Grundkurs 2001 | Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

Auf einem ebenen Berghang sollen in den Geländepunkten

$A(10 \mid 15 \mid 5)$, $B(-20 \mid 30 \mid 20)$ und $C(-5 \mid 0 \mid 5)$

zur Horizontalebene senkrechte Masten mit einer Länge von jeweils 10 m errichtet werden. Entsprechend ihrem Standort werden sie mit a, b und c bezeichnet.
Die Lage der Geländepunkte ist in einem kartesischen Koordinatensystem gegeben, in dem eine Einheit einem Meter entspricht und die xy-Ebene die Lage der Horizontalebene beschreibt.

a) Zeigen Sie, dass der Standort des Mastes b in gleicher Entfernung von den Standorten der Masten a und c gewählt wurde.
Stellen Sie eine Parametergleichung der Ebene auf, die die Lage des Berghanges beschreibt.

b) Ermitteln Sie jeweils die Koordinaten der Punkte A', B' und C', die die Lage der Spitzen der Masten a, b und c kennzeichnen.
[Teilergebnis zur Kontrolle: $A'(10 \mid 15 \mid 15)$]

An der Spitze des Mastes b soll ein Befestigungsseil angebracht werden, dessen Richtung durch den Vektor $\vec{v}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.
Stellen Sie eine Gleichung der Geraden auf, die die Lage des Befestigungsseiles am Mast b beschreibt und berechnen Sie die Koordinaten des Verankerungspunktes des Seiles in der Hangebene.

c) Die Befestigungsseile an den Masten a und c sollen senkrecht zum Hang verlaufen. In den Bauunterlagen gibt es zu deren Richtung jedoch unterschiedliche Angaben:
$\vec{v}_a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Prüfen Sie, ob diese Vektoren die geforderte Richtung angeben.

Grundkurs 2001 | Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0 \mid 0)$, $B(8 \mid 4)$, $C(6 \mid 8)$ und $D(-2 \mid 4)$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass die Punkte A, B, C und D Eckpunkte eines Rechtecks sind.

b) Die Punkte A, B , C und D liegen auf einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M und eine Gleichung dieses Kreises.
[Mögliches Teilergebnis zur Kontrolle: $k\colon\ x^2+y^2-6x-8y = 0$]

Im Punkt C ist an den Kreis k die Tangente t zu legen.
Geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an.

c) Die Gerade durch die Punkte B und D sowie die Tangente t (aus Aufgabe b)) schneiden einander im Punkt E.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes E.

Die Punkte E, C und M (aus Aufgabe b)) seien die Eckpunkte eines Dreiecks.
Berechnen Sie das Gradmaß der Innenwinkel und den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Leistungskurs 2001 | Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt P (1|9|5) sowie

die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in R,$

gegeben.

a) Die Gerade g und der Punkt P bestimmen eine Ebene.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene E.

Berechnen Sie das Gradmaß des Neigungswinkels der Ebene E zur xy-Ebene.

Die Gerade g beschreibt in dem zu betrachtenden Bereich den Verlauf eines Bahngleises, auf dem Schüttgut für eine Industrieanlage angeliefert wird und von hier auf geradlinig verlaufenden Förderbändern zum Bunker im Punkt P befördert werden soll. Der Anstiegswinkel der Förderbänder (Winkel zur Horizontalebene) darf dabei nicht mehr als 50° betragen.
Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 10 m. Die xy-Ebene sei die Horizontalebene.

b) Als Trassen für die Förderbänder sind die Strecken $\overline{A_1P}$ und $\overline{A_2P}$ vorgesehen, wobei die Punkte $A_1(-4 \mid y_1 \mid z_1)$ und $A_2(4 \mid y_2 \mid z_2)$ auf der Geraden g liegen.
Weisen Sie nach, dass diese Strecken die gleiche Länge sowie den gleichen Anstieg besitzen und ermitteln Sie das Gradmaß des Anstiegswinkels.

Berechnen Sie die Länge der kürzesten Strecke zwischen dem Gleis und dem Punkt P und prüfen Sie, ob auch diese Strecke als Trasse für die Förderbänder geeignet ist.

Leistungskurs 2001 | Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Geraden

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4+4a \\ 4+3a \\ 3+3a \end{pmatrix}, \qquad t, a \in R.$$

a) Stellen Sie für die Geraden $g_{-\frac{4}{3}}$ und g_{-1} jeweils eine Gleichung auf und beschreiben Sie die gegenseitige Lage dieser beiden Geraden.

b) Der Punkt P (4|5|3) werde durch senkrechte Parallelprojektion in jede der Ebenen des Koordinatensystems projiziert.
Hierbei sei P’ das Bild des Punktes P in der yz-Ebene und P” das Bild in der xz-Ebene.
Geben Sie die Koordinaten der Punkte von P’ und P” an.

Die Punkte P, P’ und P” bestimmen eine Ebene E_1.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.

c) Zeigen Sie, dass die Geraden $g_{-\frac{4}{3}}$ und g_{-1} senkrecht aufeinander stehen.

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der von diesen beiden Geraden aufgespannten Ebene E_2 und zeigen Sie, dass alle Geraden g_a in dieser Ebene liegen.
Die Ebene E_2 schneidet die Ebene E_1 (aus Aufgabe b)).
Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden beider Ebenen und berechnen Sie das Gradmaß des Schnittwinkels beider Ebenen.

d) Zeigen Sie, dass jede Gerade mit einer Gleichung der Form $\vec{x} = \vec{x}_0 + r \cdot \vec{v}$

beschrieben werden kann durch eine Gleichung der Form $\vec{v} \times (\vec{x} - \vec{x}_o) = \vec{0}$.

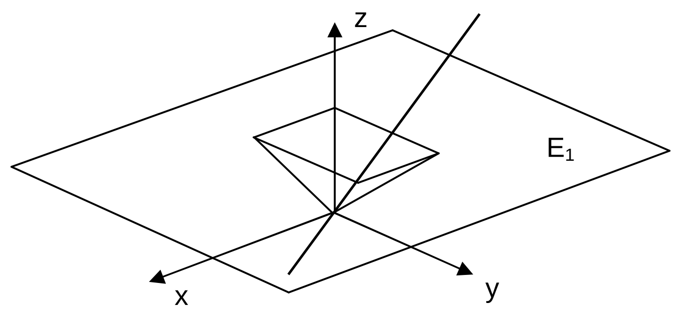
Durch die Gleichung $\begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x-4 \\ y-5 \\ z-3 \end{pmatrix} = \vec{0}$ wird eine der Geraden g_a beschrieben.

Ermitteln Sie den Wert des Parameters a dieser Geraden.

Auf dieser Geraden liegt der Ursprung des Koordinatensystems.

Durch diese Gerade wird eine Ebene senkrecht zur yz-Ebene des Koordinatensystems gelegt. Diese Ebene begrenzt zusammen mit den Ebenen E_1 und E_2 sowie zwei der Koordinatenebenen eine Pyramide vollständig.

Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens dieser Pyramide.



Skizze nicht maßstäblich)

Grundkurs 2002 (13k)

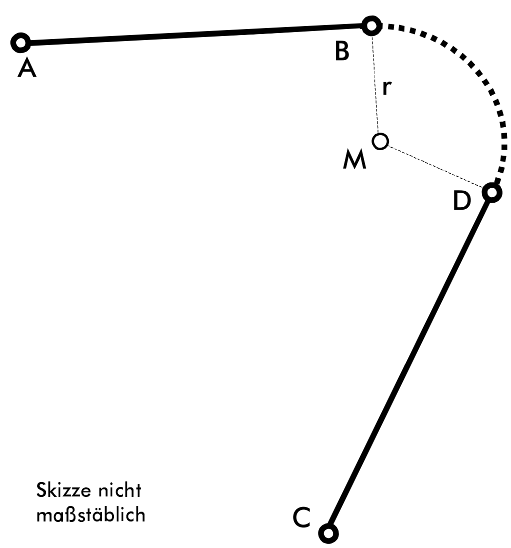
Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

_

Vom Punkt A(0 | 0 | -1) zum Punkt B(5 | 11 | -3) sowie vom Punkt C(5 | 32 | 0) zum Punkt D(15 | 12 | -10) ist jeweils ein geradliniger Stollen in einen Berg getrieben. Die Lage dieser Punkte wird in einem kartesischem Koordinatensystem beschrieben, dabei entspricht eine Einheit 10 Meter.

a) Die Punkte A, B, C und D liegen in einer Ebene.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.

Die Punkte B und D sollen durch einen Stollen verbunden werden, der die Form eines Kreisbogens besitzt. Dieser Kreisbogen sei Teil eines Kreises, den die Gerade AB im Punkt B und den die Gerade DC im Punkt D berührt. (Siehe nebenstehende Skizze.)



b) Weisen Sie nach, dass der Punkt M(10 | 8 | -7) Mittelpunkt dieses Kreises ist.

Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels $\angle$ BMD.

Berechnen Sie die Länge des gesamten Stollens (einschließlich der Verbindung) vom Punkt A bis zum Punkt C.

Grundkurs 2002 (13k) Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind gegeben

die Geraden g_1: $y = \frac{1}{2}x - 3$,

g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in R$, und der Punkt A(8|-2).

a) Stellen Sie eine parameterfreie Gleichung der Geraden g_2 auf.

Begründen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 einander schneiden, ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S sowie das Gradmaß ihres Schnittwinkels.

b) Ein Kreis k, dessen Radius die Maßzahl r = 3 besitzt, verläuft durch die Punkte A und S.

Begründen Sie, dass es genau einen derartigen Kreis gibt und ermitteln Sie eine Gleichung dieses Kreises.

[Teilergebnis zur Kontrolle: $(x - 5)^2 + (y - y_M)^2 = 9$]

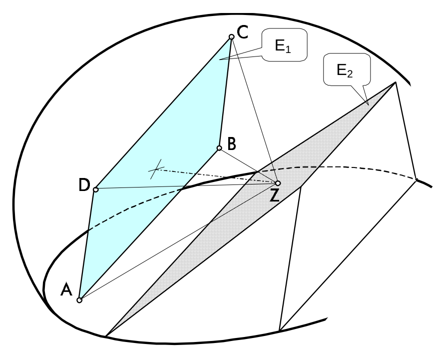
Auf dem Kreis k liegen zwei Punkte B und C, die gemeinsam mit den Punkten A und S die Eckpunkte eines Quadrates bilden.
Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes dieses Quadrates.

Berechnen Sie den Abstand des Mittelpunktes des Kreises k von der Geraden g_2.

Leistungskurs 2002 (13k) Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

Für die Bauplanung eines Panoramakinos wird für bestimmte Objekte eine analytische Beschreibung in einem kartesischen Koordinatensystem vorgenommen. Eine Einheit entspricht dabei einem Meter. Die xy- Ebene charakterisiert die Lage der (horizontalen) Grundfläche des Zuschauerraumes.

In den kugelförmigen Teil des Zuschauerraumes soll eine ebene Projektionsfläche eingebaut werden, deren Eckpunkte die Punkte der Kugel
A(-8 |-10 | 0), B(-8 | 10 | 0),
C(-4 | 10 | 12) und D(-4 |-10 | 12) sind.
Die Lage dieser Projektionsfläche wird durch die Ebene E_1 beschrieben.
Die Lage der Zuschauertribüne wird durch die Ebene E_2 mit der Gleichung x – z + 2 = 0 beschrieben.



Skizze nicht maßstäblich

a) Zeigen Sie, dass die Projektionsfläche die Form eines Rechtecks besitzt und berechnen Sie deren Flächeninhalt.
Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_1 auf.
Berechnen Sie das Gradmaß des Neigungswinkels der Projektionsfläche zur (horizontalen) Grundfläche des Zuschauerraumes.

b) Eine Gerade g verlaufe durch den Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks ABCD und senkrecht zur Rechteckfläche. Sie durchstoße die Ebene E_2 im Punkt Z. Der Punkt Z beschreibe die Lage des Projektionszentrums bei Filmvorführungen.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Z.

c) Der kugelförmige Bereich des Zuschauerraumes wird durch einen Teil einer Kugel mit der Maßzahl des Radius $r = 6\sqrt{5}$ beschrieben, deren Mittelpunkt auf der Geraden g (aus Aufgabe b)) liegt.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Kugel.
[Teilergebnis zur Kontrolle: M(0 | 0 | 4)]
Bei Filmvorführungen soll die Projektion entweder auf die ebene Projektionsfläche ABCD oder auf die dahinter liegende kugelförmige Fläche erfolgen. Für die optische Ausstattung ist der maximale Abstand von hinter der ebenen Projektionsfläche liegenden Kugelpunkten zu dieser ebenen Fläche zu berücksichtigen.
Berechnen Sie diesen maximalen Abstand.

Leistungskurs 2002(13k) Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind gegeben

die Punkte $P(3 \mid 0 \mid 6\sqrt{2})$ und $G(0 \mid 0 \mid 9\sqrt{2})$

sowie die Gerade g_1: $\vec{x} = \overrightarrow{OQ} + k\,\vec{v}$, $k \in R$ mit $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Die Punkte P und G legen eine Gerade g_2 fest.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden.

Weisen Sie die windschiefe Lage der Geraden g_1 und g_2 nach und berechnen Sie das Gradmaß des Winkels unter dem diese Geraden zueinander verlaufen.

b) Das gemeinsame Lot der Geraden g_1 und g_2 verläuft durch den Punkt P.
Zeigen Sie, dass dieses Lot auch durch den Punkt Q verläuft und berechnen Sie den Abstand der Geraden g_1 und g_2.

