochpunkte von  $f_k(x)$  und beschreiben Sie den Einfluss des Parameters  $k$  auf deren Lage.
- (3) Zeichnen Sie die Ortskurve der Hochpunkte in Ihre Darstellung mit ein.

Es soll jetzt  $k < 0$  betrachtet werden.

- (1) Zeichnen Sie die Funktionen  $f_{-1}(x)$ ,  $f_{-2}(x)$ ,  $f_{-3}(x)$  und  $f_{-4}(x)$  in einem geeigneten Intervall mit Ihrem CAS und beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen!
- (2) Berechnen Sie die Nullstellen von  $f_k(x)$  und beschreiben Sie den Einfluss des Parameters  $k$  auf deren Lage.
- (3) Berechnen Sie die Hochpunkte von  $f_k(x)$  und beschreiben Sie den Einfluss des Parameters  $k$  auf deren Lage.
- (4) Zeichnen Sie die Ortskurve der Hochpunkte in Ihre Darstellung mit ein.

Zeichnen Sie in ein neues Koordinatensystem  $f_2(x)$  und  $f_2(x)$ . Vergleichen Sie!

**18. (L)** Finden von Funktionen mit besonderen Eigenschaften - ein Weihnachtsspaß:

Der Weihnachtsmann ist außer sich. Rudi, das rotnasige Rentier, hat vom Weihnachtspunsch genascht und ist danach einfach ausgerissen. Er faselte etwas von „Nur der Himmel ist frei“ und „Endlich Urlaub!“, dann flog er davon. Kaum war die Wirkung des Punsch verfliegen, kam er auch schon reumütig zurück. Nur leider hatte er völlig vergessen, wo er überall war. War er gar auf der Erde aufgekommen? Er erinnerte sich nur an Bruchstücke seiner Flugbahn. Er weiß noch, dass sein Höhenmesser auf der  $y$ -Achse 5 Längeneinheiten anzeigte, als er den Koordinatenursprung überflog. Außerdem erinnerte er sich daran, dass seine Bahn an der Stelle  $x = 2$  gerade eine Steigung von 16 hatte.

Es fiel ihm noch ein, dass er an der Stelle  $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$  von Linkskurve auf Rechtskurve wechselte.

Der Weihnachtsmann war ratlos. „Daraus kann ich beim besten Willen deine Flugbahn nicht errechnen.“ Da meldete sich einer der Weihnachtsengel zu Wort. „Ich habe beobachtet, dass seine Flugbahn einer ganzrationalen Funktion 4. Grades gleich- so schön symmetrisch zur  $y$ -Achse!“

„Dann ist alles klar“ meinte der Weihnachtsmann erleichtert. „Wir können der Presse sagen, dass Rudi nur einen Buchstaben zur Erinnerung an unser großes Fest in den Himmel schreiben wollte - in meinem Auftrag natürlich“

Finden Sie möglichst viele Fragen zum Text und beantworten Sie diese.

## 2.8 Integralrechnung

### Vorhandenes Wissen

*Aus dem Mathematikunterricht:*

*Sekundarstufe I:*

- Flächenberechnungen (Dreiecke, Vierecke, zusammengesetzte Flächen)
- Volumenberechnung Prisma, Kegel, Pyramide und Kugel mit Formeln
- Zerlegen und Zusammensetzen von Flächen und Körpern
- Zylinder, Kegel und Kugel als Rotationskörper

*Sekundarstufe II:*

- Grenzwertbegriff
- Umgang mit dem Summenzeichen
- Intervallbegriff und Intervallgrenzen
- Ermitteln der Ableitungsfunktion
- Finden von Funktionsgleichungen bzw. -graphen zu gegebenen Gleichungen bzw. Graphen von Ableitungsfunktionen

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- ein (bestimmtes)<sup>2</sup> Integral (im Riemannschen Sinne) in der Mathematik als gemeinsamer Grenzwert zweier Folgen von Summen von Teilprodukten (Ober- und Untersummen) erklärt wird,
- das Integral der Funktion in dem Intervall geometrisch als Inhalt der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse aufgefasst werden kann, wenn der Graph einer Funktion in einem Intervall oberhalb der x-Achse liegt,
- das Integral der Funktion  $f$  den aufsummierten Gesamtbestand der Größe  $G$  in dem Integrationsintervall angibt, wenn eine Funktion  $f$  das Änderungsverhalten einer Größe  $G$  in Bezug auf die auf der x-Achse dargestellte Größe in Anwendungssituationen beschreibt. Die Art der Größe  $G$  kann durch Multiplikation der beiden auf der y- und x-Achse dargestellten Größen ermittelt werden.
- das Bestimmen einer Stammfunktion eine Umkehrung des Differenzierens ist.

---

<sup>2</sup> Die Unterscheidung von bestimmten und unbestimmten Integralen ist aus fachlicher, linguistischer und didaktischer Sicht problematisch. Das so genannte „bestimmte“ Integral ist das eigentliche Integral im Riemannschen Sinne. Ein „unbestimmtes“ Integral ist kein Integral, sondern nur eine Bezeichnung für eine Klasse von Stammfunktionen. Das Wort Integral und das Integralzeichen haben somit zwei unterschiedliche Bedeutungen. Es ist in den meisten Schul- und Fachbüchern üblich, auf diese Doppelbedeutung zu verzichten, was ohne Probleme möglich ist. Allerdings wird die Integration ohne Grenzen in einigen CAS zugelassen, so auch im CAS auf den CAS-Rechnern von TI. Die Schüler sollten deshalb über diese Schreibweise und Methode zur Bestimmung von Stammfunktionen informiert werden.

Die Schülerinnen und Schüler können

- Stammfunktionen für einfache Potenzfunktionen bestimmen,
- die Schreibweise für das bestimmte Integral benutzen,
- den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung auf einfache inner- und außermathematische Aufgabenstellungen anwenden,
- einfache Integrationsregeln (Summen-, Faktor- und Potenzregel) anwenden,
- Rotationskörper um die x-Achse realisieren und identifizieren.

### **Reaktivierbares Wissen und Können**

Die Schülerinnen und Schüler kennen

- die Zusammenhänge zwischen Ableitung, Ableitungsfunktion, Integral, Integralfunktion und Stammfunktion,
- ein Verfahren zur Berechnung von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraphen,
- ein Verfahren zur Berechnung des Volumens von Rotationskörpern.

Die Schülerinnen und Schüler können:

- in Sachzusammenhängen und innermathematisch positive und negative Werte von bestimmten Integralen deuten,
- Flächenberechnungen zwischen Graphen in Intervallen vornehmen, insbesondere auch Berechnungen von zusammengesetzten Flächen,
- Anwendungsaufgaben lösen, die die geometrische Bedeutung des Integrals und seine Bedeutung als aufsummierten Bestand einer Größe betreffen,
- bei Rotation um die x-Achse zu einem Rotationskörper den erzeugenden Funktionsgraphen angeben und umgekehrt,
- das Volumen von Rotationskörpern, die bei der Rotation um die x-Achse entstehen, berechnen.

### **Exemplarisches**

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

- Die Berechnung des bestimmten Integrals kann als Grenzwert von Ober- und Untersummen hergeleitet werden.
- Es gibt komplexe Anwendung der Integralrechnung in der Praxis.
- Die Berechnung der Bogenlänge oder der Mantelfläche ist eine Anwendung der Integralrechnung.



## Aufgaben

### Sicheres Wissen und Können

1. Ermitteln Sie Schranken für den Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion  $f(x) = 4 - x^2$  mit der x-Achse einschließt, indem Sie Ober- und Untersummen für eine Unterteilung des Integrationsintervalls in 2 bzw. 4 gleichgroße Intervalle berechnen.

2. Berechnen Sie folgende Integrale durch geometrische Überlegungen.

a)  $\int_0^3 x \, dx =$

b)  $\int_{-2}^3 x \, dx =$

c)  $\int_2^5 x \, dx =$

3. Berechnen Sie folgende Integrale und deuten Sie den Wert geometrisch.

a)  $\int_0^3 x \, dx =$

b)  $\int_0^2 (x+3) \, dx =$

c)  $\int_0^2 (-x+3) \, dx =$

d)  $\int_0^5 (x-3) \, dx =$

4. Berechnen Sie folgende Integrale und entscheiden Sie, für welche Flächen die Integrale als Flächenmaßzahl interpretiert werden können.

a)  $\int_{-1}^0 (x^2 + 1,5x) \, dx =$

b)  $\int_{-2}^2 \left( \frac{1}{48} (x^4 - 24x^2 + 80) \right) \, dx =$

c)  $\int_0^3 (2x-3) \, dx =$

d)  $\int_{-5}^{-1} (x+3)^2 \, dx =$

e)  $\int_{-1}^1 (x+1)^2 (x-1) \, dx =$

f)  $\int_0^{2,5} (-2x^2 + 5x) \, dx =$

5. Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion und beschriften Sie Flächen zwischen dem Graphen und der x-Achse, so dass für die Inhalte  $A_1$ ,  $A_2$  bzw.  $A_3$  der entstehenden Flächen folgende Beziehung gilt.

a)  $\int_a^b f(x) \, dx = A_1 - A_2$

b)  $\int_a^b f(x) \, dx = -A_1 + A_2 - A_3 = -A_1$

6. Bestätigen Sie durch Integration geeigneter Funktionen folgende Flächeninhaltsformeln.

a) Rechteck:  $A = a \cdot b$     b) Dreieck:  $A = \frac{1}{2} g \cdot h_g$     c) Trapez:  $A = \frac{1}{2} (a + c) \cdot h$

7. Es sei  $f'(x) = 0,5x^3 - 2x^2$ . Bestimmen Sie  $f(x)$ .

8. Geben Sie drei verschiedene Stammfunktionen zur Funktion  $f(x) = 5x^3 - 2x + 3$  an.

9. Es sei  $f'(x)$  eine im Intervall  $[a; b]$  integrierbare Funktion. Berechnen Sie für  $x \in [a; b]$

das Integral  $\int_a^x f'(t) \, dt$ .

10. Bestimmen Sie die Stammfunktion von  $f(x) = 0,5 \cdot x$ , deren Graph durch  $P(-2 / 4)$  verläuft.

11. Die Stammfunktionen zu  $f(x)$  seien die Funktionen  $F(x) + c$  und zu  $g(x)$  die Funktionen  $G(x) + d$  mit  $c, d \in \mathbb{R}$ . Geben Sie die Stammfunktionen zur Funktion  $h(x) = f(x) + g(x)$  an.

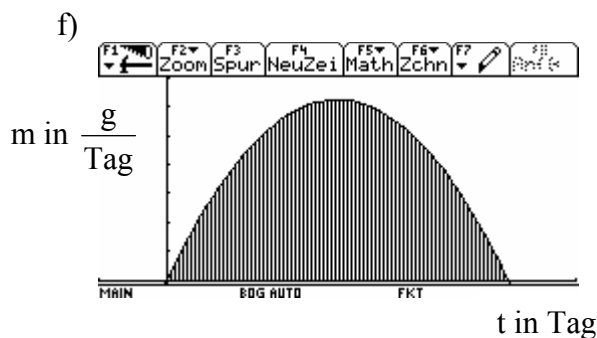
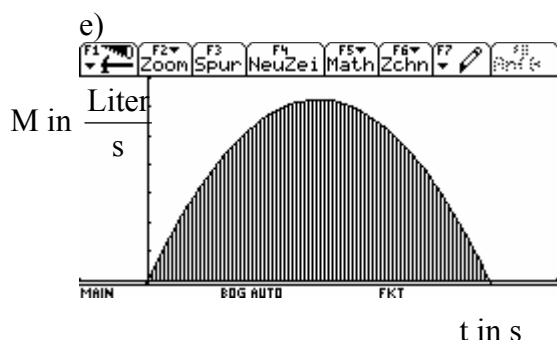
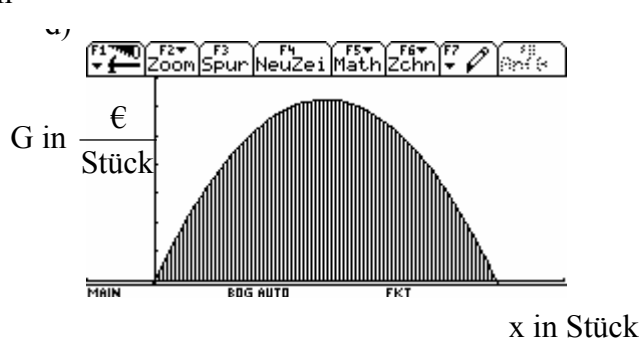
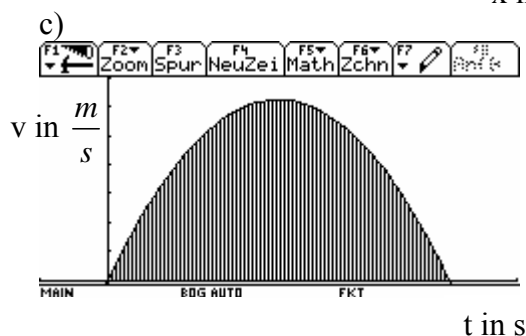
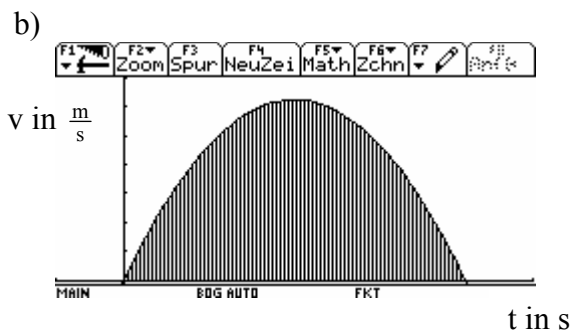
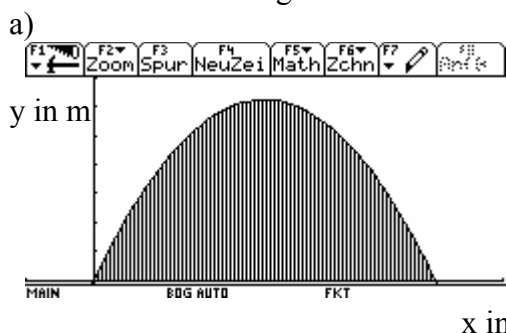
12. Bestimmen Sie zu folgenden Funktionen jeweils alle Stammfunktionen.

a)  $f(x) = m \cdot x + n$

b)  $f(m) = m \cdot x + n$

c)  $f(n) = m \cdot x + n$

13. Geben Sie einen Sachverhalt an, der zu dem dargestellten Diagramm passt und erläutern Sie die Bedeutung der markierten Flächeninhalte.



14. In einem Diagramm ist der folgende Zusammenhang zwischen zwei Größen dargestellt. Geben Sie an, welche Bedeutung der Flächeninhalt zwischen der Kurve und der x-Achse in dem angegebenen Intervall hat.

y-Achse	Veränderung des Gewichtes eines Säuglings	Fördermenge einer Pumpe in $\frac{m^3}{h}$	Downloadrate in KByte/s	Querschnitt eines Gefäßes in $cm^2$
x-Achse	Lebensmonate	Zeit in h	Zeit in s	Höhe d. Gefäßes in cm
Intervall	2. bis 6. Monat	1. bis 3. Stunde	20 Sekunden	0 bis 10 cm

15. Beschreiben Sie verschiedene Möglichkeiten, durch Rotation von Flächen bzw. Funktionsgraphen Körper entstehen zu lassen, die aus zusammengesetzten Kegeln bestehen.
16. Skizzieren Sie eine räumliche Darstellung der Körper, die bei Rotation der Flächen um die x-Achse entstehen.

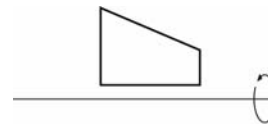
a)



b)



c)



### Reaktivierbares Wissen und Können

17. Die Funktion  $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$  wird als Integralfunktion bezeichnet. Es sei  $f(x) = 2x - 4$ .

- a) Berechnen Sie die Integralfunktion  $I_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ .
- b) Stellen Sie die Funktion  $f(x)$  und die Integralfunktionen  $I_a(x)$  für  $a = -1; 0; 2; 4$  in je einem Koordinatensystem dar.
- c) Berechnen Sie folgende Integrale geometrisch sowie mithilfe der entsprechenden Integralfunktion:

$$(1) \int_{-1}^3 f(x)dx$$

$$(2) \int_0^3 f(x)dx$$

$$(3) \int_2^4 f(x)dx$$

$$(4) \int_4^5 f(x)dx$$

18. Es sei  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x$ .

- a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von  $f$ .
- b) Berechnen Sie das Integral  $\int_{-1}^2 (x^3 - 3x^2 - 3x)dx$ .
- c) Bestimmen Sie die Flächenmaßzahl derjenigen Fläche, die vom Graphen der Funktion  $f$  mit der x-Achse im Intervall  $[-1; 2]$  eingeschlossen wird.
- d) Vergleichen Sie die Ergebnisse der Aufgabenstellungen a) bis c) miteinander.

19. Stellen Sie Beziehungen zwischen den folgenden Begriffen der Differenzial- und Integralrechnung in einer Übersicht dar.

Ableitung einer Funktion an einer Stelle, positiver bzw. negativer Wert der Ableitung an einer Stelle, Ableitungsfunktion, Tangente, Änderungsverhalten einer Größe, Integral einer Funktion in einem Intervall, positiver bzw. negativer Wert des Integrals, Integralfunktion, Flächeninhalt, Bestand einer Größe.

20. (L) Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes der Fläche, die von der Funktion  $f(x)$  und der x-Achse vollständig eingeschlossen ist. Zeichnen Sie diese Flächen mit Ihrem CAS - Rechner. Bestimmen Sie die Flächeninhalte, wenn die Achseneinteilung kartesisch in Metern (Millimetern, Zentimetern) erfolgt.