Grundkurs 2002 (13n) Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind

die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

sowie der Punkt A(1 | 2 | 3) gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ rechtwinklig zueinander liegen.

Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte B und D, für die gilt:
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{a}$ bzw. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \vec{b}$.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C, so dass ein Rechteck ABCD entsteht.

b) Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, unter dem die Rechteckseite $\overline{AB}$ (siehe Aufgabe a)) zur xy-Ebene verläuft.

Prüfen Sie, ob die Strecke $\overline{AB}$ die xy-Ebene durchstößt.

c) Durch Rotation des Rechteckes ABCD (siehe Aufgabe a)) um die Symmetrieachse, die senkrecht zur Seite $\overline{AB}$ verläuft, entsteht ein gerader Kreiszylinder.

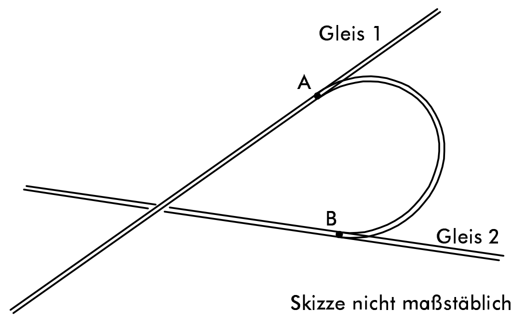
Berechnen Sie von diesem Zylinder die Maßzahl der Körperhöhe sowie von der Grund- und Deckfläche die Koordinaten der Mittelpunkte und die Maßzahl des Radius.

Bei dieser Rotation gibt es eine parallele Lage des Rechteckes zur yz-Ebene.

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der dann das Rechteck liegt.

Grundkurs 2002 (13n) — Aufgabe 2.2, Analytische Geometrie

Zwei geradlinige, einander kreuzende Gleise sollen zwischen den Punkten A und B durch ein kreisförmig verlaufendes Gleis verbunden werden (siehe Skizze).
Die zu betrachtende Problematik wird in einem kartesischen Koordinatensystem der Ebene mit dem Ursprungspunkt O beschrieben. Eine Einheit entspricht 10 m. Die Lage der Gleise wird durch jeweils einen Teilbereich der Geraden g_1 und g_2



bzw. einen Bogen des Kreises k charakterisiert. (Die Geraden g_1 und g_2 müssen Tangenten des Kreises k sein.)
Gegeben sind

g_1: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t, s \in R$,

A(8 | 6), B(8 | -6).

a) Berechnen Sie das Gradmaß des kleineren Winkels, unter dem die beiden Gleise einander kreuzen, und zeigen Sie, dass dieser Winkel und der Winkel $\angle AOB$ kongruent sind.

b) Ermitteln Sie eine parameterfreie Gleichung der Geraden g_1 in Normalform und eine Gleichung der zu dieser Geraden senkrechten Geraden $\overline{g}_1$ durch den Punkt A.

Begründen Sie, dass die Mittelpunkte von Kreisen, für die die Geraden g_1 und g_2 Tangenten sind, auf der x-Achse liegen.

Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises k und die Länge des Kurvenradius des Verbindungsgleises.

In den Schnittpunkten der Geraden $\overline{g}_1$ mit dem Kreis k sollen Signalgeber installiert werden.

Geben Sie eine Gleichung des Kreises k an und ermitteln Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte.

Leistungskurs 2002 (13n) — Aufgabe 2.1, Analytische Geometrie

Ein geologisch untersuchtes Gebiet wird in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 5 Meter im Gelände.
Nach Bohrungen in einem ebenen, der Horizontalebene entsprechenden Gelände, dessen Lage durch die xy-Ebene beschrieben wird, stößt man in folgenden Punkten auf ein Braunkohleflöz:

A(0 | 0 | -2), B(-30 | 0 | -4), C(-30 | 60 | -8), D(0 | 60 | -6), E(-10 | 5 | -3).

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C, D und E in einer Ebene liegen, und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an. Diese Ebene sei mit K bezeichnet.

Es wird angenommen, dass durch die Ebene K die obere Begrenzung eines Kohleflözes beschrieben werden kann.
Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels unter dem das Kohleflöz zur Horizontalebene verläuft.

b) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B, C und D Eckpunkte eines Parallelogramms sind, und weisen Sie nach, dass der Punkt E im Inneren dieses Parallelogramms liegt.

Dieses Parallelogramm kennzeichnet die obere Begrenzung eines zu erschließenden Kohleflözes, von dem zunächst der darüber liegende Abraum parallel zur Horizontalebene bis zur Tiefe des Punktes A abgetragen werden soll.
Berechnen Sie das Volumen dieses Abraumes. (Dabei ist das Abraumvolumen für praktisch erforderliche Böschungen nicht zu berücksichtigen.)

c) Auf einer Höhenlinie der Ebene K liegen Punkte mit gleicher Höhe. Durch den Punkt A sei die Höhenlinie a bestimmt.
Ermitteln Sie die Koordinaten eines vom Punkt A verschiedenen Punktes der Höhenlinie a und stellen Sie eine Gleichung dieser Höhenlinie auf.

Auf der durch das Parallelogramm ABCD gekennzeichneten Begrenzungsfläche des Kohleflözes sollen senkrecht zu den Höhenlinien Rohre verlegt werden.
Berechnen Sie die Koordinaten eines Vektors der die Richtung der Rohrverlegung beschreibt.

Leistungskurs 2002 (13n) — Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind gegeben die Ebenen
E_1: $3x + 4y - 5z - 13 = 0$, E_2: $7x + y + 5z - 47 = 0$, die Gerade

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $r \in R$, sowie der Punkt A(-2|1|-5).

a) Zeigen Sie, dass durch den Punkt A und die Gerade g eine Ebene E_3 festgelegt wird und ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.
[Ergebnis zur Kontrolle: E_3: $7x + y - 5z - 12 = 0$]

b) Berechnen Sie das Gradmaß des Schnittwinkels der Ebenen E_2 und E_3.

c) Weisen Sie nach, dass die Normalenvektoren der Ebenen E_1, E_2 und E_3 linear unabhängig voneinander sind; schlussfolgern Sie, in welcher der nachfolgenden Abbildungen die Lage dieser Ebenen zueinander charakterisiert wird (*keine maßstäbliche Darstellung*).

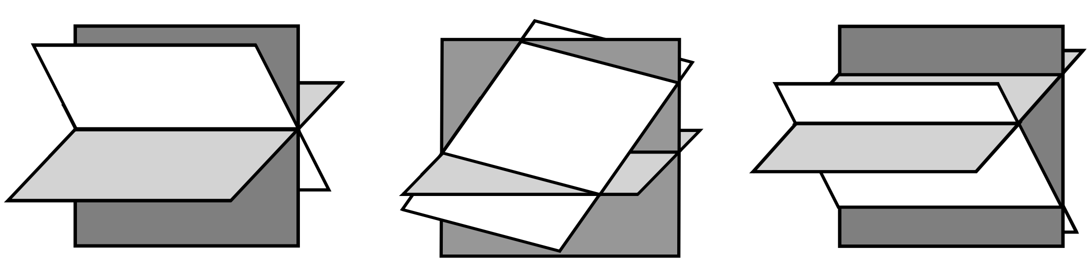


Abbildung 1 *Abbildung 2* *Abbildung 3*

Ermitteln Sie den Durchschnitt der drei Ebenen E_1, E_2 und E_3.

d) Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen E_2 und E_3.
Zeigen Sie, dass es genau eine Ebene gibt, die mit der Ebene E_2 und E_3 die Schnittgerade gemein hat und parallel zur xy-Ebene liegt; geben Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene an.

Zeigen Sie, dass es keine Ebene gibt, die mit der Ebene E_2 und E_3 die Schnittgerade gemeinsam hat und parallel zur xz-Ebene liegt.

Grundkurs 2003(13k) | Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

Das Dach eines Ausstellungspavillons hat die Form einer dreiseitigen Pyramide mit den Eckpunkten
A(16 | –13 | 4), B(8 | 11 | 4),
C(0 | –5 | 2) und D(6 | –3 | 12).
Eine Einheit im kartesischen Koordinatensystem entspricht einem Meter.
Die x-y-Ebene beschreibt die Horizontalebene, in der die Grundfläche des Pavillons liegt.

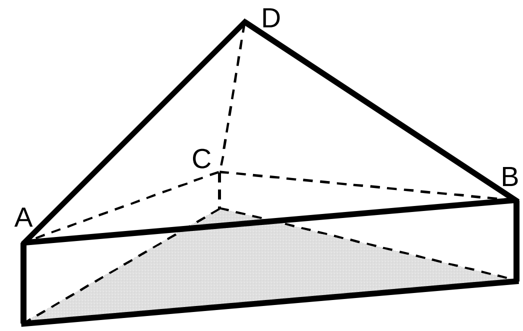


Abbildung nicht maßstäblich

a) An den Dachkanten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sollen Dachrinnen befestigt werden.

Berechnen Sie die Gesamtlänge der Dachrinnen.

Begründen Sie, dass genau zwei dieser Dachrinnen zur Horizontalebene unter dem gleichen Winkel geneigt sind und berechnen Sie das Gradmaß dieses Neigungswinkels.

An einem im Punkt D befestigten Seil soll an dessen Ende im Punkt L ein Beleuchtungskörper aufgehängt werden. Die Lage des Seiles werde durch die Strecke $\overline{DL}$ charakterisiert.

b) Begründen Sie, dass die Strecke $\overline{DL}$ auf der Geraden g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt.

c) Die Punkte A, B und C bestimmen eine Ebene E.

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.

[mögliches Ergebnis zur Kontrolle: E: $3x + y - 20z + 45 = 0$]

Der Punkt L sei der Durchstoßpunkt der Geraden g (siehe Aufgabe b) durch die Ebene E.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes L und ermitteln Sie die Länge des Seiles.

Grundkurs 2003 (13k) | Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

Gegeben seien die Punkte A(–7 | 12 | 18), B(3 | –8 | 8), C(–7 | 6 | 0) und D(–1 | 0 | 12) .
Die Punkte A, B und C seien die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks ABC.

a) Zeigen Sie, dass die Strecke $\overline{AB}$ Basis des gleichschenkligen Dreieckes ABC ist. Berechnen Sie das Gradmaß des der Basis gegenüberliegenden Winkels.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke $\overline{BC}$.
Eine Gerade g verlaufe vom Punkt D durch den Punkt M.
Berechnen Sie die Koordinaten jenes Punktes S, in welchem die Gerade g und die durch die Punkte A und C gelegte Gerade einander schneiden.

c) Weisen Sie nach, dass der Punkt D auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt und ermitteln Sie das Streckenverhältnis der durch den Punkt D gebildeten Teilstrecken.

Leistungskurs 2003 (13k)

Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

Das Dach eines Ausstellungspavillons hat die Form einer dreiseitigen Pyramide mit den Eckpunkten

A(16 | –13 | 4), B(8 | 11 | 4),
C(0 | –5 | 2) und D(6 | –3 | 12).

Eine Einheit im kartesischen Koordinatensystem entspricht einem Meter.
Die x-y-Ebene beschreibt die Horizontalebene, in der die Grundfläche des Pavillons liegt.

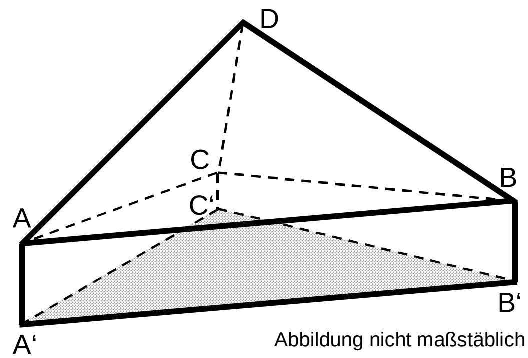


Abbildung nicht maßstäblich

a) Die Punkte A, B und D bestimmen eine Ebene E.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.

Berechnen Sie das Gradmaß des Neigungswinkels der Dachfläche ABD zur Grundfläche.

b) Zeigen Sie, dass zwei Dachflächen zueinander symmetrisch bezüglich der Ebene F mit der Gleichung $x - 3y - 15 = 0$ liegen.

Berechnen Sie den Inhalt der gesamten Dachfläche.

An einem im Punkt D befestigten, 5 Meter langen Seil soll an dessen Ende im Punkt L ein Beleuchtungskörper aufgehängt werden.

c) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes L und berechnen Sie den Abstand dieses Punktes von der Dachfläche ABD.

d) Die Grundfläche des Pavillons hat die Form eines Dreiecks mit den Eckpunkten A', B' und C'.
Diese Punkte können als Fußpunkte der Lote von den Punkten A, B und C auf die x-y-Ebene betrachtet werden; der Punkt D' sei Fußpunkt des Lotes vom Punkt D auf die x-y-Ebene.

Weisen Sie nach, dass der Punkt D' auf der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{A'B'}$ des Dreiecks $A'B'C'$ liegt.

Aus technischen Gründen interessiert, ob der Punkt D' Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreiecks $A'B'C'$ ist.

Untersuchen Sie diesen Sachverhalt.

Leistungskurs 2003 (13k) | Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

Gegeben seien in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte

A(–5 | –4 | 44), B(4 | –4 | 47), C(4 | 1 | 52), D(–5 | 4 | 52) und S(4 | 16 | 32).