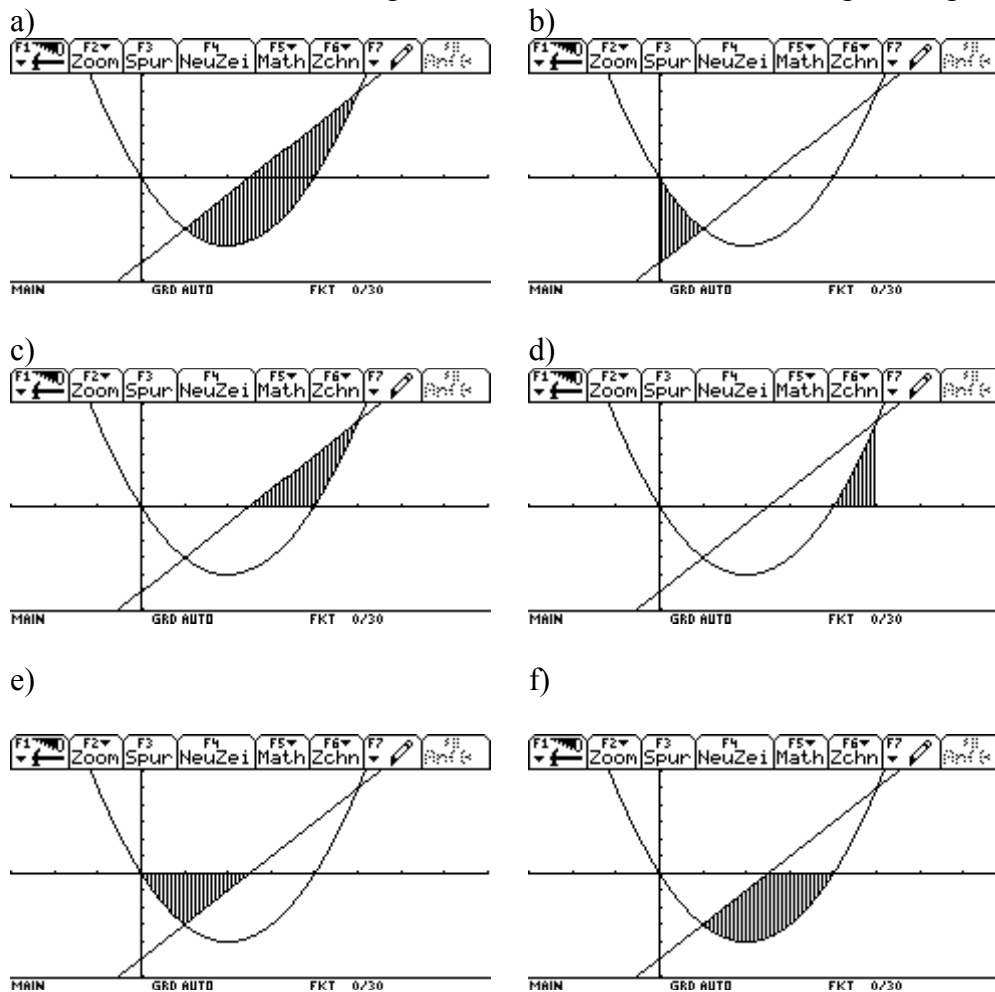
a)  $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 3$       b)  $f(x) = x^2 - 4$       c)  $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$

21. Zeigen Sie, dass für alle  $x \in \mathbb{R}; x > -1$  die Funktionen  $F$  und  $G$  Stammfunktionen der gleichen Funktion sind, indem Sie die Eigenschaften von Stammfunktionen verwenden.

$$F(x) = \sqrt{x+1} \quad G(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}$$

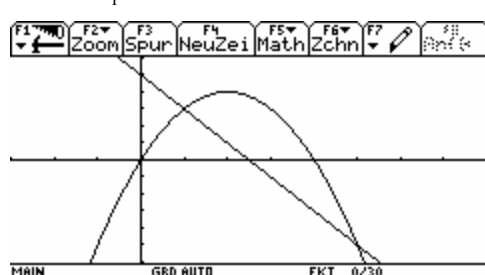
22. Im Folgenden sind die Funktionsgraphen der Funktionen  $f(x) = x^2 - 4x$  und  $g(x) = 2x - 5$  dargestellt. Die Nullstellen von  $f(x)$  sind  $x_{01} = 0$  und  $x_{02} = 4$ , die von  $g(x)$  ist  $x_0 = 2,5$ . Die Funktionen schneiden einander an den Stellen  $x_{S1} = 1$  und  $x_{S2} = 5$ .

Geben Sie die zur Berechnung der schraffierten Fläche notwendigen Integrale an.

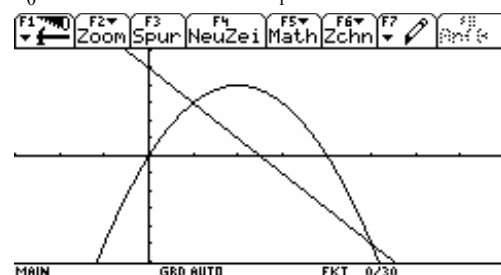


23. In den Abbildungen sind die Graphen der Funktionen  $f(x) = 4x - x^2$  und  $g(x) = 5 - 2x$  dargestellt. Schraffieren Sie die Flächen, die mit den Integralen berechnet werden. Die Nullstellen und Schnittpunkte entsprechen denen der vorherigen Aufgabe.

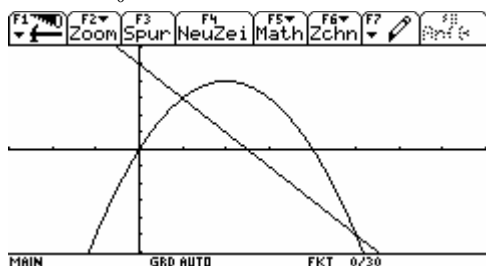
a)  $A_1 = \int_1^5 (f(x) - g(x)) dx$



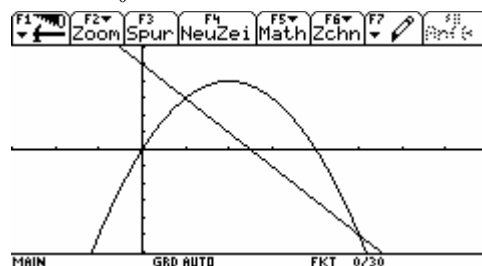
b)  $A_2 = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx + \int_1^{2,5} (f(x) - g(x)) dx$



$$c) A_3 = \int_0^4 f(x) dx$$



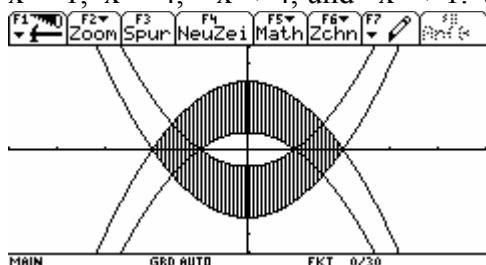
$$d) A_4 = \int_0^{2.5} g(x) dx$$



Hinweis zur Darstellung der Schraffur mit dem Voyage 200:

Analog der Aufteilung der Flächenstücke in Teilflächen erfolgt die Schraffierung schrittweise. Da zwischen Funktionsgraph und x-Achse die Schraffierung nur oberhalb der x-Achse möglich ist, kann für Flächen unterhalb der x-Achse die Funktion  $y = 0$  eingefügt werden.

24. Das gekennzeichnete Flächenstück wird begrenzt durch Parabeln mit den Gleichungen  $x^2 - 1$ ,  $x^2 - 4$ ,  $-x^2 + 4$ , und  $-x^2 + 1$ . Wie groß ist der Flächeninhalt?



25. Eine Fläche ist umschlossen von

- den Geraden mit den Gleichungen  $x = 0,5$  bzw.  $x = 4$ ,
- dem Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{2}{x^2}$ ,
- dem Graphen der Funktion  $g$  mit  $g(x) = 0,5x$ ,
- dem Graphen der Funktion  $h$  mit  $h(x) = \frac{x^3 + 4}{2x^2}$ .

Erläutern Sie die Berechnung des Inhalts dieses Flächenstückes.

26. Gegeben wird die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{2}{x^2}$ . Die Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt

$P(1 / f(1))$ , die Gerade  $x = -2$  und die x-Achse umschließen ein Flächenstück, dessen Inhalt zu berechnen ist.

27. Gegeben sei die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{8}{x^2} + 2$ . Der Graph von  $f$ , die x-Achse und die

Geraden  $x = 1$  und  $x = 4$  schließen ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie eine Gerade, die diese Fläche halbiert. Geben Sie ihre Gleichung an.

28. Es wird die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = \frac{4x^2 - 4}{x^2}$  gegeben. Die waagerechte

Asymptote des Graphen von  $f$ , die Geraden  $x = 1$ ,  $x = 2$  und die x-Achse umschließen ein Rechteck. Die Kurve von  $f$  zerlegt dieses Rechteck in zwei Teilflächen. Berechnen Sie jeweils den Inhalt dieser Teilflächen.

29. Der Graph der Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 9x$  zerlegt das Quadrat mit den Eckpunkten  $A(0 | 0)$ ,  $B(4 | 0)$ ,  $C(4 | 4)$  und  $D(0 | 4)$  in vier Teilflächen. Berechnen Sie den Flächeninhalt der einzelnen Teilflächen.

**30.** Gegeben wird die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = \frac{x^3 - 8}{4x^2}$ . Lösen Sie folgende

Flächenprobleme.

- Der Graph von  $f$ , die  $x$ -Achse und die Gerade  $x = 3$  begrenzen eine Fläche. Berechnen Sie den Flächeninhalt.
- Die Geraden  $x = 2$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$  und  $y = 1$  umschließen ein Flächenstück. In welchem Verhältnis teilt der Graph der Funktion  $f$  die Fläche dieses Rechtecks?
- Es sei  $z > 2$ . Dann begrenzen die Geraden  $x = 2$ ,  $x = z$ ,  $y = 0,25x$  und der Graph von  $f$  ein Flächenstück. Berechnen Sie  $z$  so, dass der Inhalt dieser Fläche 0,8 FE beträgt.

**31. (L)** Die Gravitationsfeldstärke beträgt auf der Erde am Äquator etwa  $G = 9,801 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$ .

An den Polen beträgt  $G = 9,83 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$ . Vergrößert sich der Abstand zum Erdmittelpunkt,

so wird die Gravitationsfeldstärke kleiner. Es gilt:  $G(x) = \frac{3,987 \cdot 10^{14}}{x^2}$ . Dabei ist  $x$  der

Abstand zum Erdmittelpunkt in Metern.

Um die Kraft berechnen zu können, die gebraucht wird, um z.B. eine Rakete von der Erde „wegzuschießen“, wird die Funktion  $F(x) = G(x) \cdot m$  verwendet. Die Größe  $m$  ist die Masse des Körpers in kg, der transportiert wird. Im Folgenden soll  $m = 100$  (kg) sein. Der Zahlenwert der Fläche zwischen den Geraden  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ , dem Graphen von  $F(x)$  und der  $x$ -Achse beschreibt die Arbeit, die verrichtet werden muss, um einen Körper von einem Abstand  $x_1$  zu einem Abstand  $x_2$  zum Erdmittelpunkt zu heben. Der Erdradius beträgt  $R = 6,37 \cdot 10^6$  (m).

- Zeichnen Sie die Funktion  $F(x)$  und kennzeichnen Sie die Arbeit, die verrichtet werden muss, um den Körper von  $x_1 = R$  zu  $x_2 = 2 \cdot R$  zu bringen.
- Berechnen Sie die Arbeit, die verrichtet werden muss, um den Körper von  $x_1 = R$  zu  $x_2 = 2 \cdot R$  zu bringen und die Arbeit, die verrichtet werden muss, um den Körper von  $x_3 = 4 \cdot R$  zu  $x_4 = 5 \cdot R$  zu bringen.
- Vergleichen Sie beide Werte und finden Sie Gründe für den Unterschied.
- Berechnen Sie die Arbeit, die der Körper verrichtet, wenn er von  $x_4 = 5 \cdot R$  zu  $x_3 = 4 \cdot R$  „fällt“. Deuten Sie das Vorzeichen der berechneten Arbeit.

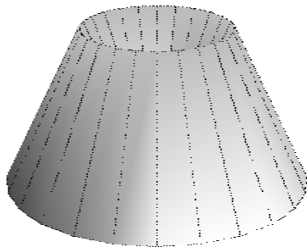
**32.** Eine Schale hat als Begrenzungen zwei Rotationskörper, die durch Drehung der Graphen von  $f$  und  $g$  um die  $x$ -Achse zwischen  $x = 0$  und  $x = 5$  entstehen. Die Funktionen  $f$  und  $g$  haben die Gleichung  $f(x) = \sqrt{5x}$  und  $g(x) = \sqrt{5x - 10}$ . Berechnen Sie das Volumen der Schale.

**33.** Der Graph der Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = 0,5x\sqrt{4 - x^2}$  umschließt zusammen mit der  $x$ -Achse ein Flächenstück vollständig, das um die  $x$ -Achse rotiert.

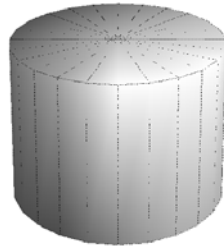
- Berechnen Sie das Volumen des entstandenen Drehkörpers.
- Der betrachtete Rotationskörper soll aus einem möglichst kleinen Zylinder mit gleicher Achse hergestellt werden. Wie viel Prozent Abfall entsteht dabei?

34. Die dargestellten Körper (nicht maßstabsgerecht) haben alle die Höhe 4 Einheiten, der Grundkreisradius bei a) bis c) beträgt 4 Einheiten, bei d) bis f) 3 Einheiten.

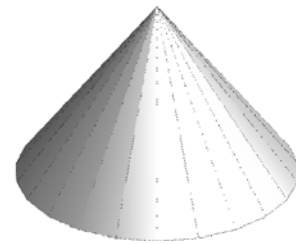
a)



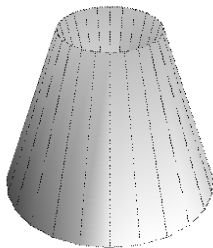
b)



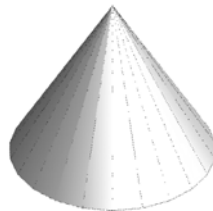
c)



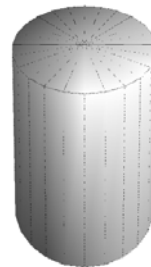
d)



e)

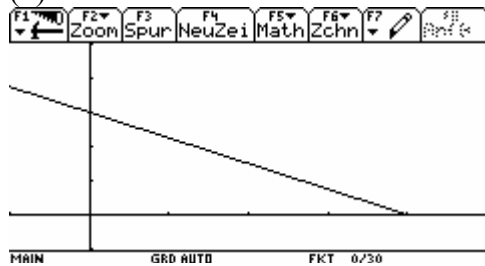


f)

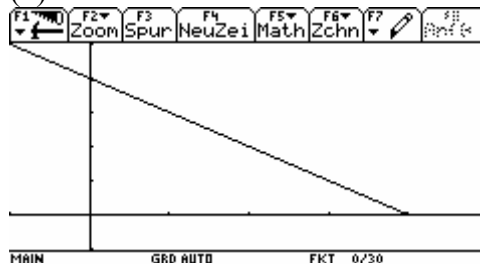


Die Körper entstehen bei Rotation der dargestellten Funktionsgraphen (1) bis (6) für nichtnegative Argumente um die x-Achse.

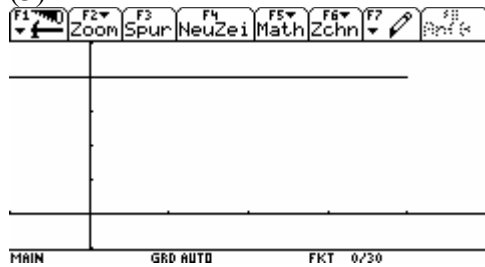
(1)



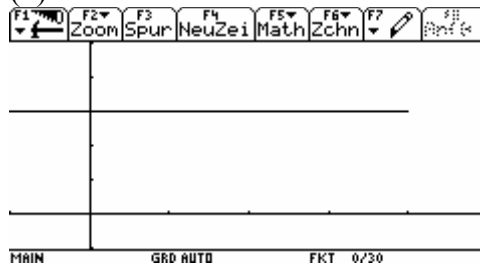
(2)



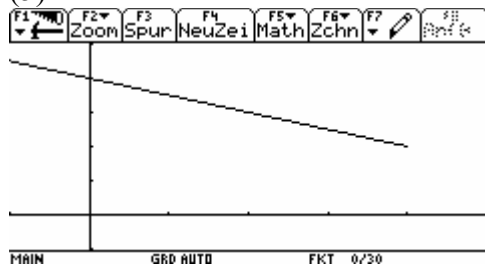
(3)



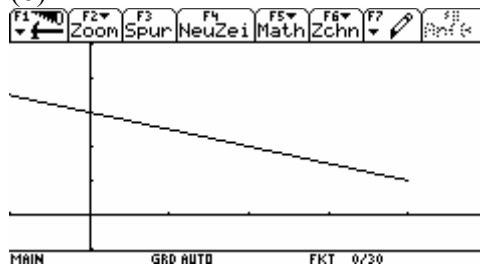
(4)



(5)



(6)



- Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen für die dargestellten Funktionen.
- Ordnen Sie die Rotationskörper den erzeugenden Funktionsgraphen zu.

35. Es ist das Volumen des Rotationskörpers zu berechnen, der durch Rotation des Graphen von  $f$  in den Grenzen von  $a$  bis  $b$  um die  $x$ -Achse entsteht.

a)  $f(x) = 3x - x^2$ ;  $a, b$  sind die Nullstellen von  $f$

b)  $f(x) = \sqrt{4-x}$ ;  $a = 0$  und  $b = 2$

c)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ;  $a = 1$  und  $b = 4$

36. Es ist das Volumen des Rotationskörpers zu berechnen, der durch Rotation der von den Graphen von  $f$  und  $g$  eingeschlossenen Fläche um die  $x$ -Achse entsteht. Die Funktionsgleichungen sind:  $f(x) = 2\sqrt{x}$  und  $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ .

37. Gegeben wird die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = (0,25x+0,5)e^{2-x}$ . Der Graph von  $f$ , die Koordinatenachsen und die Gerade  $x = 3$  begrenzen in Flächenstück, das um die  $x$ -Achse rotiert.

Berechnen Sie das Volumen des entstandenen Rotationskörpers näherungsweise, wobei Sie den Graphen von  $f$  durch die Kurventangente im Punkt  $P(2 / f(2))$  ersetzen.

### Exemplarisches

Berechnung eines bestimmten Integrals als Grenzwert der Ober- und Untersumme

Ein Beispiel wird unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de). (Zusätzliche Aufgaben zum Exemplarischen Lernen in Klasse 11) vorgestellt.

Berechnung der Bogenlänge

Ein Beispiel wird unter [www.mathe-mv.de](http://www.mathe-mv.de). (Zusätzliche Aufgaben zum Exemplarischen Lernen in Klasse 11) vorgestellt.

38. (L) Toni erlernt das Bogenschießen. Er stellt fest, dass es ein großer Unterschied ist, ob er den Bogen um 10 cm oder um 50 cm spannen will. Die Profis wissen genau, dass die aufzuwendende Kraft  $F$  (in N) quadratisch mit dem Spannen der Bogensehne wächst. Es gilt:

$$F(x) = D \cdot x^2. \quad D \text{ ist } \left( \text{in } \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) \text{ eine Konstante und hängt vom jeweiligen Bogen ab, } x \text{ (in}$$

m) ist das Stück, um das man den Bogen spannen will. (Rechnung ohne Einheiten!)

a) Wie groß ist die Kraft  $F$  (in N), die aufzuwenden ist, um einen Bogen mit  $D = 2000$  um 0,1 m (0,3 m; 0,5 m) zu spannen? ( $F$  durch 10 ist etwa die Masse in kg, die Sie vergleichsweise heben müssten.)

b) Stellen Sie die Kraft  $F$  in Abhängigkeit von dem „Spannstück“  $x$  (in m) für  $0 \leq x \leq 0,55$  graphisch mit Ihrem CAS dar und kennzeichnen Sie in Ihrer Darstellung die Arbeit  $W$  (in Nm), die Toni dann jeweils verrichten muss.

c) Toni bemerkt, dass die Abschussgeschwindigkeit des Pfeils vom Spannen seines Bogens abhängt. Er weiß, dass er Arbeit  $W$  (in Nm) verrichten muss:  $W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$ . Die

Formel für die Abschussgeschwindigkeit  $v$  (in  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) lautet:  $v = \sqrt{\frac{2W}{m}}$ . Die Masse  $m$

seines Pfeils ist 0,05 kg. Berechnen Sie die Abschussgeschwindigkeiten der Pfeile für  $x_1 = 0,1$  m;  $x_2 = 0,3$  m;  $x_3 = 0,5$  m.

Bestimmen Sie eine Formel für  $v(x)$ , wenn  $D = 2000$  und  $m = 0,05$  (kg) ist.

Wie weit muss der Bogen gespannt werden, damit der Pfeil eine Geschwindigkeit von  $v = 60$  ( $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) erreicht?



## 2.9 Die e-Funktion – weiterer Ausbau der Differenzial- und Integralrechnung

### Vorwissen

*Aus dem Mathematikunterricht:*

*Sekundarstufe I:*

- Potenzen und Potenzgesetze
- Eigenschaften der Exponentialfunktionen
- Logarithmusbegriff, ausgewählte Logarithmengesetze
- Logarithmusfunktionen als Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen
- Wachstums- und Zerfallsprozesse
- Wachstumsfaktor, Wachstumsrate
- exponentiale Abnahme, Zerfallsrate

*Sekundarstufe II:*

- Bisheriges Wissen (Folgen und Reihen, Differential- und Integralrechnung)

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass

- die Funktion  $f(x) = e^x$  als e-Funktion bezeichnet wird,
- $e$  eine irrationale Zahl mit  $2 < e < 3$  ist,
- für die e-Funktion gilt:  $f'(x) = f(x)$ ,
- die Stammfunktion der e-Funktion  $F(x) = e^x + c$  ist,
- $f(x) = \ln(x)$  die Umkehrfunktion der e-Funktion ist.

Die Schülerinnen und Schüler können

- einfache Exponential- und Logarithmengleichungen zur Basis  $e$  lösen,
- die Funktion  $f(x) = e^x$  sowie einfache Verkettungen und einfache Produkte mit der e-Funktion ableiten sowie einfache Grenzwertberechnungen mit der e-Funktion durchführen

#### Reaktivierbares Wissen und Können:

Die Schülerinnen und Schüler können

- mit Funktionen, in denen die e-Funktion vorkommt, Kurvenuntersuchung vornehmen und Extremwertaufgaben lösen entsprechend den zum Thema „Kurvenuntersuchungen“ und „Anwendung der Differenzialrechnung“ dargestellten Anforderungen, insbesondere Diskussion von Funktionen der Form  $f_\lambda(x) = e^{\lambda \cdot x}$ ,
- $\int e^{a \cdot x + b} dx$  händisch (ohne CAS) berechnen,

- Aufgaben zu gebrochen rationalen Funktionen lösen, bei denen eine Anwendung vom  $\int \frac{1}{x} dx$  möglich ist,
- Flächen- und Volumenberechnung mit Funktionen vornehmen, in denen die e-Funktion vorkommt entsprechend den Anforderungen zum Thema „Integralrechnung“,
- Anwendungsaufgaben zu Wachstums- und Zerfallsprozessen lösen.

**Exemplarisches**

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

- Es gibt Verfahren zur Bestimmung der Zahl e sowie der Stammfunktion zu  $f(x) = \frac{1}{x}$ .
- Die Logarithmusfunktion  $f(x) = \ln(x)$  wird als Umkehrung der Funktion  $f(x) = e^x$  gewonnen. Der allgemeingültige Zusammenhang zwischen der Ableitung der Umkehrfunktion und der Ableitung der Funktion wird am Beispiel von Logarithmus- und e-Funktion erlebt.
- Auf reale Wachstumsprozesse kann man verschiedene Wachstumsmodelle anwenden.
- Die Berechnung uneigentlicher Integrale ist durch Grenzwertbetrachtungen möglich.
- Einfache partielle Integration kann man händisch unter Nutzung der Regel vornehmen.

## Aufgaben

### Sicheres Wissen und Können

1. Vereinfachen Sie.

a)  $e^{\ln 3}$     b)  $\ln e^{0,3}$     c)  $e^{-2 \ln a}$     d)  $\ln \sqrt[3]{e^5}$     e)  $e^{4 \ln a}$     f)  $e^{-0,5 \ln x}$

2. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen.

a)  $(x+1)e^x = 0$     b)  $e^{2x} - 4e^x = 0$     c)  $\ln(x-1) = 0$     d)  $2 \ln x^2 = 4$

3. Bilden Sie die erste Ableitung folgender Funktionen.

a)  $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$     b)  $f(x) = x^3e^{-x}$

c)  $f(x) = e^{3x}(e^x + x)$     d)  $f(x) = 2e^{3x+1}$

e)  $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

4. Geben Sie die Grenzwerte an.

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$     b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - e^x)$     c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-x}$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 + e^x)$     e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x$     f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4 - e^{x-2})$

### Reaktivierbares Wissen und Können

5. Gegeben ist die Exponentialfunktion  $f(x) = e^{-x}$ . Die Punkte  $P(x_a / f(x_a))$  mit  $x_a > 0$  und der Ursprung sind die gegenüberliegenden Eckpunkte eines Rechtecks, von dem 2 Seiten auf den Koordinatenachsen liegen.

- Bestimmen Sie  $x_a$  so, dass der Flächeninhalt des Rechtecks maximal wird.
- Wie groß ist im Falle a) der Inhalt zwischen der oberen Rechteckseite, dem Graphen von  $f$  und der y-Achse?
- Die Tangente  $t$  in einem Kurvenpunkt  $Q$  im 1. Quadranten und die Koordinatenachsen begrenzen ein Dreieck. Bestimmen Sie die Lage von  $Q$  so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ein Extremum annimmt.

6. (L) Fichten sind in Europa weit verbreitet. Je nach Standort können sie zwischen 30 m und 50 m hoch werden und erreichen einen Durchmesser von bis zu 120 cm. Der Brusthöhendurchmesser  $d$  wird in einer Höhe von 1,3 m gemessen. Unter der Annahme, dass die Fichte nur einen Durchmesser von 1 m erreicht, lässt er sich näherungsweise als Funktion der Zeit in folgender Form darstellen

$$d(t) = \frac{1,2}{1 + e^{-0,05(t-63)}} \quad t \geq 0 \quad t \text{ in Jahren (a); } d \text{ in m.}$$

- Berechnen Sie den Durchmesser der Fichte bei der Pflanzung.
- Stellen Sie die Funktion mit Ihrem CAS dar und fertigen Sie eine Skizze an.
- Wie groß ist der Durchmesser nach 30, 50 bzw. 100 Jahren?
- Berechnen Sie Wendepunkt und bestimmen Sie das Verhalten im Unendlichen von  $d(t)$ .
- Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen von  $d(t)$ !

7. Zeigen Sie: Das Integral  $\int_u^v \frac{1}{x} dx$  ändert seinen Wert nicht, wenn u durch t·u und v durch t·v ersetzt wird, wobei t eine positive reelle Zahl ist. Deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

8. Ermitteln Sie die unbestimmten bzw. bestimmten Integrale ohne ein CAS unter Verwendung der folgenden Integrationsregel:  $\int f(mx+n)dx = \frac{1}{m} F(mx+n) + C$  mit  $F'(x) = f(x)$ . Stellen Sie Ihre Lösung ausführlich dar.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int e^{2x-1} dx & \text{b) } \int e^{3-2x} dx & \text{c) } \int e^{0,5x+4} dx & \text{d) } \int e^{-x} dx \\ \text{e) } \int 2(e^{2x-1} + e^{-x}) dx & \text{f) } \int (3e^{2x}-1)e^{-x} dx & \text{g) } \int_{-4}^1 e^{2x} dx & \text{h) } \int_0^2 e^{1-2x} dx \end{array}$$

9. Bestimmen Sie die Funktion f(x) in folgenden Gleichungen mithilfe der Integrationsregel aus Aufgabe 10.

$$\text{a) } \int f(x)dx = 2e^{3x-23} + e^{-x+1} - e^{1-2x} + c \quad \text{b) } \int f(x)dx = (x+1)e^{2x+1} + c$$

10. Berechnen Sie folgende unbestimmten Integrale.

$$\text{a) } \int \frac{4x-1}{x} dx \quad \text{b) } \int \frac{3x+4}{2x} dx \quad \text{c) } \int (4x^3-3x^2+5x) : (2x^2) dx$$

11. Der Graph der Funktion f mit der Gleichung  $f(x) = (20-10x) : x^2$ , die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung  $x = 1$  begrenzen ein Flächenstück vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

12. Gegeben sind die Funktionen f und p mit den Gleichungen  $f(x) = (x^3 + 3x^2 - 4) : x$  und  $p(x) = x^2 - x + 6$ . Die Graphen der Funktionen f und p und die Koordinatenachsen begrenzen im ersten Quadranten eine Fläche vollständig. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

13. Berechnen Sie folgende bestimmten Integrale.

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{x+6}{2x} dx = \quad \text{b) } \int_1^e (x + \frac{2}{x}) dx = \quad \text{c) } \int_1^e \frac{e}{x} dx =$$

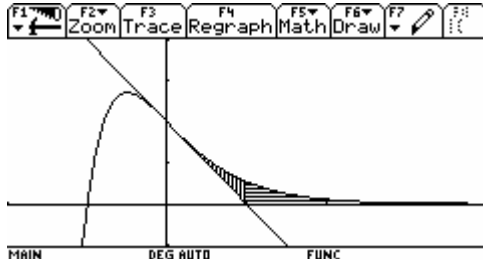
14. Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Zwischen dem Graphen der

Funktion f und der x-Achse werden durch die Geraden mit den Gleichungen  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 3$ ,  $x = 4$  usw. Flächenstreifen der Breite 1 gebildet. Die Inhalte dieser Flächenstreifen bilden eine Folge  $(a_n)$ . Berechnen Sie  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$ . Geben Sie eine Berechnungsvorschrift für  $a_n$  und  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  an.

15. Gegeben wird die Funktion f mit  $f(x) = 2e^{0,25x-1}$ . Der Graph von f, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung  $x = 4$  begrenzen ein Flächenstück vollständig. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche. Das eben betrachtete Flächenstück wird durch die Tangente an den Graph von f im Punkt B(4 | f(4)) in zwei Teilflächen zerlegt. Berechnen Sie die Inhalte der beiden Teilflächen.

16. Gegeben sei die Funktion  $f(x) = 2 \frac{x+1}{e^{2x}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Im 1. Quadranten begrenzen die Wendetangente, die x-Achse, die Gerade  $x = 3$  und der Graph von  $f(x)$  eine Fläche. Berechnen Sie den Flächeninhalt.



- b) Die Fläche, die vom Graphen von  $f(x)$  und den Koordinatenachsen vollständig eingeschlossen wird, rotiert um die x-Achse. Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

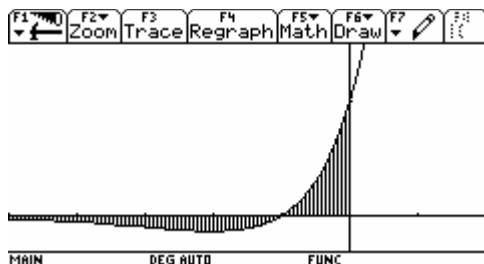
17. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = 5 \cdot x \cdot e^{-0,5x}$ . Das zwischen  $x = 0$  und  $x = z$  liegende Flächenstück rotiert um die x-Achse und erzeugt einen Drehkörper. Berechnen Sie sein Volumen.

18. (L) Gegeben ist die Funktion  $f(x) = e^{\frac{-1}{4}x+2}$ . Ihr Graph sei K.

- Bestimmen Sie die Tangente  $t$  an K im Schnittpunkt von K mit der y-Achse
- Zeichnen Sie K und die Tangente für  $-1 \leq x \leq 10$  mit Ihrem CAS und fertigen Sie eine Skizze an.
- Die Kurve schließt mit den Koordinatenachsen und der Geraden  $x = u$  ( $u > 0$ ) eine Fläche  $A(u)$  ein. Berechnen Sie  $\lim_{u \rightarrow \infty} A(u)$ .
- Zeigen Sie, dass die Tangente  $t$  diese Fläche in zwei inhaltsgleiche Teile zerlegt.
- $P(u | v)$  sei ein Punkt der Kurve K. Die Kurventangente in P bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, dass dieses Dreieck gleichschenkelig ist.

### Exemplarisches

19. Der Graph der Funktion  $f(x) = e^x(x+1)$  und die Koordinatenachsen schließen eine Fläche vollständig ein. In welchem Verhältnis steht dieser Flächeninhalt zur (bis ins Unendliche reichenden) Fläche, die zwischen der x-Achse und dem Graphen gebildet wird in dem Intervall, in dem der Graph unterhalb der x-Achse verläuft?



20. Weisen Sie nach, dass die Fläche, die zwischen dem Graphen der Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$  und der positiven  $x$ -Achse liegt, einen endlichen Wert als Flächeninhalt hat und ermitteln Sie diesen Wert.

21. Der Verlauf von Wachstumsvorgängen in der Natur und der Gesellschaft lässt sich oft durch Exponentialfunktionen modellieren. Dabei werden verschiedene Wachstumsmodelle unterschieden, denen jeweils ein bestimmtes momentanes Wachstumsverhalten zugrunde liegt. In vielen Fällen ist das Wachstum durch begrenzte Ressourcen (Futtermittel, Lebensräume, Bevölkerungszahlen, Rohstoffe) beschränkt. Die obere Grenze der Wachstumsfunktion wird als Kapazität ( $K$ ) oder Sättigung ( $S$ ) bezeichnet.

Wachstumsmodell	Gleichung für die momentane Änderung der Wachstumsfunktion $f(t)$ , $t \geq 0$	Lösung der Wachstumsgleichung
I. Exponentielles Wachstum	$f'(t) = c \cdot f(t)$	$f(t) = f(0) \cdot a^t$
II. Beschränktes Wachstum	$f'(t) = c \cdot (K - f(t))$	$f(t) = K - (K - f(0)) \cdot a^t$
III. Logistisches Wachstum	$f'(t) = c \cdot f(t) \cdot (K - f(t))$	$f(t) = \frac{K \cdot f(0)}{f(0) + (K - f(0)) \cdot a^t}$

- Beschreiben Sie das momentane Wachstumsverhalten bei den drei Modellen.
- Zeigen Sie, dass die angegebenen Funktionen die Gleichungen für die momentane Änderung der Funktionen erfüllen.
- Geben Sie bei allen Modellen eine Gleichung für  $c$  an.
- Geben Sie die Wachstumsgleichungen unter Verwendung der  $e$ -Funktion an.

22. (L) Finnland hat weltweit den größten Anteil von Mobilfunkteilnehmern in der Bevölkerung. Bei einer Bevölkerungszahl von etwa 5,2 Mill. hat sich die Anzahl der Mobiltelefone seit 1990 in erstaunlichem Tempo vergrößert, wie die nebenstehende Tabelle zeigt.

**Anzahl der Mobiltelefone in Finnland**

Jahr	Anzahl in 1000
1990	258
1991	319
1992	386
1993	489
1994	676
1995	1039
1996	1502
1997	2163
1998	2947
1999	3364
2000	3761

- Stellen Sie Daten in einem Diagramm dar und beschreiben Sie den Wachstumsprozess.
- Berechnen und interpretieren Sie die jährlichen Wachstumsraten.
- Modellieren Sie das Wachstum in den ersten Jahren durch eine Exponentialfunktion.  
Hinweis: Verwenden Sie verschiedene Zeitintervalle zur Bestimmung des Wachstumsfaktors  $a$ .
- Modellieren Sie das Wachstumsverhalten ab dem Jahre 1998 durch das Modell des beschränkten Wachstums.  
Verwenden Sie als Kapazität  $K$  die Zahl von 4 700 000 Mobiltelefonen.
- Geben Sie eine logistische Wachstumsfunktion für den gesamten Wachstumsvorgang an.  
Hinweis: Verwenden Sie zur Bestimmung des Parameters  $a$  die Zahl der Mobiltelefone in den Jahren 1990 und 1998.
- Berechnen Sie bei allen drei Modellen die zu erwartende Anzahl im Jahre 2006 und vergleichen Sie diese Werte mit der tatsächlichen Zahl von 4 700 000.
- Stellen Sie Daten und die Wachstumsfunktionen in einem Diagramm dar und diskutieren Sie die Güte der jeweiligen Modelle.

Die nächsten beiden Aufgaben sind im Zusammenhang zu betrachten. Bei der Untersuchung der ersten Aufgabe gibt der Voyage 200 in der Ableitung  $\sinh$  an. Entweder man stellt im Modus auf APPROX oder man macht die Schüler durch Aufgabe 3 vorher mit der Funktion Sinus Hyperbolicus bekannt. In beiden Aufgaben kann auch ohne CAS gearbeitet werden.

**23.** Gegeben ist die Funktionenschar  $f_a(x) = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$   $x \in \mathbb{R}$  und  $a > 0$ .

Ihre Graphen bezeichnet man als **Kettenlinien**. Diese Bezeichnung stammt aus der Physik. Es lässt sich physikalisch nachweisen, dass ein an zwei Punkten A und B aufgehängter, sehr dünner, vollkommen biegsamer, nicht dehnbarer, homogener Faden unter dem Einfluss der Schwerkraft die Form derjenigen Kettenlinie annimmt, deren Bogenlänge zwischen den beiden Aufhängepunkten A und B mit der Fadenlänge übereinstimmt.

- Untersuchen Sie Symmetrie-, Monotonie- und Krümmungsverhalten der Graphen von  $f_a$ .
- Bestimmen Sie eventuell vorhandene Extrema und Wendepunkte in Abhängigkeit von  $a$ .
- Zeichnen Sie die Graphen von  $f_{0,5}$ ,  $f_1$  und  $f_{1,5}$  im Intervall  $[-3;3]$ .