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C nicht auf ein und derselben Geraden liegen und ermitteln Sie eine Gleichung der durch diese Punkte aufgespannten Ebene E.

b) Weisen Sie nach, dass die Punkte A, B, C und D ein Sehnenviereck ABCD bilden.

Beleuchtet man die Punkte A, B, C und D aus einer im Punkt S befindlichen punktförmigen Lichtquelle, so entstehen in der x-y-Ebene Schattenbilder.

c) Ermitteln Sie das Gradmaß des Schnittwinkels der Ebene E mit der x-y-Ebene.

Geben Sie eine begründete Vermutung an, ob das entstehende Schattenbild des Umkreises des Sehnenviereckes ABCD ein Kreis sein kann.

d) Die gegebenen fünf Punkte seien die Eckpunkte einer Pyramide P_1 mit der Spitze S. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der Pyramide P_1.

Die Seitenkanten der Pyramide P_1 liegen auf den Seitenkanten einer Pyramide P_2 mit der Spitze S, die zur gegebenen Pyramide ähnlich ist.
Geben Sie die Gleichung jener Ebene $\overline{E}$ an, auf der die Pyramide P_2 stehen muss, wenn das Volumen der Pyramide P_2 das Achtfache des Volumens der Pyramide P_1 betragen soll.

Grundkurs 2003 (13n) | Aufgabe 2.2

Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Kreise

k_1: $(x + 5)^2 + (y - 7)^2 = 5$,
k_2: $(x - 4)^2 + (y - 10)^2 = 20$ gegeben.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t an den Kreis k_1 im Punkt $B_1(-3 \mid 6)$.

[Ergebnis zur Kontrolle: y = 2x +12]

Zeigen Sie, dass die Tangente t auch Tangente des Kreises k_2 ist und berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes B_2.

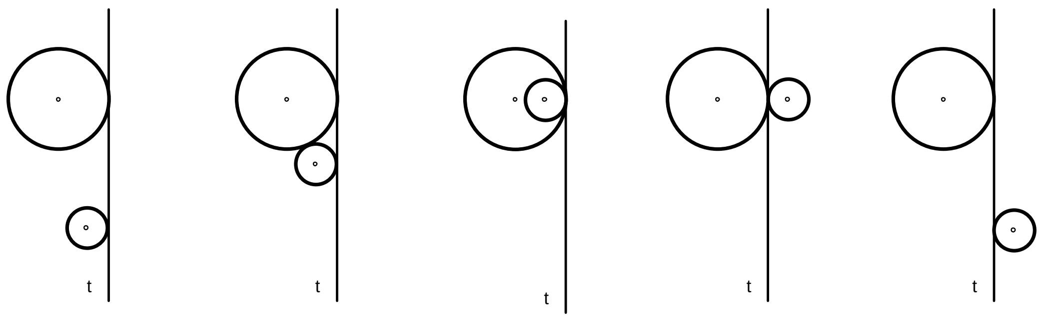
b) Ermitteln Sie von der Geraden g, die durch die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2 geht, eine Parametergleichung und eine Gleichung in der Form y = mx + n.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes und das Gradmaß des Schnittwinkels der Geraden g und t (siehe Aufgabe a).

c) Die Abbildung zeigt verschiedene Fälle von Lagebeziehungen zweier Kreise mit gemeinsamer Tangente.
Untersuchen Sie, welcher dieser Fälle für die gegebenen Kreise k_1 und k_2 zutrifft.

Die Lage des Kreises k_2 soll (bei gleich bleibendem Radius) so verändert werden, dass einer der übrigen Fälle der in der Abbildung gegebenen Lagebeziehungen zutrifft.

Wählen Sie dafür eine Lagebeziehung aus und ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises k_2 für diesen Fall.



Fall 1 Fall 2 Fall 3 Fall 4 Fall 5

Abbildung (nicht maßstäblich)

Grundkurs 2003 (13n) Aufgabe 2.2

Analytische Geometrie

Ein Flugzeug fliegt auf geradlinigem Kurs vom Punkt A(–50 | 31 | 4) in Richtung des Punktes B(–14 | 7 | 1). Die Beschreibung des geometrischen Sachverhaltes erfolgt in einem kartesischen Koordinatensystem; eine Einheit entspricht einem Kilometer. Die x-y-Ebene charakterisiert die Horizontalebene.

a) Ermitteln Sie einen Vektor, der die Flugrichtung beschreibt und berechnen Sie die Länge der Flugstrecke zwischen den Punkten A und B.

Der Flug muss aus Sicherheitsgründen oberhalb einer Ebene E mit der Gleichung $x - y + 20z + 11 = 0$ stattfinden.

Zeigen Sie, dass das Flugzeug oberhalb der Ebene E und in einem konstanten Abstand zu dieser Ebene fliegt.

Vom Punkt B aus erfolgt ein geradliniger Landeanflug in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, der die Kursänderung im Punkt B für den Landeanflug angibt.

Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, unter dem der Landeanflug zur Horizontalebene erfolgt.

Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, die den Landeanflug charakterisiert und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes L der Horizontalebene, in dem das Flugzeug aufsetzt.

Die Landebahn des Flughafens werde als Strecke betrachtet, deren Punkte wie folgt beschrieben sind: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ -\frac{15}{8} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in R, \quad 0 \leq t \leq 1.$

c) Zeigen Sie, dass das Flugzeug im ersten Viertel der Landebahn aufsetzt.

Leistungskurs 2003 (13n) | Aufgabe 2.2 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem seien die Punkte A (–1| 2 | 1,5), B (–1| –1| –2,5), C (4 | 3 | –0,5) und D (2 | –0,5 | –3) sowie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix}$, $m \in R$, gegeben.

a) Die Punkte A, B und C bestimmen eine Ebene E_1.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.

b) Die Gerade g liegt in einer Ebene E_2 mit der Gleichung
E_2: $2x + y - 2z - 9{,}5 = 0$.
Zeigen Sie, dass der Punkt D und die Gerade g die Ebene E_2 festlegen.

c) Die Ebenen E_1 und E_2 schneiden einander in einer Geraden s.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden s.

[mögliches Ergebnis zur Kontrolle: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$]

Ermitteln Sie die Koordinaten des Spurpunktes dieser Geraden in der x-y-Ebene des Koordinatensystems und berechnen Sie das Gradmaß ihres Neigungswinkels gegenüber dieser Ebene.

d) Die Gerade s sei Symmetrieachse eines geraden Kreiszylinders. Ebene Schnitte durch den Zylinder parallel zur Grundfläche desselben erzeugen Kreise um die Gerade s.

Zeigen Sie, dass die Punkte E(5 | 8 | 2) und G(5 | 5 | 5) Endpunkte eines Durchmessers eines solchen Kreises sind.

Der Kreis um die Gerade s, welcher die Punkte E und G enthält, ist Umkreis eines Quadrates mit den Eckpunkten E, F, G und H.

Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte F und H.