**24.** Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad x \in \mathbb{R}$$

- Weisen Sie nach, dass  $f(-x) = -f(x)$  und  $g(-x) = g(x)$  gilt.
- Bilden Sie von den beiden Funktionen die 1. und 2. Ableitung und stellen Sie möglichst viele Beziehungen zwischen  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$ ,  $g$ ,  $g'$  und  $g''$  her.
- Zeigen Sie, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $[g(x)]^2 = 1 + [f(x)]^2$ .
- Für die Sinus- und die Kosinusfunktion gelten unter anderem folgende Beziehungen:

$$(1) \quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$(2) \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$(3) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$(4) \quad \left(\cos \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} (\cos x + 1)$$

Überprüfen Sie, ob diese Beziehungen auch gelten, wenn man  $\sin x$  durch  $f(x)$  und  $\cos x$  durch  $g(x)$  ersetzt.

- Wegen gewisser Ähnlichkeiten mit der Sinus bzw. Kosinusfunktion nennt man die Funktion  $f$  Sinus Hyperbolicus und die Funktion  $g$  Kosinus Hyperbolicus und bezeichnet ihren Funktionswert mit  $\sinh x$  und  $\cosh x$ .

**25.** Ermitteln Sie die unbestimmten bzw. bestimmten Integrale ohne ein CAS unter Verwendung der folgenden Integrationsregel:  $\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) v(x) dx$ .

Stellen Sie Ihre Lösung ausführlich dar.

$$a) \int 2xe^{2x} dx \quad b) \int xe^{2-x} dx \quad c) \int 2xe^{0,5x} dx \quad d) \int (2x-3)e^x dx$$

$$e) \int_1^2 xe^x dx \quad f) \int_0^2 xe^{2x-1} dx \quad g) \int_2^4 (2x-3)e^x dx$$

### 3 Ziele und Aufgaben Klasse 12

#### 3.1 Planungsvorschlag für die Klasse 12

##### **Analytische Geometrie und Vektorrechnung**

###### **Vorbemerkungen:**

Im Vordergrund stehen die praktischen Bedeutungen der Begriffe und Verfahren der vektoriellen analytischen Geometrie sowie die vielfältigen Möglichkeiten der Modellierung realistischer Probleme, die sich durch die Nutzung eines CAS ergeben. Gleichzeitig sollen die Schüler an Begriffe und Betrachtungsweisen der linearen Algebra herangeführt werden, wodurch die in vielen Studienrichtungen notwendigen Verallgemeinerungen der linearen Algebra inhaltlich und anschaulich vorbereitet werden.

In der Analytischen Geometrie werden verschiedene Konzepte der Stoffverteilung praktiziert. Daher ist dieser Vorschlag nur als einer von mehreren möglichen anzusehen. Die Themen können auch in anderer Reihenfolge unterrichtet werden. Bei den Zielpräzisierungen und den Aufgaben haben wir uns daher entschieden, nur zwei große Themengebiete anzugeben: Koordinatensysteme und Vektoren sowie Geraden, Ebenen und Kreise.

Std.	Inhalte / Schwerpunkte	Bemerkungen
<b>14</b>	<b>Koordinatensysteme und Vektoren</b>	
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Zwei- und dreidimensionale kartesische Koordinatensysteme</li> <li>– Darstellung von Punkten, ebenen Figuren und Körpern in Koordinatensystemen</li> <li>– Wiederholung der Kenntnisse zu Dreiecken, Vierecken und Körpern (Definitionsmöglichkeiten, Inhaltsberechnungen)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Erkennen des Zusammenhanges zwischen dem gewählten Koordinatensystem und der Anschauung (Tiefenlinien und Verkürzungsfaktor des Schrägbildes im Raum)</li> <li>– Aufgaben zum räumlichen Vorstellungsvermögen</li> </ul>
10	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Vektorbegriff (Vektor als Pfeilklassse; Vektor als Zahlenpaar, -tripel)</li> <li>– Darstellungen von Vektoren (Koordinatendarstellung, Pfeildarstellung)</li> <li>– Ortsvektor</li> <li>– Betrag eines Vektors, Länge eines Vektors</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Ausbilden reichhaltiger Vorstellungen: Vektor als Werkzeug, um konkrete Darstellungs-, Bewegungs- und Vermessungsprobleme analytisch zu lösen</li> <li>– Vektoren mit CAS</li> <li>– Anwendungen bei Länge und Mittelpunkt einer Strecke</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Operationen mit Vektoren: Vervielfachen mit einer reellen Zahl, Addieren, Subtrahieren, Einheitsvektor</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Vektorraum als Menge gegebener Vektoren, mit 2 Operationen, vereinfachende Schreibweise, anschauliche Darstellung, Analogie zu Zahlenbereichen; Nullelement, Einselement</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Linearkombinationen von Vektoren</li> <li>– Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– inhaltliches Verständnis, geometrische Deutung</li> <li>– Dimension, Basis eines Vektorraumes (im Zusammenhang mit Koordinatensystemen)</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Skalarprodukt</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Problematik der Operation Skalarprodukt</li> </ul>



Std.	Inhalte / Schwerpunkte	Bemerkungen
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Winkel zwischen Vektoren</li> <li>– Vektorprodukt</li> </ul>	(Ergebnis ist kein Vektor) – Die Einführung von Skalar- und Vektorprodukt kann auch später erfolgen
	– Einfache Nachweise geometrischer Zusammenhänge	
<b>8</b>	<b>Geraden</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Geradengleichungen (parameterfreie Gleichungen nur in der Ebene, Parametergleichung im Raum)</li> <li>– Lagebeziehungen zwischen               <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Punkt und Gerade</li> <li>○ zwei Geraden im Raum</li> </ul> </li> <li>– Berechnung von Winkeln zwischen Geraden (insbesondere Orthogonalität)</li> <li>– Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden in der Ebene</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Nutzung des CAS zur Anschauung und zur Vereinfachung von Rechnungen,</li> <li>– geometrische Bedeutung des Parameters und von Parametereinschränkungen</li> </ul>
<b>15</b>	<b>Ebenen</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Ebenengleichungen (Parametergleichung, Koordinatengleichung, Normalenform)</li> <li>– Lagebeziehungen zwischen               <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Gerade und Ebene</li> <li>○ zwei Ebenen</li> </ul> </li> <li>– Berechnung von Durchstoßpunkten</li> <li>– Berechnung von Winkeln zwischen               <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Gerade und Ebene</li> <li>○ zwei Ebenen</li> </ul> </li> <li>– Berechnung des Abstandes Punkt – Ebene</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Sonderfälle: Koordinatenachsen, Koordinatenebenen</li> <li>– Benutzung des Begriffes „Matrix“ als mögliche Darstellung von Gleichungssystemen bei Nutzung des CAS,</li> <li>– Keine Berechnung von Spurgeraden</li> <li>– exemplarisch</li> </ul>
<b>5</b>	<b>Kreise</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Kreisgleichung in Koordinatenform (allgemeine Lage)</li> <li>– Lagebeziehungen zwischen Kreis und Gerade</li> </ul>	– Tangentengleichung für Punkte des Kreises
<b>8</b>	<b>Gemischte Aufgaben</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Räumliche Schnittprobleme in Anwendungssituationen (Projektionen, Flugbahnen)</li> <li>– Berechnung von Flächeninhalten und Volumina</li> </ul>	

## 3.2 Koordinatensysteme und Vektoren

### Vorwissen

*Aus dem Mathematikunterricht:*

*Sekundarstufe I:*

- Verschiebung, Verschiebungspfeil
- Kraft, Geschwindigkeit ... als vektorielle Größe mit Betrag, Richtung und Richtungssinn aus der Physik, Kräfteparallelogramm
- Geometrische Figuren (Dreiecke, Vierecke, Kreise): Definitionen, Eigenschaften, Berechnungen
- Geometrische Körper (Würfel, Quader, Prismen, Pyramiden, Pyramidenstümpfe): Definitionen, Eigenschaften, Berechnungen
- Schrägbilder, Grund- und Aufriss
- Spiegelung von Punkten und geometrischen Figuren
- Parallelität und Orthogonalität von Geraden und Strecken
- Winkel, Lot
- räumliches Vorstellungsvermögen
- Koordinatensysteme in der Ebene
- inhaltliche Kenntnisse des Operationsbegriffs (Rechenoperationen)

*Sekundarstufe II:*

- Normale, Anstieg

### Ziele

#### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler:

- wissen, dass es zwei- und dreidimensionale Koordinatensysteme gibt,
- kennen den Begriff des kartesischen Koordinatensystems,
- kennen zwei verschiedene Darstellungen eines räumlichen, kartesischen Koordinatensystems in der Ebene (x-Achse nach vorn, x-Achse nach rechts),
- verbinden mit dem Begriff des Vektors sowohl einen Verschiebungspfeil als auch ein Zahlenpaar bzw. Zahlentripel,
- kennen ein Vorgehen zur Berechnung von Abständen von Punkten im Raum,
- wissen, dass Punkte durch Ortsvektoren beschrieben werden können.

Die Schülerinnen und Schüler können

- Punkte, Strecken, Vektoren und elementare Körper mit gegebenen Koordinaten der Eckpunkte im kartesischen Koordinatensystem darstellen,
- räumliche Darstellungen lesen,

- Vektoren addieren, subtrahieren und vervielfachen (formal rechnerisch und anschaulich mithilfe von Pfeilen),
- Linearkombinationen von Vektoren in der Ebene berechnen, darstellen und aus Darstellungen ablesen,
- Linearkombinationen von Vektoren in räumlichen Darstellungen von elementaren Körpern erkennen, berechnen und beschreiben, Parameter bestimmen,
- elementare geometrische Figuren oder Körper vervollständigen oder nachweisen, wenn die Koordinaten wesentlicher Eckpunkte gegeben sind,
- folgenden Satz in der Ebene anwenden: „Zwei Vektoren bilden einen Winkel von  $90^\circ$  genau dann, wenn ihr Skalarprodukt Null ist“,
- den Betrag eines Vektors bestimmen,
- die Länge und den Mittelpunkt einer Strecke bestimmen, wenn die Endpunkte gegeben sind,
- einfache Nachweise führen (Mittelpunkt einer Strecke, ebenes Viereck, Parallelogramm).

### Reaktivierbars Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler können

- das Skalarprodukt zur Berechnung des Winkels zwischen 2 Vektoren anwenden,
- das Vektorprodukt anwenden, um einen orthogonalen Vektor zu zwei gegebenen Vektoren herzustellen,
- den Betrag des Vektorprodukts als Fläche des Parallelogramms deuten, das durch die Vektoren aufgespannt wird.

### Exemplarisches

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

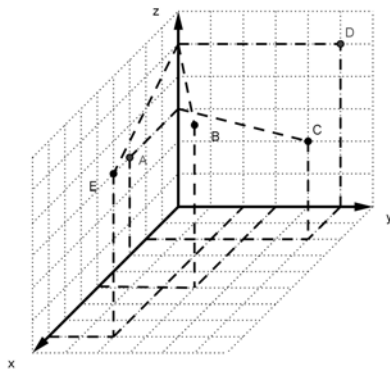
- Der Vektor ist eine Äquivalenzklasse in Analogie zur Klasse der Verschiebungen und den gebrochenen Zahlen als Klasse von Brüchen.
- Der Vektor ist ein Werkzeug, um konkrete Darstellungs-, Bewegungs-, und Vermesungsprobleme analytisch zu lösen,
- Es gibt weitere Bedeutungen des Vektorbegriffs (z.B.: Zeilen und Spalten in Tabellen, Parameter von Gleichungen oder Funktionen, Glieder von Folgen).
- Die Operationen „Addition“, „Subtraktion“ und „Vervielfachen“ von Vektoren und die Begriffe „Nullvektor“ und „Einheitsvektor“ sind analog zu den Rechenoperationen mit gebrochenen Zahlen und den Zahlen Null und Eins.
- Vektoren können linear abhängig oder unabhängig sein.
- Die Bedeutung des Vektorraumes und seiner Dimension kann an zwei- und dreidimensionalen Koordinatensystemen veranschaulicht werden. (Diskussion über verschiedene Basen von Koordinatensystemen)

## Aufgaben

*Hinweis: Wenn nichts Anderes gefordert ist, sollen die Koordinatensysteme kartesisch und die Parameter aus dem Bereich der reellen Zahlen sein.*

### Sicheres Wissen und Können

- Ein gerader Pyramidenstumpf ist durch folgende Eckpunkte gegeben:  
 $A(7 | 1 | -1)$ ,  $B(7 | 9 | -1)$ ,  $C(3 | 9 | -1)$ ,  $D(3 | 1 | -1)$ ,  $E(6 | 3 | 7)$ ,  $F(6 | 7 | 7)$ ,  
 $G(4 | 7 | 7)$  und  $H$ .  
 a) Stellen Sie den Pyramidenstumpf in einem kartesischen Koordinatensystem dar.  
 b) Geben Sie die Koordinaten des Punktes  $H$  an.
- a) Lesen Sie die Koordinaten der gegebenen Punkte ab.  
 b) Begründen Sie, warum es ohne die gestrichelten Linien nicht möglich wäre, die Koordinaten der Punkte eindeutig anzugeben.



- In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Punkt  $P(1 | -2 | 3)$  gegeben. Dieser Punkt  $P$  wird an der folgenden Ebene bzw. Achse gespiegelt. Bestimmen Sie jeweils die Koordinaten des Bildpunktes.
  - $x$ - $y$ -Ebene
  - $y$ - $z$ -Ebene
  - $x$ - $z$ -Ebene
  - der  $x$ -Achse; der  $y$ -Achse; der  $z$ -Achse.
- Wo liegen alle Punkte  $P(x | y | z)$  bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems, für die Folgendes gilt.
  - Die  $x$ -Koordinate ist 5
  - Die  $x$ - und die  $y$ -Koordinaten sind negativ, die  $z$ -Koordinate ist 3.
- Markieren Sie in einem kartesischen Koordinatensystem alle Punkte  $P(-2 | y | 3)$ , wobei  $y$  alle reellen Zahlen durchläuft.
- Zeichnen Sie den Punkt  $Q(1 | 2 | 3)$  in ein kartesisches Koordinatensystem.
  - Geben Sie die Koordinaten von fünf Punkten an, die in der Zeichnung nicht vom Punkt  $Q$  zu unterscheiden sind.
  - Erläutern Sie, warum es nicht möglich ist, die Koordinaten eines Punktes aus einer Zeichnung abzulesen.

7. Gegeben ist eine Pyramide ABCD. Die Eckpunkte besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem (1 LE = 1 cm) die Koordinaten : A (0 | 0 | 0), B (5 | 0 | 0), C (0 | 4 | 0) und D (0 | 0 | 6).
- Zeichnen Sie diese Pyramide.
  - Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide ABCD.

8. Welcher der folgenden Vektoren ist parallel zu  $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ?

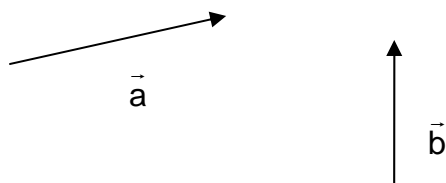
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0,75 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 27 \\ -36 \end{pmatrix}$$

9. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate so, dass die Vektoren parallel zueinander sind.

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ 8 \\ b_z \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{3} \\ b_z \end{pmatrix}$$

10. Gegeben:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Ermitteln Sie  $|2\vec{a} + \vec{b}|$

11. Ermitteln Sie zeichnerisch  $2\vec{a} - \vec{b}$  und  $-2\vec{b} + \vec{a}$ .



12. Vergleichen Sie die folgenden mathematischen Objekte miteinander. Finden Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen

$$P(1 | 2 | 3) \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

13. Erläutern Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen einem Ortsvektor und einem Richtungsvektor.

14. Bestimmen Sie die fehlende Koordinate des Punktes B so, dass die Punkte A (5 | 2) und B (-3 | y) 10 Längeneinheiten voneinander entfernt sind.

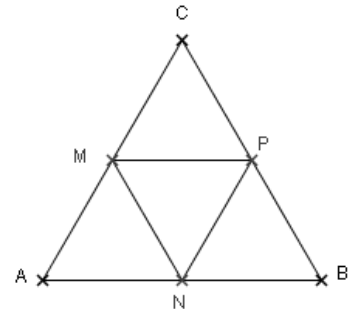
15. In einem kartesischen Koordinatensystem sind A (0 | 0 | -3), B (1 | 4 | -2), C (2 | 5 | 2), und D (1 | 1 | 1) Eckpunkte eines ebenen Vierecks.

- Zeichnen Sie das Viereck in ein Koordinatensystem.
- Untersuchen Sie, ob dieses Viereck ein Rhombus ist.

16. Gegeben sind die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2c \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Ermitteln Sie den Wert von  $c$  so, dass der Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$   $90^\circ$  beträgt.

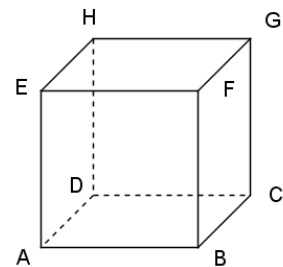
17. In einem gleichseitigen Dreieck  $ABC$  sind  $M$ ,  $N$  und  $P$  die Mittelpunkte der Seiten  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AB}$ , und  $\overline{BC}$ .

- Nennen Sie Repräsentanten der Vektoren  $\overrightarrow{MN}$  bzw.  $\overrightarrow{CM}$
- Geben Sie Vektoren an, die den gleichen Betrag wie  $\overrightarrow{AN}$  haben.



18. Gegeben sind die Eckpunkte eines Würfels.

- Geben Sie alle Repräsentanten der Vektoren  $\overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{BH}$  an.
- Nennen Sie je einen Repräsentanten von  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$ ;  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CH}$ ;  $-\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DC}$  und  $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HD}$ .



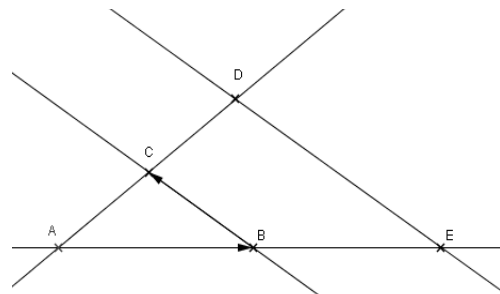
19. Die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks betragen 3 LE, 4 LE und 5 LE. Suchen Sie nach Koordinaten bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems für die Eckpunkte  $A$ ,  $B$  und  $C$ , so dass die genannten Eigenschaften des Dreiecks  $ABC$  erfüllt sind.

20. Gegeben ist eine Strahlensatzfigur.

Es gilt:  $2 \cdot \overline{AC} = \overline{AD}$      $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ;     $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$

Drücken Sie die Vektoren:

$\overrightarrow{AD}$ ;  $\overrightarrow{DE}$ ;  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$  nur durch  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aus.



### Reaktivierbares Wissen und Können

21. Suchen Sie nach mehreren Möglichkeiten, einen Würfel mit der Kantenlänge 5 LE in einem Koordinatensystem anzugeben. Bestimmen Sie zu jeder Möglichkeit die Koordinaten der Eckpunkte des Würfels.

22. Gegeben sind folgende Vektoren im Raum:  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} u \\ 3 \\ v \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie  $u$  und  $v$  so, dass der dritte Vektor senkrecht zu beiden anderen verläuft.

23. Gegeben ist das Dreieck ABC mit  $A(2 | 3 | 5)$ ,  $B(4 | 4 | 1)$ ,  $C(0 | 7 | 5)$ .
- Stellen Sie das Dreieck in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar.
  - Prüfen Sie auf zwei Arten, ob dieses Dreieck rechtwinklig ist.
  - Berechnen Sie den Umfang und die fehlenden Innenwinkel des Dreiecks.
  - Berechnen Sie die Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  der Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$ .
  - Bilden Sie den Vektor  $\overrightarrow{M_1M_2}$  und prüfen Sie, ob er zu  $\overrightarrow{BC}$  parallel ist.
  - In welchem Verhältnis stehen die Beträge dieser Vektoren?
  - Fassen Sie Ihre Ergebnisse aus e), f) und g) in einem Satz für das Dreieck ABC zusammen.
  - \*Gilt dieser Satz auch für beliebige Dreiecke? Beweisen Sie ihn mithilfe von Vektoren.

### Exemplarisches

24. Vergleichen Sie die Rechenoperationen mit reellen Zahlen mit den Rechenoperationen mit Vektoren.
25. Vergleichen Sie den Nullvektor mit der Zahl Null und den Einheitsvektor mit der Zahl Eins.
26. Ein Pilot überfliegt A-Stadt in Richtung des Ortes B. Der Ort B liegt 1000 km nördlich von A-Stadt. Die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs beträgt  $\left| \vec{v}_1 \right| = 900 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Auf dem Weg weht ein Westwind mit einer Geschwindigkeit von  $\left| \vec{v}_2 \right| = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .
- Beschreiben Sie durch Angabe des so genannten Vorhaltewinkels die Richtung, in die der Pilot steuern muss, um den Kurs zu halten.
  - Wie groß ist die Geschwindigkeit des Flugzeugs über Grund, d. h. die Resultierende aus Eigen- und Windgeschwindigkeit?
  - Nach welcher Flugdauer überfliegt das Flugzeug den Ort B?
27. Interpretieren Sie den Vektor  $(a | b | c) = (8 | 12 | 18)$  in folgenden Kontexten.
- als Tagestemperaturen in °C um 6, 12 bzw. 18 Uhr an einem bestimmten Ort,
  - als Glieder einer Zahlenfolge,
  - als Parameter einer quadratischen Funktion der Form  $y = ax^2 + bx + c$ ,
  - als Parameter einer quadratischen Gleichung der Form  $ax^2 + bx = c$
28. Der dreidimensionale Vektor  $(a | b | c)$  kann unterschiedlich gedeutet werden. Untersuchen Sie, welche Bedeutung in den gegebenen Kontexten die Vektoraddition, das Vervielfachen von Vektoren und der Nullvektor haben.
- als Tageseinnahmen in € einer Firma mit 3 Standorten
  - a, b und c als Parameter einer quadratischen Funktion der Form  $y = ax^2 + bx + c$
  - als Verschiebung
29. Geben Sie möglichst viele Deutungen des Vektors  $(a | b | c | d | e) = (2 | 4 | 6 | 8 | 10)$  an.
30. Das Billiardspiel wird häufig zur Veranschaulichung der Begriffe und der Vektoroperationen benutzt. Erläutern Sie an diesem Beispiel die Begriffe Vektor, Nullvektor und Einheitsvektor sowie die Operationen Addition und Vervielfachen eines Vektors.

Die folgende Aufgabe ist als Idee zur Selbsttätigkeit interessierter Schüler gedacht, nicht für alle Schüler.

- 31.** In der Physik sind die Galilei-Transformation und die Lorentz-Transformation wichtig. In den Geowissenschaften gibt es Transformation von geographischer Breite und Länge in Gauß-Krüger-Koordinaten und die Umrechnungen zwischen astronomischen Koordinaten, die als Anwendungen von Vektoren angesehen werden können. Informieren Sie sich über eine dieser Transformationen und stellen Sie einen Zusammenhang zur Vektorrechnung her.

**32.** Gegeben seien die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$   $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Sind diese Vektoren linear unabhängig?

- 33.** In der folgenden Figur werden der Punkt O als Koordinatenursprung eines nichtkartesischen Koordinatensystems und die Vektoren

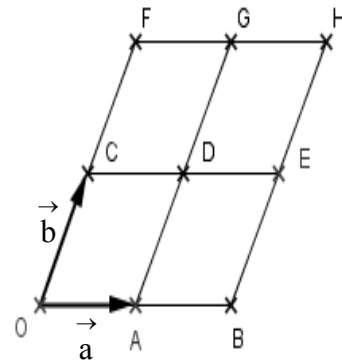
$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  als Basisvektoren aufgefasst.

a) Stellen sie die Ortsvektoren

$\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OD}$ ,  $\vec{OE}$ ,  $\vec{OF}$ ,  $\vec{OG}$ , und  $\vec{OH}$

der Punkte A, B, C, D, E, F, G und H nur

mithilfe der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  dar und geben Sie die Koordinaten dieser Punkte in diesem Koordinatensystem an.



b) Begründen Sie, dass der Vektor  $\vec{d} = \vec{OD}$  als Basisvektor nicht ausreichen würde, um alle Ortsvektoren nur durch ihn darzustellen.

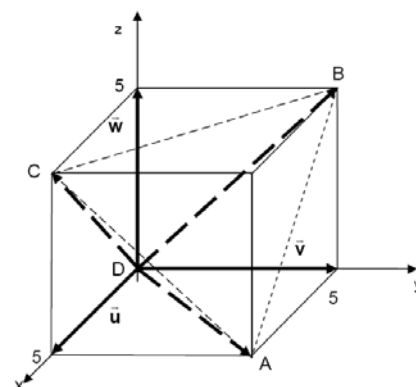
- 34.** Gegeben ist ein Würfel mit einer Kantenlänge von 5 Längeneinheiten. In dem Würfel liegt ein regelmäßiger Tetraeder ABCD (siehe Skizze).

a) Die Vektoren  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  sind als Basisvektoren gegeben.

Geben Sie die Vektoren

$\vec{a} = \vec{DA}$ ,  $\vec{b} = \vec{DB}$  und  $\vec{c} = \vec{DC}$  nur in Abhängigkeit von den Vektoren  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  an.

b) Nun seien die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  als Basisvektoren gegeben. Stellen Sie die Vektoren  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  oder  $\vec{w}$  als Linearkombination von  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$  dar.



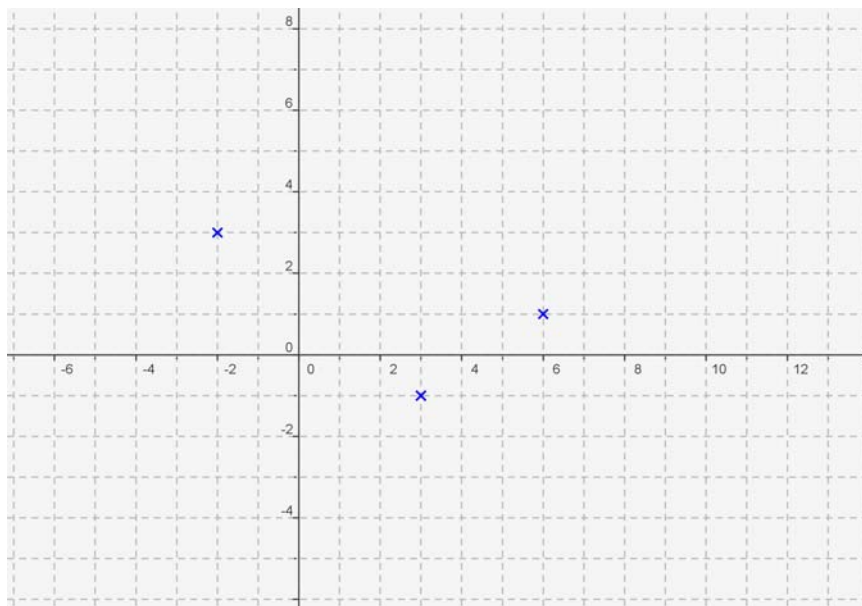


35. Gegeben seien die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Berechnen Sie den Flächeninhalt der folgenden Figur.

- a) Das Parallelogramm, das von den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannt wird
- b) Das Dreieck, das von den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannt wird

36. Es gibt drei Möglichkeiten, die gegebenen Punkte so durch einen vierten Punkt zu ergänzen, dass ein Parallelogramm entsteht. Berechnen Sie für jedes entstehende Parallelogramm den Flächeninhalt.



### 3.3 Geraden, Ebenen und Kreise

#### Vorwissen

- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme
- Lagebeziehungen zwischen Geraden, Gerade - Kreis, Punkt - Gerade
- Begriff des Abstandes
- Spiegelung von Figuren
- Lot, Normale
- Zusammenhang zwischen dem Anstieg zueinander senkrechter Geraden in der Ebene ( $m_1 \cdot m_2 = -1$ )
- Höhen und Mittelsenkrechten im Dreieck

#### Ziele

##### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler kennen:

zu Geraden:

- ein Verfahren zur Bestimmung der Lagebeziehungen zwischen Punkten und Geraden,
- ein Vorgehen, um den Abstand eines Punktes von einer Geraden in der Ebene zu bestimmen,
- die geometrische Bedeutung des Parameters in Parametergleichungen von Geraden / Strecken / Strahlen,
- anschauliche geometrische Vorstellungen von Geraden im Raum und können Geraden in ein Koordinatensystem eintragen.

zu Ebenen:

- Verfahren zur Bestimmung von Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

Die Schülerinnen und Schüler können

zu Geraden:

- Parametergleichungen von Geraden in der Ebene und im Raum aufstellen, wenn die dafür notwendigen Punkte oder Vektoren gegeben sind,
- Parameterfreie Gleichungen von Geraden in der Ebene (z. B.:  $y = mx + n$ ) aufstellen,
- Lagebeziehungen an einfachen Beispielen zwischen Punkten und Geraden bzw. Strecken erkennen oder realisieren,
- Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden oder Strecken / Kanten von Körpern erkennen (Parallelität, Orthogonalität und auf das Vorhandensein eines Schnittpunktes schließen, ohne ihn zu berechnen) und realisieren (Parallelität von Geraden im Raum, Orthogonalität von Geraden nur in der Ebene).

zu Ebenen:

- Parametergleichungen von Ebenen aufstellen, wenn die dafür notwendigen Punkte oder Vektoren gegeben sind,
- Gleichungen von Ebenen in der Normalen- und der Koordinatenform aufstellen, wenn der Normalenvektor der Ebenen bekannt oder ohne Hilfsmittel zu bestimmen ist,
- Lagebeziehungen an einfachen Beispielen zwischen Punkten und Ebenen erkennen und realisieren,
- Lagebeziehungen an einfachen Beispielen zwischen einer Geraden und einer Ebene erkennen und realisieren (Parallelität und Orthogonalität, wenn der Normalenvektor der Ebene bekannt ist),
- Lagebeziehungen an einfachen Beispielen zwischen 2 Ebenen erkennen und im Falle der Parallelität und der Identität realisieren,
- Anwendungen auf punktweise Projektionen und punktweise Spiegelungen von Figuren auf/an Koordinatenebenen beziehen.

### Reaktivierbars Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler können

- lineare Gleichungssysteme mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten lösen.

zu Geraden:

- die Lagebeziehung von zwei Geraden bestimmen,
- den Schnittpunkt zweier Geraden berechnen,
- das Skalarprodukt zur Berechnung des Schnittwinkels zwischen zwei Geraden anwenden,
- den Abstand Punkt - Gerade in der Ebene bestimmen,
- Gleichungen von Geraden in der Ebene in Parameterform und in Koordinatenform angeben, ineinander umwandeln und gezielt anwenden, z.B. um den Abstand eines Punktes von einer Geraden in der Ebene zu bestimmen,
- Gleichungen von Geraden im Raum in Parameterform aufstellen und gezielt anwenden, um z. B. einfache geometrische Nachweise zu führen.

zu Ebenen:

- Ebenengleichungen in Parameterform, Normalenform und Koordinatenform angeben, ineinander umwandeln und gezielt anwenden,
- die Lagebeziehung von einer Geraden und einer Ebenen erkennen und realisieren (besonders Parallelität und Orthogonalität),
- Lagebeziehungen zwischen Punkten und Ebenen erkennen und realisieren,
- Lagebeziehungen zwischen 2 Ebenen erkennen und realisieren (besonders Parallelität und Orthogonalität),
- den Durchstoßpunkt einer Geraden durch eine Ebene bestimmen (keine Schnittgerade zweier Ebenen bestimmen),

- das Skalarprodukt zur Berechnung des Schnittwinkels zwischen zwei Ebenen anwenden,
- das Skalarprodukt und die Beziehung  $\alpha = 90^\circ - \alpha'$  zur Berechnung des Schnittwinkels zwischen einer Geraden und einer Ebenen anwenden,
- den Abstand Punkt - Ebene bestimmen,
- die Gleichung für das Lot von einem Punkt auf eine Ebene analytisch bestimmen,
- die Volumenberechnung von Körpern analytisch durchführen.

zu Kreisen in der Ebene:

- die Gleichung eines Kreises in Koordinatenform bei vorgegebenem Mittelpunkt und Radius aufstellen,
- Mittelpunkt und Radius aus der Kreisgleichung der Form  $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$  bestimmen,
- die Lage eines Punktes bezüglich eines Kreises feststellen,
- Lagebeziehung von einem Kreis zu Geraden (Tangente, Sekante, Passante) feststellen und gegebenenfalls Schnittpunkte berechnen und Tangenten, Sekanten, Passanten realisieren,
- Tangentengleichungen an einen Kreis von einem Punkt des Kreises aufstellen (nicht von einem Punkt außerhalb).

### Exemplarisches

Die Schüler haben an einprägsamen Beispielen erste Vorstellungen und Einsichten zu folgenden Sachverhalten gewonnen:

- Beim Lösen eines linearen Gleichungssystems mit einem CAS benötigt man den Matrixbegriff und kann einen kurzen Einblick in deren Bedeutung bekommen.
- Die Gleichungen eines Kreises in der Ebene in Koordinatenform und in vektorieller Form sind ineinander überführbar.

## Aufgaben

Wenn nicht Anderes gefordert ist, sollen alle Koordinatensysteme kartesisch und alle Parameter aus dem Bereich der reellen Zahlen sein.

### Sicheres Wissen und Können

#### Aufgaben zu Geraden

- Gegeben sind zwei Gleichungen  $y = -2x + 5$  und  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .
  - Zeigen Sie, dass beide Gleichungen dieselbe Gerade  $g$  beschreiben.
  - Geben Sie die Gleichung einer Geraden  $h$  an, die orthogonal zu  $g$  verläuft.
- Gegeben sind die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$  und der Punkt  $P (-1 \mid 5 \mid 4)$ .
  - Für welchen Wert von  $a$  liegt  $Q (-1 \mid 5 \mid a)$  auf  $g$ ?
  - Geben Sie die Gleichung einer Geraden  $h$  an, die durch  $P$  und parallel zu  $g$  verläuft.
  - Geben Sie die Gleichung einer Geraden  $k$  an, die  $g$  nur in einem Punkt schneidet.
- Stellen Sie Gleichungen der Geraden auf, die durch den Punkt  $A (3 \mid 6 \mid 9)$  verlaufen und jeweils parallel zu den Koordinatenachsen sind.
- Welche Richtung muss eine Gerade haben, wenn sie bei Spiegelung an einer Koordinatenebene in sich selbst übergeht?
  - $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
  - $\vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
  - $\vec{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Gegeben sind die Punkte  $A (2 \mid 2 \mid 2)$  und  $B (3 \mid 4 \mid 5)$ .
  - Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden durch  $A$  und  $B$ .
  - Bestimmen Sie eine Gleichung des Strahls  $\overrightarrow{AB}$ .
  - Bestimmen Sie eine Gleichung der Strecke  $\overline{AB}$ .
- Gegeben sind die Punkte  $P (-7 \mid 12 \mid 18)$  und  $Q (3 \mid -8 \mid 8)$ .  
Welcher der Punkte  $A (4 \mid -10 \mid 7)$ ,  $B (1 \mid -4 \mid 10)$ ,  $C (-1 \mid 0 \mid 12)$ ,  $D (-9 \mid 16 \mid 20)$  oder  $E (-6 \mid 10 \mid 17)$  liegt
  - auf der Geraden  $\overline{PQ}$
  - auf der Strecke  $\overline{PQ}$ ?

8. Gegeben ist eine Gerade durch den Punkt P (2 | 3 | -1) und den Richtungsvektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeichnen Sie die Gerade und geben Sie eine Parametergleichung an.
  - b) Zeichnen Sie die Punkte zu den Parameterwerten 2; -3; 0,5.
9. Gegeben sind die Punkte A (2 | 3), B (5 | 7) und C (1 | 4).
- a) Ergänzen Sie einen weiteren Punkt D so, dass mit ABCD ein Parallelogramm entsteht.
  - b) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Berechnung des Abstandes des Punktes D von der Diagonalen AC.
  - c) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Berechnung des Winkels, unter dem sich die Diagonalen schneiden.
10. Gegeben ist die Gerade g:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
- a) Geben Sie die Gleichung der Geraden h an, die parallel zu g durch P(3 | 1) verläuft.
  - b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden k, die durch Q(1 | 2) verläuft und orthogonal zu g ist.
11. Gegeben sei ein Dreieck mit den Punkten A (2 | 1), B (5 | 4) und C (2 | 7).
- a) Das Dreieck wird an der x-Achse (y-Achse) gespiegelt. Geben Sie die Koordinaten des Bilddreiecks an.
  - b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ist.
  - c) Wie lautet die Gleichung einer Geraden g, die für das Dreieck Symmetrieachse ist?
  - d) Ermitteln Sie auf möglichst einfache Weise den Abstand des Punktes B von der Seite  $\overline{AC}$  (den Abstand des Punktes A von der Seite  $\overline{BC}$ ).
12. Gegeben seien die Punkte der Dreiecke  $ABC_k$  mit A (5 | 7 | 3), B (2 | 1 | 1) und  $C_k(3 | k | 2)$ .
- a) Zeigen Sie, dass für jedes  $k \in \mathbb{R}$  ein Dreieck entsteht, d.h. nicht alle drei Punkte auf einer Geraden liegen.
  - b) Untersuchen Sie, für welche Werte k der Innenwinkel  $\beta$  ein spitzer (rechter, stumpfer) Winkel ist.