Grundkurs 2004 (13k) | Aufgabe 2.1 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte

A(3 | 5 | –10), B(93 | –55 | –30), C(3 | 8 | –19) und D (51 | –32 | –27) gegeben.

a) Die Punkte A und B bestimmen eine Gerade g; die Punkte C und D bestimmen eine Gerade h. Stellen Sie jeweils eine Gleichung für die Geraden g und h auf und weisen Sie nach, dass diese Geraden zueinander windschief liegen.

In einem Bergwerk wird der Verlauf zweier Stollen I und II im oben genannten kartesischen Koordinatensystem durch die Strecken $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ beschrieben. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 10 m.
Vom Punkt C des Stollens II aus soll ein neuer Stollen III parallel zum Stollen I gebaut werden.

b) Stellen Sie eine Gleichung der Geraden auf, die den Verlauf des Stollens III charakterisiert.

Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, unter dem die Stollen II und III zueinander verlaufen.

c) Im Punkt B trifft der Stollen I orthogonal auf eine nicht abbauwürdige Schicht. Die Grenzfläche dieser durch den Punkt B verlaufenden Schicht kann durch Punkte einer Ebene E beschrieben werden.

Stellen Sie eine Koordinatengleichung für diese Ebene E auf.

Der Stollen III würde im Punkt S auf diese nicht abbauwürdige Schicht treffen, soll aber 110 m vorher im Punkt P enden.

Weisen Sie nach, dass die Lage des Punktes S durch den Ortsvektor $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 93 \\ -52 \\ -39 \end{pmatrix}$

beschrieben wird und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P.

Grundkurs 2004 (13k)

Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem von einer Ebene E die Punkte

A(2 | 1 | 3), B(9 | 5 | 7) und C(–2 | –6 | 7).

a) Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E auf.

b) Ein Punkt D liege so in der Ebene E, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist. Prüfen Sie, ob dieses Parallelogramm ein Rhombus ist.

Berechnen Sie das Gradmaß des Innenwinkels $\angle ABC$ und die Maßzahl des Flächeninhalts des Parallelogramms ABCD.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes M der Diagonalen des Parallelogramms ABCD.

c) Das Parallelogramm ABCD soll die Grundfläche von zwei Pyramiden mit den Spitzen S_i (i = 1; 2) sein. Die Höhe dieser Pyramiden sei $h = |\overrightarrow{MS_i}| = \sqrt{41}$.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte S_i.

Berechnen Sie die Maßzahl des Gesamtvolumens beider Pyramiden.

Leistungskurs 2004 (13k)

Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte

A(3 | 5 | –10), B(93 | –55 | –30), C(3 | 8 | –19) und D (51 | –32 | –27)

gegeben.

Die Punkte A und B bestimmen eine Gerade g; die Punkte C und D bestimmen eine Gerade h. Stellen Sie jeweils eine Gleichung für die Geraden g und h auf und weisen Sie nach, dass diese Geraden zueinander windschief liegen.

Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels unter dem die Geraden g und h zueinander verlaufen. Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E auf, die die Gerade g enthält und parallel zur Geraden h verläuft.

[mögliches Ergebnis zur Kontrolle: $4x + 3y + 9z + 63 = 0$]

In einem Salzbergwerk wird der Verlauf zweier Stollen im oben genannten kartesischen Koordinatensystem durch die Strecken $\overline{AB}$ (Stollen I) und $\overline{CD}$ (Stollen II) beschrieben. Die als eben betrachtete Erdoberfläche werde durch die x-y-Ebene beschrieben. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 10 m.

a) Eine Studie besagt, dass die kürzeste Verbindung der Stollen dem Abstand der Geraden g und h entspricht.
Berechnen Sie die Länge dieser kürzesten Verbindung.

b) Oberhalb der Ebene E (siehe Aufgabe a) soll ein Gasspeicher mit einem Fassungsvermögen von 7000 m^3, der die Form einer Halbkugel mit dem Mittelpunkt A hat, angelegt werden.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Kugel, auf der diese Halbkugel liegt.

Eine senkrecht zur Erdoberfläche verlaufende Zuleitung soll im höchsten Punkt S des Gasspeichers einmünden.
Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punktes S und berechnen Sie das Gradmaß des Winkels unter dem die Zuleitung zur Ebene E verläuft.

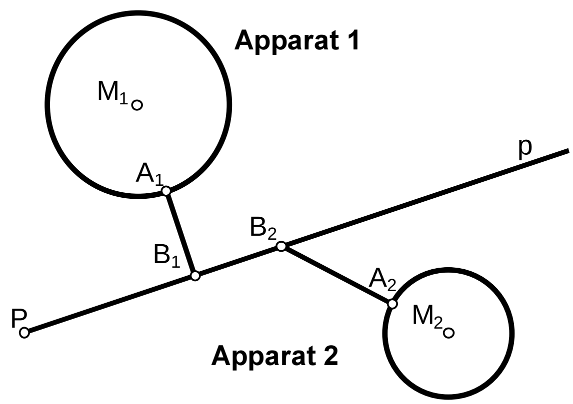
c) Für den Havariefall wird gefordert, dass durch eine senkrecht zur Erdoberfläche verlaufende Bohrung von einem Punkt R_0 der Erdoberfläche aus beide Stollen erreichbar sind. Diese Bohrung treffe auf den Stollen I im Punkt R_1 und auf den Stollen II im Punkt R_2.
Begründen Sie, dass ein derartiger Punkt R_0 existiert und ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte R_0, R_1 und R_2.

Grundkurs 2004 (13n)

Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

Zwei Apparate haben die Form gerader Kreiszylinder. Sie sollen an eine Rohrleitung p, die vom Punkt P(0 | –1) in Richtung des Vektors $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft, angeschlossen werden.

Die Apparate und die Rohrleitungen sind im Grundriss dargestellt.
Der Verlauf der Rohrleitungen kann durch Punkte von Geraden charakterisiert werden, die alle in der Grundrissebene liegen.
Ihre analytische Beschreibung erfolgt in einem kartesischen Koordinatensystem, wobei eine Einheit einem Meter entspricht.



(Abbildung nicht maßstäblich)

Vom Punkt $B_1(6 \mid y_{B_1})$ der Rohrleitung p wird der Apparat 1 im Punkt $A_1(5 \mid 4)$ angeschlossen. Der Grundriss dieses Apparates ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M_1(4 \mid 7)$.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung dieses Kreises.

Berechnen Sie die Länge der Anschlussleitung $\overline{A_1 B_1}$.

Zeigen Sie, dass die Anschlussleitung $\overline{A_1 B_1}$ sowohl senkrecht zur Rohrleitung p als auch senkrecht zur Tangente des Grundrisskreises des Apparates 1 im Punkt A_1 verläuft.

b) Der Grundriss des Apparates 2 ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M_2(15 \mid -1)$. Dieser Apparat soll im Punkt $A_2(13 \mid 0)$ durch eine Leitung angeschlossen werden, die im Winkel von 45° zur Rohrleitung p verläuft.