### Aufgaben zu Ebenen

13. Gegeben sind die Punkte A (2 | 0 | 3), B (1 | -1 | 5) und C (3 | -2 | 0).  
Geben sie drei verschiedene Parametergleichungen der Ebene  $\varepsilon$  (ABC) an.
14. Geben Sie für die Koordinatenebenen jeweils eine Gleichung in Parameter-, Koordinaten- und Normalenform an.
15. Ermitteln Sie verschiedene Normalenvektoren der Ebene  $\varepsilon: 2x - 3y + z - 7 = 0$ .  
Geben Sie drei Punkte dieser Ebene  $\varepsilon$  an und ermitteln Sie eine Parametergleichung für diese Ebene.

16. a) Begründen Sie, dass die Ebenen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  parallel zu einander liegen, aber nicht identisch sind.

$$\varepsilon_1: x - 3y + 2z - 9 = 0$$

$$\varepsilon_2: 4x - 12y + 8z - 9 = 0$$

- b) Ändern Sie eine der Ebenengleichungen so ab, dass die beiden Ebenen  
(1) identisch sind;  
(2) einander schneiden.

17. Weisen Sie nach, dass der Punkt A  $(-7 \mid -2 \mid 6)$  ein Punkt der Ebene  $\varepsilon$  mit

$$\varepsilon: -x + 3y - z + 5 = 0 \text{ ist.}$$

Ermitteln Sie die x-Koordinate des Punktes B  $(x \mid 0 \mid 5)$ , so dass er ebenfalls in der Ebene  $\varepsilon$  liegt.

18. Geben Sie die Gleichung einer Ebene  $\varepsilon_1$  an, in der die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

liegt und einer Ebene  $\varepsilon_2$  an, die parallel zur Geraden  $g$  ist, aber  $g$  nicht enthält.

19. Die Punkte A  $(9 \mid -4 \mid 7)$ , B  $(3 \mid 8 \mid 1)$  und C  $(9 \mid 2 \mid 1)$  bestimmen eine Ebene  $\varepsilon$ .

Die Gerade  $g$  verläuft durch die Punkte P  $(1 \mid 1 \mid 2)$  und Q  $(3 \mid 0 \mid 5)$ .

- a) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Prüfung der Lagebeziehung von  $\varepsilon$  und  $g$ .  
b) Beschreiben Sie ein Verfahren zur Berechnung eines möglichen Schnittpunktes.
20. Die Gerade  $g$  verläuft durch die Punkte P  $(3 \mid 4 \mid 9)$  und Q  $(5 \mid 7 \mid 16)$ . Ermitteln Sie eine Gleichung für die Ebene  $\varepsilon$ , die durch den Punkt A  $(1 \mid -2 \mid 3)$  und senkrecht zur Geraden  $g$  verläuft.
21. Gegeben ist ein Punkt A  $(x \mid y \mid z)$  und eine Ebene  $\varepsilon$ . Beschreiben Sie anhand einer Skizze ein mögliches Verfahren zur Berechnung des Abstandes des Punktes A von der Ebene  $\varepsilon$ .

## Reaktivierbares Wissen und Können

### Aufgaben zu Geraden

22. Welche Punkte der Geraden  $y = 2x + 1$  haben vom Punkt P  $(1 \mid 2)$  den Abstand 1 LE?

23. Gegeben ist die Gerade  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Welchen Abstand hat der Koordinatenursprung zur Geraden  $g$ ?  
b) Welchen Winkel schließt die Gerade  $g$  mit der x- bzw. y-Achse ein?

24. Gegeben sind die Punkte A  $(3 \mid -2 \mid 2)$ , B  $(6 \mid -3 \mid -1)$  und C  $(4 \mid 2 \mid 3)$ .

- a) Ergänzen Sie einen Punkt D so, dass die vier Punkte ABCD ein Parallelogramm ergeben.  
b) Berechnen Sie den Umfang des Parallelogramms.  
c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Diagonalen.  
d) Liegt der Punkt P  $(7,5 \mid 1,6 \mid 5,5)$  auf der Seite  $\overline{AC}$ ?

25. Gegeben ist das Dreieck ABC mit A (3 | 4), B (-1 | 5) und C (-4 | -3). Die Verbindungsstrecke der Seitenmittelpunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten heißt **Seitenhalbierende**.
- Bestimmen Sie Gleichungen der Geraden, auf denen die 3 Seitenhalbierenden liegen.
  - Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden heißt Schwerpunkt des Dreiecks.
  - Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt die Seitenhalbierenden jeweils im Verhältnis 2:1 teilt.
26. Gegeben ist das Dreieck ABC mit A (3 | 4), B (-1 | 5) und C (-4 | -3).
- Bestimmen Sie Gleichungen der Geraden, auf denen die Höhen und die Mittelsenkrechten liegen.
  - Weisen Sie nach, dass sich die Höhen in einem Punkt schneiden.
  - Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten.
  - Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks.
27. Die Gleichung  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  wird als Achsenabschnittsform einer Geradengleichung bezeichnet.  
Begründen Sie dies.
28. Gegeben ist das Dreieck ABC durch die Punkte A (-1 | 4 | 3), B (-4 | 2 | 1) und C (6 | -2 | 7). Auf der Geraden  $\overline{g}$ , die durch die Punkte A und B verläuft, liegt ein Punkt D so, dass die Strecken  $\overline{CB}$  und  $\overline{CD}$  die gleiche Länge haben. Bestimmen Sie D.

### Aufgaben zu Ebenen

29. Die Geraden  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  und der Punkt A (2 | 3 | -1) bestimmen eine Ebene  $\varepsilon$ . Geben Sie für diese Ebene jeweils eine Gleichung in Parameter- und Koordinatenform an.
30. Die Punkte A (-1 | 2 | 5), B (3 | 0 | -4) und C (-2 | 3 | -1) bestimmen eine Ebene  $\varepsilon$ . Bestimmen Sie für  $\varepsilon$  eine Koordinatengleichung.
31. Die parallelen Geraden  $g$  und  $h$  spannen eine Ebene  $\varepsilon$  auf. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene  $\varepsilon$ .
- $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{17}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
32. Die Ebene  $\varepsilon_1$  verläuft durch die Punkte  $A_1 (0 | 0 | 0)$ ,  $B_1 (3 | -3 | 0)$  und  $C_1 (1 | 2 | 1)$ . Eine weitere Ebene  $\varepsilon_2$  wird durch  $A_2 (1 | 1 | 1)$ ,  $B_2 (4 | -2 | 1)$  und  $C_2 (2 | 2 | 3)$  gegeben. Untersuchen Sie, ob  $\varepsilon_1$  parallel zu  $\varepsilon_2$  verläuft.



- 33.** Die Ebene  $\varepsilon_1$  verläuft durch die Punkte A1 (0 | 0 | 0), B1 (3 | -3 | 0) und C1 (1 | 2 | 1).  
Eine weitere Ebene  $\varepsilon_2$  wird durch A2 (1 | 1 | 1), B2 (4 | -2 | 1) und C2 (2 | y | z) gegeben.  
Geben Sie mögliche Koordinaten des Punktes C2 an, so dass  $\varepsilon_1$  parallel zu  $\varepsilon_2$  verläuft.
- 34.** Die Punkte A (9 | -4 | 7), B (3 | 8 | 1) und C (9 | 2 | 1) bestimmen eine Ebene  $\varepsilon$ .  
Die Gerade g verläuft durch die Punkte P (1 | 1 | 2) und Q (3 | 0 | 5).  
Weisen Sie nach, dass sich  $\varepsilon$  und g schneiden. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel.
- 35.** Die drei Punkte A (4 | 0 | 3), B (10 | 6 | 0) und C (8 | 7 | 7) bestimmen eine Ebene  $\varepsilon$ .  
Zeigen Sie, dass die Gerade durch die Punkte R (0 | 2 | 9,5) und T (5 | 4 | 6) nicht in  $\varepsilon$  liegt.
- 36.** Eine Ebene  $\varepsilon$  wird durch die Punkte A (-2 | 1 | 3), B (5 | 1 | -4) und C (1 | 0 | -3) gegeben.  
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von  $\varepsilon$  mit den Koordinatenachsen.
- 37.** Gegeben sind die Punkte P (2 | 1 | 1); Q (3 | 2 | 2); R (2 | 7 | -2) und S (4 | 5 | -2).  
a) Geben Sie eine Parametergleichung für die Ebene  $\varepsilon$  durch die Punkte P, Q und R an.  
b) Untersuchen Sie die Lage der Geraden g durch O und S zur Ebene  $\varepsilon$ .  
c) Geben Sie eine Gleichung einer zu  $\varepsilon$  parallelen Ebene  $\varepsilon_1$  durch den Punkt S an.  
d) Geben Sie eine Gleichung einer auf  $\varepsilon$  senkrecht stehenden Ebene  $\varepsilon_2$  durch den Punkt S an.  
e) Begründen Sie, dass die Ebene  $\varepsilon^*$ : 
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$
 die Ebene  $\varepsilon$  schneidet  
f) Berechnen Sie den Schnittwinkel von  $\varepsilon$  und  $\varepsilon^*$ .
- 38.** Durch die Gleichung  $(t+1)x + y + (t-1)z + t + 3 = 0$  ist für jedes  $t \in \mathbb{R}$  eine Ebene  $E_t$  gegeben.  
a) Weisen Sie nach, dass für jedes t die Gerade  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$  in der Ebene  $E_t$  liegt!  
b) Welche Bedingungen müssen die Parameter  $t_1$  und  $t_2$  erfüllen, damit die Ebenen  $E_{t_1}$  und  $E_{t_2}$  aufeinander senkrecht stehen?
- 39.** Die Punkte A (9 | -4 | 7), B (9 | 2 | 1) und C (3 | 8 | 1) bestimmen eine Ebene  $\varepsilon$ .  
Berechnen Sie den Abstand des Punktes P(-1 | -2 | 3) von der Ebene  $\varepsilon$ .
- 40.** Gegeben sind die drei Punkte A (14 | 10 | 7), B (8 | 16 | 3) und C (-1 | 2 | 5).  
Zeigen Sie, dass A, B und C die Eckpunkte eines Dreiecks sind.  
Das Dreieck ABC ist senkrecht auf die x-y-Ebene und auf die y-z-Ebene zu projizieren.  
Berechnen Sie die Koordinaten der Eckpunkte der projizierten Dreiecke A'B'C' bzw. A''B''C''.

41. Die Punkte  $B(6 | 6 | 0)$  und  $B'(-2 | 8 | 2)$  liegen spiegelbildlich bezüglich der Ebene  $\varepsilon$ .  
Gesucht sind
- eine Gleichung für  $\varepsilon$
  - eine Gleichung für die Gerade  $g$ , die durch  $P(5 | 1 | 1)$  und senkrecht zu  $\varepsilon$  verläuft
  - die Koordinaten des von  $P$  auf die Ebene  $\varepsilon$  gefällten Lotes
  - eine Gleichung für die Ebene  $\varepsilon_1$ , die parallel zu  $\varepsilon$  und durch  $P$  verläuft
  - die Schnittpunkte der Ebene  $\varepsilon$  mit den Koordinatenachsen.
42. Ein Würfel  $ABCDEFGH$  besitzt die Eckpunkte  $A(0 | 0 | 0)$ ,  $C(1 | 1 | 0)$ ,  $E(1 | 0 | 1)$  und  $G(0 | 1 | 1)$ .
- Zeichnen Sie den Würfel.
  - Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte  $B$ ,  $D$ ,  $F$ ,  $H$ .
  - Wo durchstößt die Gerade  $g_{DE}$  die Ebene  $\varepsilon_{ACG}$ ?  
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes.
43. Gegeben sind die 5 Punkte  $A(1 | 0 | 0)$ ,  $B(13 | 4 | -6)$ ,  $C(15 | 7 | 0)$ ,  $D(3 | 3 | 6)$  und  $S(11 | -2,5 | 2)$ .
- Zeigen Sie: Die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  bilden ein Rechteck.
  - Weisen Sie nach:  $S$  liegt nicht in der Ebene, in der das Rechteck  $ABCD$  liegt.
  - Prüfen Sie, ob die durch die 5 Punkte gebildete Pyramide  $ABCDS$  gerade ist.
  - Berechnen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide  $ABCDS$ .
44. Welche besondere Lage im kartesischen Koordinatensystem hat jeweils die Ebene  $\varepsilon$ ?
- $\varepsilon: x = 5$
  - $\varepsilon: z = 0$
  - $\varepsilon: x + y = 2$
  - $\varepsilon: x + y + z = 3$
45. Eine Pyramide  $ABCDS$  besitzt die Grundfläche  $ABCD$  mit  $A(2 | 0 | 1)$ ,  $B(4 | -6 | 10)$ ,  $C(-2 | 1 | 16)$ ,  $D(-4 | 7 | 7)$  und die Spitze  $S(9 | 6,5 | 10,5)$ .  
Ein ebener Schnitt verläuft parallel zur Grundfläche  $ABCD$  und zertrennt die Pyramide  $ABCDS$  auf halber Höhe. Es entstehen zwei Teilkörper  $K_1$  und  $K_2$ .
- Geben Sie eine Gleichung für die Schnittebene an.
  - Bestimmen Sie das Verhältnis der Volumina  $V_1:V_2$  der beiden Teilkörper  $K_1$  und  $K_2$ .
46. Die Gerade  $g$  verläuft durch die Punkte  $P(3 | 4 | 9)$  und  $Q(5 | 7 | 16)$ .
- Ermitteln Sie eine Gleichung für die Ebene  $\varepsilon$ , die durch den Punkt  $A(1 | -2 | 3)$  und senkrecht zur Geraden  $g$  verläuft.
  - Berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene  $\varepsilon$ .
47. Gegeben sind die Punkte  $A(0 | 2 | 3)$ ,  $B(1 | -2 | 6)$  und  $C(-4 | 2 | 15)$ .  
Diese drei Punkte bestimmen die Ebene  $\varepsilon$ .
- Die Ebene  $\varepsilon$  schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten  $S_x$ ,  $S_y$  und  $S_z$ .  
 $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  und der Koordinatenursprung  $O$  sind die Eckpunkte einer Pyramide.  
Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.
  - Der Punkt  $M(6 | 5 | 5)$  ist der Mittelpunkt eines kugelförmigen Luftballons. Bis zu welchem Radius  $r$  kann man diesen Luftballon höchstens aufblasen, bis er die Ebene  $\varepsilon$  berührt?  
Geben Sie auch die Koordinaten des Punktes  $T$  an, in dem der Luftballon dann die Ebene  $\varepsilon$  berührt.

## Aufgaben zum Kreis

- 48.** Stellen Sie eine Koordinatengleichung des Kreises  $k$  um den Mittelpunkt  $M$  mit dem Radius  $r$  auf!

a)  $M(0|0)$ ;  $r=3$     b)  $M(2|1)$ ;  $r=4$     c)  $M(-2|1)$ ;  $r=2$     d)  $M(-2|-1)$ ;  $r=1$

- 49.** Gegeben ist die Gleichung eines Kreises  $k$  mit  $(x-7)^2 + (y+3)^2 = 25$

- a) Geben Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises an!  
b) Prüfen Sie rechnerisch, ob die Punkte  $P_1(4 \mid 2)$ ,  $P_2(1 \mid 0)$ ,  $P_3(6 \mid 1)$  im Inneren des Kreises, auf dem Kreis oder außerhalb des Kreises liegen.

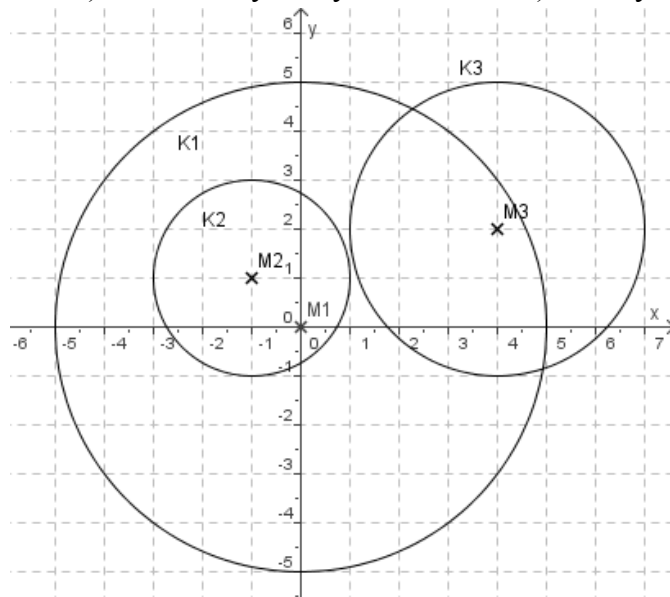
- 50.** Ordnen Sie den Kreisen in der Abbildung die richtige Kreisgleichung zu!

a)  $x^2 + y^2 = 5$

b)  $x^2 - 8x + y^2 - 4y + 11 = 0$

c)  $x^2 + 2x + y^2 - 2y - 2 = 0$

d)  $x^2 + y^2 = 25$



- 51.** Gegeben ist ein Kreis  $k$  mit  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$ . Der Punkt  $P(7 | 4)$  liegt auf  $k$ .

- Geben Sie den Mittelpunkt  $M$  und den Radius  $r$  des Kreises  $k$  an.
- Bestimmen Sie die vektorielle Gleichung der Strecke  $\overline{MP}$ .
- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an  $k$  im Punkt  $P$ .

- 52.** Prüfen Sie, ob die Gerade  $g$  eine Sekante, Tangente oder Passante des Kreises  $k$  ist. Bestimmen Sie gegebenenfalls gemeinsame Punkte.

a) K:  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$       g:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

b) K:  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$       g:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$

c) K:  $\left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right]^2 = 5$       g:  $y = \frac{1}{2}x + 1$

53. Wie ist der Radius des Kreises  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M(-4 | 5)$  zu wählen, damit die Gerade  $g: y = \frac{5}{7}x - \frac{3}{7}$  Sekante, Tangente oder Passante von  $k$  ist?