Begründen Sie, dass dafür als Anschlusspunkt der Punkt $B_2(9 \mid 2)$ auf der Rohrleitung p in Frage kommen kann.

Weisen Sie nach, dass die Punkte A_2, B_2 und M_2 auf ein und derselben Geraden liegen.

Die Rohrleitung p soll aus Sicherheitsgründen einen Abstand von mindestens 2,50 m zum Apparat 2 haben.
Prüfen Sie, ob diese Sicherheitsbestimmung eingehalten wird.

Grundkurs 2004 (13n)

Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem seien gegeben

die Punkte A(8 | – 4) und P(–6 | 6) sowie die Gerade g durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in R.$

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g mit der Geraden durch die Punkte

A und P sowie das Gradmaß des Schnittwinkels beider Geraden.

a) Gegeben seien Kreise durch

$$(x - [1 + 5n])^2 + (y - [1 + 7n])^2 = 74(1 + n^2),\ n \in Z.$$

Zeigen Sie, dass der Punkt A auf jedem dieser Kreise liegt.

Geben Sie die Gleichung jenes Kreises k an, für den n = 0 ist.

Weisen Sie nach, dass die Strecke $\overline{AP}$ Durchmesser des Kreises k ist.

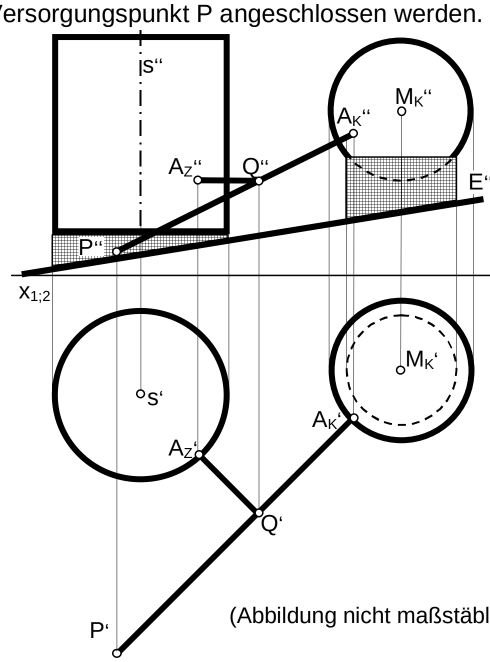
b) Die Gerade g schneidet den Kreis k aus Aufgabe b in genau zwei Punkten B und C. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

Diese Punkte bilden mit dem Punkt A das Dreieck ABC.
Zeigen Sie: Fällt man vom Punkt P aus die Lote auf jede der Seiten des Dreiecks ABC bzw. deren Verlängerungen, so liegen die sich ergebenden Lotfußpunkte auf genau einer Geraden.

Leistungskurs 2004 (13n) — Aufgabe 2.1, Analytische Geometrie

---

Zwei Apparate haben die Form einer Kugel bzw. eines geraden Kreiszylinders. Sie sollen in den Punkten A_K bzw. A_Z durch Rohrleitungen an den Versorgungspunkt P angeschlossen werden.
Die Standorte der Apparate und der Rohrleitungsverlauf sind im Grund- und Aufriss dargestellt. Eine analytische Beschreibung erfolgt in einem kartesischen Koordinatensystem, wobei die x-y-Ebene der Horizontalebene (in der Darstellung die Grundrissebene) und eine Einheit einem Meter entspricht.



(Abbildung nicht maßstäblich)

Gegeben sind:

- der Punkt P(16 | 4 | 1),
- der Radius des Zylinders $r_Z = 3{,}50$ m,
- die Symmetrieachse s des Zylinders durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ z \end{pmatrix},\quad z \in R,$
- die Kugel durch $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 32y - 14z = -312,$
- die Ebene E durch $y - 6z = 0$.

Ermitteln Sie den Radius und die Koordinaten des Mittelpunktes M_K des kugelförmigen Apparates.

Stellen Sie eine Gleichung der Geraden PM_K auf und berechnen Sie die Koordinaten des Anschlusspunktes A_K, der auf dieser Geraden liegt.

c) Die Apparate sind auf einem ebenen Fundament aufgestellt, dessen Lage durch Punkte der Ebene E beschrieben wird.
Berechnen Sie das Gradmaß des Neigungswinkels des Fundamentes zur Horizontalebene sowie das Gradmaß des Neigungswinkels der Rohrleitung $\overline{PA_k}$ zum Fundament.

In der Betriebsvorschrift wird gefordert, dass die Rohrleitung eine Höhe von 4,00 m über dem Fundament nicht überschreiten darf. (Die Höhe werde senkrecht zur Horizontalebene betrachtet.)
Prüfen Sie, ob diese Bestimmung eingehalten wird.

d) Auf der Rohrleitung $\overline{PA_K}$ soll ein Abzweigpunkt Q so festgelegt werden, dass der Verlauf der Rohrleitung $\overline{QA_Z}$ durch Punkte einer Geraden QA_Z beschrieben wird. Die Gerade QA_z soll sowohl senkrecht zur Geraden PA_K als auch zur Symmetrieachse s sein.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q.

Eine Rohrleitung ist in der gegebenen Abbildung in wahrer Länge dargestellt.
Geben Sie an, um welche Rohrleitung es sich handelt, begründen Sie Ihre Aussage und berechnen Sie die Länge dieser Rohrleitung.

Leistungskurs 2004 (13n)

Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

Gegeben seien in einem kartesischen Koordinatensystem

die Punkte A(0 | 0 | 2), B(3 | 4 | 5), C(–2 | 2 | 7) und P(10 | 12 | 10)

sowie die Kugel K mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 16y - 16z = -128$.

Begründen Sie, dass die Punkte A, B und C eine Ebene E bestimmen und geben Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene an.

Zeigen Sie, dass der Punkt P sowohl in der Ebene E als auch auf der Kugel K liegt.

a) Im Punkt P soll die Tangentialebene an die Kugel K gelegt werden.
Geben Sie eine Gleichung dieser Tangentialebene an.

Weisen Sie nach, dass diese Tangentialebene und die Ebene E zueinander orthogonal sind.

Durch Schnitt der Ebene E mit der Kugel K entsteht ein Schnittkreis.
Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und die Maßzahl des Radius dieses Kreises an.

Die Punkte Q(2 | 4 | 6), R(8 | 12 | 12) und S(4 | 4 | 4) sind Punkte des Schnittkreises aus Aufgabe b und die Strecke $\overline{PQ}$ ist ein Durchmesser dieses Kreises.

b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck QRS rechtwinklig ist.