### Exemplarisches

54. Welche der folgenden Gleichungen beschreiben die gleichen Kreise?

a)  $k_1: \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^2 = 9$

b)  $k_2: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

c)  $k_3: \left| \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 3$

d)  $k_4: x^2 - 4x + y^2 - 6y + 4 = 0$

e)  $k_5: (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$

f)  $k_6: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 25 = 0$

g)  $k_7: \left| \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 5$

h)  $k_8: x^2 - 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$

i)  $k_9: (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$

### 3.4 Stochastik

#### Planungsvorschlag

##### Vorbemerkungen:

Der Vorschlag setzt voraus, dass die Ziele und Inhalte zur Stochastik in den Klassen 5 bis 9 dem Rahmenplan entsprechend realisiert wurden. In der Klasse 10 sollten die Schüler im Zusammenhang mit der Behandlung der Binomialverteilung mit Betrachtungs- und Schlussweisen der beurteilenden Statistik anhand von exemplarischen Beispielen bereits vertraut gemacht worden sein.

Std.	Inhalte / Schwerpunkte	Bemerkungen
<b>6</b>	<b>Rückblick</b>	Wiederholung Klasse 7 bis 9
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Auswertung von statistischen Erhebungen und Zufallsexperimenten mit Kenngrößen der beschreibenden Statistik (Mittelwert, Zentralwert, Spannweite, Standardabweichung)</li> <li>– Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit kombinatorischen Hilfsmitteln, mit Baumdiagrammen und aus Vierfeldertafeln,</li> <li>– Zufallsgrößen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung (Erwartungswert, Standardabweichung)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– reale Daten nutzen</li> <li>– Vergleich Mittelwert und Zentralwert</li> <li>– Darstellung von Daten und Berechnungen mit CAS</li> <li>– Verwenden der Produktregel und des Binomialkoeffizienten (Ziehen auf einen Griff)</li> </ul>
<b>4</b>	<b>Die Binomialverteilung</b>	Wiederholung aus Klasse 10
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Bernoulli-Vorgänge und -ketten</li> <li>– Kenngrößen der Binomialverteilung (Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung)</li> <li>– Bestimmung von binomialen und summierten Wahrscheinlichkeiten unter Nutzung von Formeln, Tafeln und CAS</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Bevorzugter Einsatz des CAS</li> <li>– Lösen praktisch relevanter Aufgaben, reale Daten können genutzt werden</li> </ul>
<b>10</b>	<b>Elemente der beurteilenden Statistik</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Hypothese als Aussage über unbekannten Zustand</li> <li>– Signifikante Abweichung vom Erwartungswert, Irrtumswahrscheinlichkeit (Signifikanzniveau)</li> <li>– Schluss von einer Stichprobe auf die Grundgesamtheit, Probleme der Stichprobenziehung</li> <li>– Überprüfen einer Hypothese zu einer Erfolgswahrscheinlichkeiten durch einen einseitigen Signifikanztest, Annahme- und Ablehnungsbereich, Interpretieren des Testergebnisses und des möglichen Fehlers 1. Art</li> <li>– exemplarische Beispiele zu Betrachtungsweisen bei 2 Hypothesen (Nullhypothese und Alternativhypothese), Interpretieren des Testergebnisses und der möglichen Fehler 1. und 2. Art</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Wiederholung aus Klasse 10</li> <li>– s. Hinweise</li> </ul>

## Hinweise zu ausgewählten Problemen

### Zu den Begriffen *signifikant*, *Signifikanzniveau* und *Irrtumswahrscheinlichkeit*

Die Bewertung von Ereignissen mit kleiner Wahrscheinlichkeit ist die Grundlage für die Bewertung von Behauptungen oder Vermutungen (Hypothesen) über eine unbekannte Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ . Solche Vermutungen kann man in bestimmten Fällen durch Experimente mit Bernoulli-Ketten der Länge  $n$  untersuchen. Wenn bei einem solchen Experiment eine sehr große Abweichung vom Erwartungswert  $E = n \cdot p$  festgestellt wird, spricht man von einer **signifikanten** (nicht mehr zufälligen) Abweichung vom Erwartungswert, bzw. von einem **signifikanten** Ergebnis. Zur Beurteilung der Größe der Abweichung vom Erwartungswert wird die Summe der Wahrscheinlichkeiten für das ermittelte Ergebnis und alle weiteren noch weiter abweichenden Ergebnisse berechnet, unter der Voraussetzung, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit den vermuteten Wert hat. Die Grenze für diese summierte Wahrscheinlichkeit, ab der man von einer signifikanten Abweichung spricht, wird als **Signifikanzniveau**  $\alpha$  bezeichnet. Bei Qualitätskontrollen wird oft als Signifikanzniveau der Wert  $\alpha = 0,05$  verwendet, bei der Entwicklung neuer Medikamente wählt man meist  $\alpha = 0,01$ .

Der Begriff **Irrtumswahrscheinlichkeit** wird in zwei Bedeutungen verwendet. Zum einen wird er synonym zum Begriff Signifikanzniveau gebraucht und auch mit  $\alpha$  bezeichnet. Zum anderen ist damit der Wert der summierten Wahrscheinlichkeiten gemeint, der kleiner oder in Ausnahmefällen auch gleich dem Signifikanzniveau  $\alpha$  ist. Dieser Wert wird bei einem Signifikanztest als **Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art** bezeichnet.

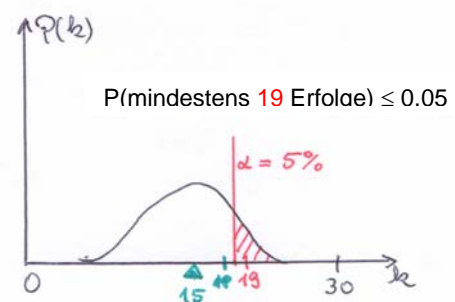
Die Schüler müssen beide Sachverhalte unterscheiden können, da sie bei der Ermittlung des Ablehnungsbereiches bei einem Signifikanztest die einzelnen Wahrscheinlichkeiten solange zu summieren haben, bis die Summe kleiner oder gleich  $\alpha$  ist. Der dabei ermittelte Wert der summierten Wahrscheinlichkeiten ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art. Um diesen Unterschied auch begrifflich verdeutlichen zu können, schlagen wir vor, den Begriff Irrtumswahrscheinlichkeit vor allem für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art zu verwenden.

### Zur Planung eines Signifikanztestes zur Überprüfung einer angenommenen Erfolgswahrscheinlichkeit

Um einen solchen Test zu planen, müssen folgende Fragen beantwortet bzw. Festlegungen getroffen werden.

- (1) Lässt sich zu der Vermutung ein *Bernoulli-Vorgang* mit einer entsprechenden *Erfolgswahrscheinlichkeit*  $p$  finden, der unter gleichen Bedingungen wiederholt werden kann?
- (2) Welche Länge  $n$  soll die Bernoulli-Kette haben? Wie groß ist der Erwartungswert?
- (3) Welches Signifikanzniveau  $\alpha$  soll ausgehend vom Sachverhalt verwendet werden?
- (4) Liegt der Bereich zur Ablehnung der Vermutung rechts oder links vom Erwartungswert?
- (5) Zwischen welchen beiden Anzahlen liegt die Grenze zwischen einer signifikanten und einer nicht signifikanten Abweichung?

Es ist stets sinnvoll, eine Skizze anzufertigen. Auf den Achsen ist keine Einteilung erforderlich. Es reicht, nur die im nebenstehenden Beispiel angegebenen Werte zu markieren. Diese Werte sollten in der Reihenfolge ihrer Ermittlung eingetragen werden, zuerst  $n$  und  $E$  dann an einem senkrechten Strich  $\alpha$  und schließlich die beiden  $k$ -Werte. Die markierte Fläche entspricht der Irrtumswahrscheinlichkeit.



## Generelle Probleme eines Signifikanztestes

Mit einem Signifikanztest auf der Grundlage einer Binomialverteilung sollen Aussagen über eine *unbekannte* Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  gewonnen werden.

Die Hypothesen  $H_0$  (Nullhypothese) und  $H_1$  (Alternativhypothese) sind in der Praxis nicht gleichwertig. Als Nullhypothese (kein signifikanter Unterschied zur Vermutung, zur Behauptung bzw. zum bisherigen Erkenntnisstand) wird die vermutete Erfolgswahrscheinlichkeit, der bisherige Stand der Erkenntnis, die bisherige Erfolgswahrscheinlichkeit, eine Behauptung eines Herstellers u. ä. bezeichnet. Die Alternativhypothese beinhaltet die Behauptung einer anderen Erfolgswahrscheinlichkeit, die Zweifel eines Kunden, die zu überprüfenden neuen Forschungsergebnisse, u. ä. Daraus ergeben sich inhaltliche Betrachtungen zu den Fehlern 1. und 2. Art.

Mit einem Signifikanztest kann nicht die Richtigkeit der Nullhypothese bewiesen werden, sondern man kann lediglich zeigen, dass die Daten nicht gegen die Nullhypothese sprechen. Tritt keine signifikante Abweichung auf, so kann man nur feststellen, dass die Versuchsergebnisse *nicht gegen die Vermutung* sprechen, d. h. die Vermutung kann auf Grundlage dieser Ergebnisse *nicht abgelehnt* werden. Deshalb sollte auch nicht von der Annahme der Nullhypothese sondern von der *Nichtablehnung* der Nullhypothese gesprochen werden. Die Wahrscheinlichkeiten für die Fehler 1. und 2. Art erlauben keine Aussagen über die Wahrscheinlichkeit der beiden Hypothesen. Den Hypothesen wird keine Wahrscheinlichkeit zuerkannt. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art ist die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese fälschlicherweise abzulehnen unter der Voraussetzung, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit tatsächlich den vermuteten Wert hat.

## Ziele für Klasse 12

### Sicheres Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler

- kennen den Unterschied von Grundgesamtheit und Stichprobe,
- wissen, dass bei der Auswahl einer Stichprobe, darauf geachtet werden muss, dass diese möglichst repräsentativ für die Grundgesamtheit ist,
- wissen, dass es in vielen Fällen nicht möglich ist, eine repräsentative Stichprobe zu ziehen und man in diesen Fällen die Bedingungen in der ausgewählten Stichprobe möglichst genau erfassen muss,
- wissen, dass es vom Sachverhalt abhängt, wie groß der Stichprobenumfang sein kann,
- wissen, dass man von einer Stichprobe auf eine Gesamtheit schließen und dabei Fehler machen kann,
- wissen, dass zur Vermeidung von Fehlern der Stichprobenumfang  $n$  möglichst groß sein sollte,
- wissen, dass bei einem Signifikanztest aus den Ergebnissen einer Untersuchung in einer Stichprobe begründete Schlussfolgerungen über die angenommene Erfolgswahrscheinlichkeit in der Gesamtheit gezogen werden können,
- kennen die Bezeichnungen „Annahmebereich“ und „Ablehnungsbereich“,
- wissen, dass bei einem Testergebnis, das im Annahmebereich liegt, die Hypothese nicht abgelehnt werden kann, d.h. dass das Ergebnis *nicht gegen* die angenommene Erfolgswahrscheinlichkeit spricht,
- wissen, dass das Ergebnis aus einer Stichprobe *gegen* die angenommene Erfolgswahrscheinlichkeit spricht, wenn die Wahrscheinlichkeit für größere Abweichungen vom Erwartungswert geringer als das Signifikanzniveau ist,

- dass die Größe des Signifikanzniveaus vom Sachverhalt abhängt,
- wissen, dass der Begriff „Irrtumswahrscheinlichkeit“ manchmal als Synonym für „Signifikanzniveau“ und manchmal als Synonym für „Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art“ benutzt wird.

Die Schülerinnen und Schüler können

- zu einer gegebenen Testsituationen die damit überprüften zufälligen Vorgänge, ihre möglichen Ergebnisse und die sie beeinflussenden Bedingungen angeben,
- den Zusammenhang zwischen den Begriffen „Signifikanzniveau“ und „signifikante Abweichung vom Erwartungswert“ an Beispielen erläutern,
- Annahme- und Ablehnungsbereiche oder eine Entscheidungsregel formulieren, wenn dafür notwendige Werte gegeben sind,
- können an Beispielen erläutern, welche Konsequenzen sich bei einem Signifikanztest aus einem Fehler 1. Art für die beteiligten Personen ergeben,
- können beurteilen, ob Formulierungen zum Fehler 1. Art zutreffend sind,
- können zu einer gegebenen Testsituation die Fehler 1. und 2. Art inhaltlich beschreiben und Konsequenzen angeben, die ein solcher Fehler nach sich ziehen könnte.

### Reaktivierbares Wissen und Können

Die Schülerinnen und Schüler können

- die Anzahl der Erfolge bestimmen, so dass die Summe der Einzelwahrscheinlichkeit kleiner als ein vorgegebenes Signifikanzniveau  $\alpha$  ist, wenn  $n$ ,  $p$  und  $\alpha$  gegeben sind,
- die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art in konkreten Anwendungssituationen angeben, wenn eine Entscheidungsregel bekannt ist,
- einen einseitigen Signifikanztest zu einer unbekannten Erfolgswahrscheinlichkeit planen, wenn  $n$ ,  $p$  und  $\alpha$  gegeben sind und dazu eine Entscheidungsregel angeben.

### Exemplarisches

Die Schülerinnen und Schüler haben an einprägsamen Beispielen grundlegende Probleme stochastischer Schlussweisen kennen gelernt und folgende Einsichten mithilfe der Binomialverteilung gewonnen:

- Mit einem Signifikanztest kann auch untersucht werden, ob ein neues Produkt oder ein neues Vorgehen zu signifikant besseren Ergebnissen führt. Dazu wird eine Nullhypothese  $H_0$  und eine Alternativhypothese  $H_1$  über eine unbekannte Wahrscheinlichkeit aufgestellt. Als Nullhypothese wird meist der bisherige Stand der Erkenntnis und als Alternativhypothese die vermutete Verbesserung angenommen
- Bei wachsendem Umfang der Stichprobe liegt der Annahmebereich prozentual immer dichter am Erwartungswert, d. h. bei großen Stichprobenumfängen führen bereits kleine prozentuale Abweichung zu einem signifikanten Ergebnis.
- Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art ist nur zu berechnen, wenn neben der unbekannten Erfolgswahrscheinlichkeit  $p_0$  eine alternative Wahrscheinlichkeit  $p_1$  gegeben ist bzw. angenommen wird.
- Wenn man bei einem Test den Ablehnungsbereich so verändert, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art kleiner wird, vergrößert sich die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.
- Wenn man bei einem Sachverhalt die Hypothese „genau  $p_0$  trifft zu“ testen will, führt man einen zweiseitigen Signifikanztest durch, bei dem das Signifikanzniveau je zur Hälfte auf zwei Ablehnungsbereiche aufgeteilt wird.



## Aufgaben

### Sicheres Wissen und Können

1. Es sollen folgende Testsituationen betrachtet werden.
  - A: Auf einem im Hafen angekommenen Frachtschiff aus Übersee wird die Qualität der eingeführten Bananen geprüft.
  - B: In einer Konservenfabrik werden Dosen auf eine Mindesteinwaage überprüft.
  - C: Ein Hersteller von PKW will bei einer neuen Fahrzeugserie die Sicherheit der Insassen in einem Crashtest testen lassen.
  - D: Eine Mathematiklehrerin will in einer mündlichen Abiturprüfung das mathematische Wissen und Können eines Schülers prüfen.
  - E: Ein Fußballtrainer will die Trefferwahrscheinlichkeit seiner Spieler beim Torwandschießen überprüfen.
  - a) Geben Sie für die Situationen A bis E jeweils eine Grundgesamtheit und eine mögliche Stichprobe an.
  - b) Diskutieren Sie für die Situationen A bis E, wie groß eine Stichprobe sein könnte und was man bei der Auswahl einer repräsentativen Stichprobe beachten müsste.
  - c) Geben Sie für die Situationen A bis E jeweils an, was es bedeutet, von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit zu schließen und welche Fehler man dabei machen könnte.
2. Geben Sie eine Testsituation an, bei der man aufgrund der Bedingungen nur eine sehr kleine Stichprobe ziehen kann.
3. Im Folgenden ist jeweils ein Einzelvorgang beschrieben. Nennen Sie ein Merkmal mit zwei Ausprägungen, das bei diesem Vorgang untersucht werden könnte. Geben Sie eine mögliche Menge von  $n$  Vorgängen an, die als Bernoullikette der Länge  $n$  bzw. als Stichprobe für einen Test angesehen werden könnte. Nennen Sie jeweils zwei Bedingungen, die dabei konstant bleiben müssen.
  - a) In einer Apfelplantage reift ein Apfel an einem Baum.
  - b) In einer Bäckerei wird ein Brötchen gebacken.
  - c) In einer Getränkefabrik wird eine Flasche automatisch gefüllt.
  - d) Ein Schüler liegt mit einer Grippe im Bett und bekommt ein Antibiotikum.
  - e) Ein Fahrschüler lernt bei einem Fahrlehrer Auto fahren.
4. In folgenden Fällen ist es nicht möglich, für einen Signifikanztest aus der Grundgesamtheit aller Deutschen durch eine Zufallsauswahl eine Stichprobe zu ziehen, weil die untersuchten Menschen gewisse Voraussetzungen erfüllen müssen. In diesen Fällen müssen zwei Stichproben gebildet werden, in denen die Menschen sich in einem bestimmten Merkmal unterscheiden, während die anderen Merkmale möglichst konstant gehalten werden.
  - a) Geben Sie an, welche Voraussetzungen die untersuchten Menschen in den folgenden Situationen erfüllen müssen.
  - b) Nennen Sie jeweils das wesentliche Merkmal, durch das sich die Menschen in den beiden Stichproben unterscheiden müssen.
  - c) Nennen Sie jeweils andere Merkmale, die in den Stichproben konstant gehalten werden müssen.
    - A: Ein pharmazeutisches Unternehmen will ein neues Medikament zur Heilung einer bestimmten Krankheit testen.
    - B: Ein Forscherteam möchte eine neue Methode zur Behandlung der Bruchrechnung erproben.
    - C: Ein Zahnarzt will nachweisen, dass zum Ziehen eines Zahnes eine Hypnose des Patienten besser geeignet ist als eine örtliche Betäubung.

5. Bei der Produktion von Glühlampen dürfen höchstens 10 % einer bestimmten Sorte eine Brenndauer von weniger als 1500 Stunden haben. Der laufenden Produktion werden in einer Firma 100 Glühlampen entnommen. In einem Langzeittest wird ihre Brenndauer geprüft. Man weiß, dass bei einer angenommenen Erfolgswahrscheinlichkeit von 10 % die Wahrscheinlichkeit, dass 16 oder mehr Glühlampen weniger als 1500 Stunden brennen, kleiner als 5 % ist.

Beschreiben Sie anhand dieses Beispiels den Zusammenhang zwischen den Begriffen „Signifikanzniveau“ und „signifikante Abweichung vom Erwartungswert“.

6. Eine Firma beziffert ihren Ausschussanteil auf höchstens 5 %. Ein Abnehmer, der diese Waren verkaufen will, prüft 20 Artikel.
- Wie viele Ausschussartikel kann der Abnehmer in seiner Stichprobe erwarten?
  - Der Abnehmer hat in seiner Stichprobe keinen Ausschuss gefunden. Welche der folgenden Schlussfolgerungen kann er aus diesem Resultat ziehen?  
 A: Die Firma produziert keinen Ausschuss.  
 B: Die Firma hat ihren Ausschussanteil richtig beziffert.  
 C: Das Resultat der Stichprobe spricht nicht gegen die Angabe der Firma.

7. Nadine ärgert sich, weil sie beim Lernen von Englischvokabeln am kommenden Tag immer nur etwa die Hälfte der Vokabeln behalten hat. Eine Freundin erklärt ihr eine neue Lernmethode, die Nadine bei der nächsten Lektion sofort anwendet. Beide Mädchen sehen die neue Methode als besser an, weil Nadine durch sie am nächsten Tag von 20 Vokabeln noch 12 richtig wiedergeben kann. Diskutieren Sie die Schlussweise der Mädchen mithilfe der angegebenen Werte aus der Tabelle einer summierten Binomialverteilung.

k	Summe der Wahrscheinlichkeiten von 0 bis k für $n = 20$ und $p = 0,5$
11	0,74828
12	0,86841
13	0,94234
14	0,97931

8. Eine Arzneimittelfirma bietet zur Behandlung einer bestimmten Tierkrankheit ein Präparat an, das angeblich bei mindestens 70 % der behandelten Tiere zur Heilung führt. Bei einer Überprüfung werden von 20 behandelten Tieren nur 10 geheilt. Lässt sich daraus auf einem Signifikanzniveau von 5 % ein Widerspruch gegen die Behauptung der Firma herleiten? Begründen Sie dies unter Verwendung der angegebenen Werte aus der Tabelle einer summierten Binomialverteilung.

k	Summe der Wahrscheinlichkeiten von 0 bis k für $n = 20$ und $p = 0,7$
10	0,04796
11	0,11333
12	0,22773
13	0,39199

9. Will man testen, ob ein neues Produkt besser als ein herkömmliches ist, muss man neben dem Stichprobenumfang auch ein Signifikanzniveau  $\alpha$  festlegen. Es hat sich eingebürgert, für  $\alpha$  die Werte 1 % oder 5 % zu verwenden.

Die Wirksamkeit der folgenden neuen Produkte soll gegen herkömmliche getestet werden. Diskutieren Sie, warum es sinnvoll ist, von den folgenden Paaren jeweils eins auf dem Signifikanzniveau von 1 % und das andere auf dem 5 % - Niveau zu testen.

- Vitaminpräparat - Gripeschutzimpfstoff
- Navigationsgerät - Energiesparlampe
- Kopfschmerztablette - Methode zum Erlernen einer Fremdsprache.

10. Ein Sportlehrer behauptet, er könne beim Anlauf eines Schülers schon vier Meter vor dem Erreichen des Absprungbalkens in mindestens 90 % aller Fälle voraussagen, ob der Schüler übertritt oder nicht. Die Hypothese des Sportlehrers wollen die Schüler bei einem Sportfest bei 50 Sprüngen testen. Als Ablehnungsbereich wird der Bereich  $\{0; 1; \dots; 39; 40\}$  festgelegt. Formulieren Sie eine entsprechende Entscheidungsregel.
11. Bei der Produktion von Farbmonitoren sollen nach den Qualitätsstandards einer Firma höchstens 5 % aller ausgelieferten Farbmonitore Fehler haben. Zur Überprüfung der Hypothese  $H_0: p \leq 0,05$  zieht ein Kontrolleur aus der Tagesproduktion des Betriebes eine Zufallsstichprobe von 20 Farbmonitoren. Der Ablehnungsbereich für die Hypothese  $H_0$  ist  $\{2; 3; 4, \dots; 20\}$ . Geben Sie jeweils eine mögliche Konsequenz für den Betrieb an, wenn der Kontrolleur im Ergebnis seiner Kontrolle folgende Anzahl fehlerhafte Monitore findet.
- einen fehlerhaften Farbmonitor
  - 3 fehlerhafte Farbmonitore.
12. Eine Firma, die mit elektronischen Bauteilen handelt, hat den Verdacht, dass die Ausfallquote eines bestimmten Bauteils höher als die vom Hersteller angegebene Wahrscheinlichkeit von höchstens 1 % ist. In einem Test wird dieser Verdacht überprüft. Dazu werden 100 Teile untersucht. Der Ablehnungsbereich für die Hypothese  $H_0: p \leq 0,01$  ist auf dem Signifikanzniveau von 5 % die Menge  $\{4; 5; \dots; 100\}$ . Es stellt sich heraus, dass in der Stichprobe 4 defekte Bauteile sind. Die Handelsfirma lehnt nach diesem Testergebnis die Annahme der Sendung ab und schickt sie wieder an den Hersteller zurück. Sie bemüht sich, einen neuen Lieferanten für das Produkt zu finden.
- Formulieren Sie den möglichen Fehler bei dieser Entscheidung
  - Geben Sie je eine Konsequenz für die Herstellerfirma und für den Handelsfirma an, die sich bei einer Fehlentscheidung ergibt.
13. Es wird ein Signifikanztest zur Hypothese  $H_0$  auf dem Signifikanzniveau von  $\alpha = 5\%$  durchgeführt. Welche der folgenden Aussagen sind bei dem jeweiligen Testergebnis zutreffend?
- Das Testergebnis liegt im Annahmebereich.
    - Die Hypothese  $H_0$  ist richtig.
    - Die Hypothese  $H_0$  ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % richtig.
    - Die Hypothese  $H_0$  kann aufgrund des Testergebnisses nicht abgelehnt werden.
    - Die Wahrscheinlichkeit, dass  $H_0$  falsch ist, beträgt 5 %.
    - Wenn  $H_0$  richtig ist, handelt es bei dem Testergebnis um eine nicht signifikante Abweichung vom erwarteten Ergebnis.
    - Wenn  $H_0$  richtig ist und wenn es möglich wäre, den Test unter den gleichen Bedingungen mehrfach zu wiederholen, so liegt das Ergebnis bei etwa 95 % der Tests ebenfalls im Annahmebereich.
  - Das Testergebnis liegt im Ablehnungsbereich.
    - Die Hypothese  $H_0$  ist falsch.
    - Die Hypothese  $H_0$  ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % falsch.
    - Die Hypothese  $H_0$  muss aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden.
    - Die Wahrscheinlichkeit, dass  $H_0$  richtig ist, beträgt nur 5 %.
    - Wenn  $H_0$  richtig wäre, würde es sich bei dem Testergebnis um eine signifikante Abweichung vom erwarteten Ergebnis handeln.
    - Wenn  $H_0$  richtig ist und wenn es möglich wäre, den Test unter den gleichen Bedingungen mehrfach zu wiederholen, so liegt das Ergebnis bei etwa 5 % der Tests ebenfalls im Ablehnungsbereich.

14. Es sollen folgende Testsituationen betrachtet werden.

- A: Ein Pilzsammler möchte überprüfen, ob ein gefundener Pilz giftig ist. Er stellt vor der weiteren Untersuchung die These auf „Der Pilz ist giftig.“
  - B: Eine Firma möchte die Qualität eines ihrer Produkte verbessern. Dazu sind erhebliche Investitionen nötig, die mit einer Erhöhung des Preises verbunden sind. Um das erwartete Käuferverhalten zu testen, befragt die Firma 1000 ihrer Kunden, ob sie eine Preiserhöhung bei wesentlich verbesserter Qualität akzeptieren würden. Für den Test wird folgende Hypothese aufgestellt: „Die Verbraucher akzeptieren keine Preiserhöhung.“
  - C: Ein junges Forscherteam hat mit erheblichen Projektmitteln einen neuen Impfstoff für eine gefährliche Tierseuche entwickelt, der den bisher verwendeten Impfstoff ablösen soll. Für einen Test wird die Hypothese aufgestellt: „Der neue Impfstoff ist nicht besser als der bisherige.“
- a) Geben Sie eine Konsequenz für das Handeln der Firmen bzw. Personen bei einer Ablehnung der Hypothese an.
  - b) Geben Sie eine Konsequenz für das Handeln der Firmen bzw. Personen bei einer Nichtablehnung der Hypothese an.
  - c) Geben Sie an, was es jeweils bedeutet, bei der Entscheidung einen Fehler 1. Art (Ablehnung einer richtigen Hypothese) zu machen.
  - d) Nennen Sie jeweils eine mögliche Folge für die Firmen bzw. Personen, die sich aus einem Fehler 1. Art ergeben.
  - e) Geben Sie an, was es jeweils bedeutet, bei der Entscheidung einen Fehler 2. Art (Nichtablehnung einer falschen Hypothese) zu machen.
  - f) Nennen Sie jeweils eine mögliche Folge für die Firmen bzw. Personen, die sich aus einem Fehler 2. Art ergeben.

### Reaktivierbares Wissen und Können

15. Eine Arzneimittelfirma bietet zur Behandlung einer bestimmten Tierkrankheit ein Präparat an, das bei mindestens 70 % der behandelten Tiere zur Heilung führen soll. In einer Untersuchung werden 100 erkrankte Tiere, die mit dem Präparat behandelt werden, beobachtet. Für welche Anzahlen von Tieren, die bei der Behandlung nicht geheilt werden, kann man die Angabe der Firma auf einem Signifikanzniveau von 5 % ablehnen?
16. Der Mathematiklehrer Ypsilon behauptet, dass höchstens 30 % der Schüler der Abiturstufe die Quadratzahlen von 11 bis 19 auswendig kennen. Seine Kollegen halten diese Zahl für zu gering. Bei einem Test soll die Behauptung des Mathematiklehrers abgelehnt werden, falls von 50 zufällig ausgewählten Schülern der Abiturstufe mindestens 20 das Quadrat von 17 auf Anhieb angeben können.
- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesem Test die Behauptung von Herrn Ypsilon fälschlicherweise abgelehnt wird?
  - b) Wie müsste der Ablehnungsbereich verändert werden, wenn das Signifikanzniveau 5 % betragen soll?
17. Der Hersteller von Glühlampen muss garantieren, dass höchstens 3 % einer bestimmten Sorte von Glühlampen eine Brenndauer von weniger als 1500 Stunden haben. Der laufenden Produktion werden 100 Glühlampen entnommen. Planen Sie einen Signifikanztest, mit dessen Hilfe die Firma die Einhaltung der Norm auf einem Signifikanzniveau von 5 % überprüfen kann.

18. Die Englischlehrerin Frau Zimmermann schätzt ihren Schüler Karl als sehr schwach ein. Karl beteuert lautstark, dass er die neuen Vokabeln zu Hause gut gelernt und beim Üben immer mehr 80 % der Vokabeln gewusst hat.
- Die Behauptung von Karl soll mit einem Test aus 20 Vokabeln überprüft werden. Stellen Sie einen Testplan auf.
  - Diskutieren Sie die möglichen Fehlentscheidungen und ihre Konsequenzen für Karl und die Lehrerin Frau Zimmermann.
19. Eine Weinkellerei lädt 200 Kunden zu einer Weinprobe ein. Erfahrungsgemäß kommt es mit 60 % der Anwesenden zu Verkaufsabschlüssen. Einem Verkäufer gelingt es, 130 Kunden zu neuen Abschlüssen zu überreden. Weitere Kunden sind noch unschlüssig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Erfolg auf das Geschick des Verkäufers zurückzuführen ist und nicht auf zufällige Einflüsse?
20. In einer Schule mit 450 Schülern können sich die Schüler in den großen Pausen in der Schulkantine an Automaten selbst mit Getränken oder Snacks bedienen oder bei einer Verkäuferin Baguetten oder warme Mahlzeiten kaufen. Erfahrungsgemäß schaffen es in einer großen Pause 90 Schüler, etwas aus den Automaten zu kaufen, wovon 80 % ein Getränk wählen. Von den 50 Schülern, die sich von der Verkäuferin etwas zu essen holen, nehmen  $\frac{2}{5}$  ein Baguette. Es wird davon ausgegangen, dass ein Schüler in der Pause nur einen Kauf vornimmt
- Stellen Sie die Angaben in einem Baumdiagramm mit allen Wahrscheinlichkeiten dar.
  - Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein beliebiger Schüler dieser Schule in der großen Pause ein Getränk aus dem Automaten kauft.
  - Welchen wöchentlichen Gewinn kann der Betreiber der Automaten durch den Getränkeverkauf erwarten, wenn er zwei große Pausen an 5 Schultagen zugrunde legt und davon ausgegangen werden kann, dass der Betreiber durch den Verkauf eines Getränkes 0,15 € Gewinn hat.
- Die Schulmensa bietet zur Mittagszeit regelmäßig zwei Wahllessen an, ein Fischgericht und ein Fleischgericht. Das Fischgericht wird in der Regel von etwa 20 % der Essensteilnehmer gewählt.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der von 100 Essenteilnehmern folgende Anzahlen das Fischgericht wählen  
(1) genau 18 (2) mindestens 10 (3) höchstens 20 (4) zwischen 16 und 22.
  - Unter wie vielen Essenteilnehmern ist mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einer dabei, der das Fischgericht wählt?
  - Der Küchenchef hat die Anweisung erhalten, stets so viele Portionen von jedem Gericht zuzubereiten, dass er der Nachfrage nach diesem Gericht mit einer Sicherheit von mindestens 90 % entsprechen kann. Wie viele Portionen des Fischgerichtes und des Fleischgerichtes muss er bereithalten, wenn er mit 250 Essenteilnehmern rechnet?
  - Ein Schüler kommt an einem Tag als einer der letzten zum Essen und muss feststellen, dass es kein Fischgericht mehr gibt. Er beschwert sich beim Küchenchef und verlangt, dass er in Zukunft mit 99 % Sicherheit stets beide Gerichte zur Auswahl hat. Wie viele Essensportionen würden an jedem Tag übrig bleiben, wenn der Küchenchef sich auf diese Forderung einlassen würde?

### Exemplarisches

21. Eine Firma, die Kugelschreiber herstellt, muss garantieren, dass mindestens 95 % ihrer Produktion fehlerfreie Schreibgeräte sind. Ein neuer Mitarbeiter in der Abteilung für Qualitätskontrolle ist der Meinung, dass ein Eingriff in den Produktionsablauf nur erfolgen

muss, wenn in einer Stichprobe, die der laufenden Produktion entnommen wird, weniger als 90 % fehlerfreie Schreibgeräte sind.

Diskutiere die Ansicht des Mitarbeiters für die folgenden Stichprobenumfänge:

A: 10 Kugelschreiber                      B: 100 Kugelschreiber                      C: 1000 Kugelschreiber

Bestimme dazu für jeden Stichprobenumfang

- a) die Größe des Fehlers 1. Art
- b) die maximal mögliche prozentuale Abweichung vom Erwartungswert bei einem Signifikanzniveau von 5 %.

- 22.** Aufgrund langjähriger Erfahrungen weiß man, dass die bisher verwendete Therapiemethode zur Heilung einer bestimmten Krankheit nur eine Erfolgsquote von 50 % hat. Ein Forscherteam hat eine neue Methode entwickelt und vermutet nach ersten Erprobungen, dass die Erfolgsquote ihrer Methode weit höher liegt. Zur Versuchsplanung überlegen sie, dass die Anwendung der Methode bei einem erkrankten Patienten als Bernoulli-Vorgang aufgefasst werden kann. Als Wahrscheinlichkeit für den Erfolg „Der Patient wird geheilt“ wählen sie die bisherige Heilungsquote von 50 %. Es sollen 30 Patienten, die alle an der Krankheit leiden, behandelt werden. Die Forscher wählen als Signifikanzniveau  $\alpha = 1\%$ .

- a) Formulieren Sie eine Nullhypothese und eine Alternativhypothese für die Erprobung des neuen Medikamentes.
- b) Stellen Sie einen Versuchsplan zur Überprüfung der Vermutung der Forscher auf.
- c) Diskutieren Sie die Folgen möglicher Fehlentscheidungen.

- 23.** Bei Kacheln für Kamine wird es im allgemeinen akzeptiert, wenn bis zu 10 % der Kacheln kleinere farbliche Abweichungen aufweisen.

Ein Ofensetzer will dies bei einer Lieferung von Kacheln überprüfen und öffnet dazu einen zufällig ausgewählten Karton mit 25 Kacheln. Wenn unter diesen 25 Kacheln bei vier oder mehr Kacheln farbliche Abweichungen auftreten, will er die Lieferung ablehnen. Die Nullhypothese  $H_0$  bei diesem Test des Ofensetzers soll lauten, dass der tatsächliche Anteil fehlerhafter Kacheln höchstens 10 % beträgt.

- a) Geben Sie die Alternativhypothese  $H_1$ , den Ablehnungsbereich für  $H_0$  und die Entscheidungen an, die der Ofensetzer nach Beendigung des Testes treffen kann.
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art und erläutern Sie, was eine solche Fehlentscheidung für den Ofensetzer und für den Hersteller der Kacheln bedeutet.
- c) Geben Sie an, worin eine Fehler 2. Art bei diesem Test besteht und welche Konsequenzen sich bei einer solchen Fehlentscheidung für den Ofensetzer und für den Hersteller der Kacheln ergeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn der wahre Anteil fehlerhafter Kacheln in der Lieferung 15 %, 20 %, 25 % oder 30 % beträgt.
- d) Vergleichen Sie die Bedeutung eines Fehlers 1. Art und eines Fehlers 2. Art für den Hersteller der Kacheln sowie für den Ofensetzer.
- e) Wie müsste der Ablehnungsbereich des Testes verändert werden, damit das Risiko für den Hersteller, dass eine einwandfreie Sendung irrtümlich durch den Ofensetzer abgelehnt wird, kleiner als 5 % ist? Geben Sie für diesen veränderten Test die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn der tatsächliche Anteil fehlerhafter Kacheln 15 %, 20 %, 25 % oder 30 % beträgt. Was würde dies für den Ofensetzer bedeuten?
- f) Wie müsste der Ablehnungsbereich des Testes verändert werden, damit das Risiko für den Ofensetzer kleiner wird, irrtümlich eine Sendung anzunehmen, bei der der Anteil fehlerhafter Kacheln größer als 10 % ist. Berechnen Sie für den so veränderten Ablehnungsbereich die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. sowie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn der tatsächliche Anteil fehlerhafter Kacheln 15 %, 20 %, 25 % oder 30 % beträgt. Was würde dies für den Hersteller bedeuten?