Zeigen Sie, dass die Lotfußpunkte der Lote von P auf die Seiten dieses Dreiecks bzw. deren Verlängerungen auf genau einer Geraden liegen.

c) Der Punkt D(4 | 12 | z_D>10) sei die Spitze einer über der Fläche PQRS errichteten und von der Kugel K umhüllten Pyramide.

Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der Pyramide PQRSD.

Leistungskurs 2004 (13k) Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

Gegeben seien in einem kartesischen Koordinatensystem die drei Punkte

P(13 | 10,5 | 21,5), Q(2,5 | 3,5 | 0,5) und T(7,5 | 1 | 7).

Die Gerade durch die Punkte P und Q sei eine Symmetrieachse s eines Würfels mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G und H.

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden s an und berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, welchen die Gerade s mit der durch die Punkte Q und T verlaufenden Geraden einschließt.

Die Kante $\overline{AE}$ des Würfels liegt parallel zur Geraden s und wird vom Punkt T halbiert.
Berechnen Sie die Maßzahl der Kantenlänge des Würfels und ermitteln Sie die Koordinaten des Eckpunktes $E(x_E \mid y_E \mid z_E > 5)$ des Würfels.

[Ergebnis zur Kontrolle: E(9 | 2 | 10)]

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte D_1 und D_2 der Symmetrieachse s, in denen diese die Oberfläche des Würfels durchstößt.

c) Begründen Sie ohne Berechnung, dass für die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks TPQ gilt:
$A = \frac{1}{2} | \overrightarrow{TQ} \times \overrightarrow{TP} |$.

Zeigen Sie rechnerisch, dass für die gegebenen Punkte T, Q und P die Gleichung
$| \overrightarrow{TQ} \times \overrightarrow{TP} | = | \overrightarrow{TP} \times \overrightarrow{QP} |$ gilt.

Diese Gleichung gilt auch für beliebige Punkte T, Q und P (T, Q und P sollen nicht auf ein und derselben Geraden liegen).
Deuten Sie dafür die Gleichung geometrisch.

Grundkurs 2005 (13k) Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Gerade g_1 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in R$,

die Gerade g_2 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \in R$, sowie die Punkte A(8 | 3 | 6), B(12 | 11 | 10)
und S(9 | 8 | 7) gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass die Geraden g_1 und g_2 einander schneiden.

Zeigen Sie, dass der Punkt S der Schnittpunkt der Geraden ist und berechnen Sie das Gradmaß des Schnittwinkels.

b) Die Geraden g_1 und g_2 bestimmen eine Ebene E_1.
Stellen Sie eine Parametergleichung dieser Ebene auf.

Zeigen Sie, dass die Strecke $\overline{AS}$ nicht senkrecht auf der Ebene E_1 steht und berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{AS}$.

c) Die Punkte A und B bestimmen eine Gerade g_3. Diese Gerade verläuft parallel zur Ebene E_1 und liegt nicht in der Ebene E_1.
Parallel zur Ebene E_1 liege eine Ebene E_2. Sie habe von der Ebene E_1 und von der Geraden g_3 den gleichen Abstand.
Ermitteln Sie je eine Parametergleichung der Geraden g_3 und der Ebene E_2.

Grundkurs 2005 (13k) — Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind
die Punkte A(2 | 1 | 2), B(5 | 2 | 1), C(6 | 5 | 3), D(0 | 3 | 5) und die Gerade

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$, $t \in R$ gegeben.

a) Die Punkte A, B und C bestimmen die Ebene E.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an und zeigen Sie, dass der Punkt D in der Ebene E liegt.

Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist.

b) Zeigen Sie, dass die Gerade g die Ebene E (aus Aufgabe a) senkrecht durchstößt und berechnen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes.

Auf der Geraden g liegen die Punkte P(25 | –26 | 33) und Q(–5 | 16 | –15).
Berechnen Sie das Verhältnis der Maßzahlen der Volumina der Pyramiden ABCDP und ABCDQ.

Leistungskurs 2005 (13k) — Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(5 | 4 | –2) und B(–1 | –2 | –2) sowie die Punktmenge $P_k(2k+1 \mid -k \mid 2k)$, $k \in R$, gegeben.

a) Die Punkte A und B bestimmen eine Gerade g, die Punkte der Punktmenge P_k liegen auf einer Geraden h.
Stellen Sie für die Geraden g und h je eine Gleichung auf und zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief zueinander liegen.

Der Punktmenge P_k gehört genau ein Punkt C an, so dass die Punkte A, B und C Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks sind.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C.

Ermitteln Sie die Maßzahl des Abstandes des Punktes C von der Geraden g.

b) Die Punktmenge P_k und der Punkt A bestimmen eine Ebene E.
Stellen Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene E auf.
[mögliches Ergebnis zur Kontrolle: E: $x - 2y - 2z - 1 = 0$]

c) Durch senkrechte Projektion des Punktes B auf die Ebene E (aus Aufgabe b) entsteht der Punkt $\bar{B}$. Die Punkte B und $\bar{B}$ liegen auf einer Kugel K, für die die Ebene E Tangentialebene ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung für die Kugel K.

Leistungskurs 2005 (13k) | Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

In einen Berg führen von gegenüberliegenden Seiten aus zwei geradlinige Stollen vom Punkt A_1 zum Punkt B_1 sowie vom Punkt A_2 zum Punkt B_2.

Eine analytische Beschreibung erfolgt in einem kartesischen Koordinatensystem, wobei die x-y-Ebene der Horizontalebene entspricht; eine Koordinateneinheit beträgt 1 m.
Gegeben sind:
$A_1(20 \mid 300 \mid 0)$, $A_2(0 \mid 0 \mid 30)$,
$B_1(20 \mid 260 \mid 4)$, $B_2(0 \mid 60 \mid 24)$.

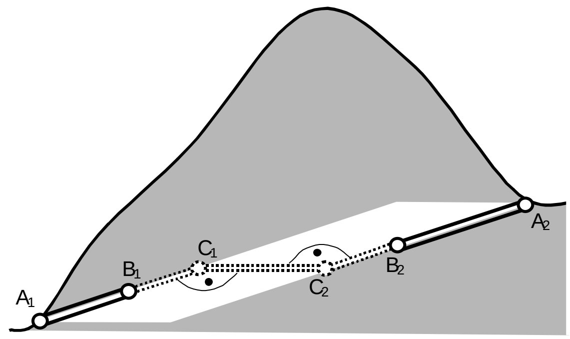


Abbildung nicht maßstäblich

Die Punkte A_1 und B_1 bestimmen die Gerade g_1. Die Punkte A_2 und B_2 bestimmen die Gerade g_2.

a) Stellen Sie für die Geraden g_1 und g_2 jeweils eine Gleichung auf und weisen Sie nach, dass diese Geraden eine Ebene bestimmen.

Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, den die Gerade g_1 mit der Horizontalebene einschließt.

b) Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels zwischen den Vektoren $\overrightarrow{A_1B_1}$ und $\overrightarrow{B_1B_2}$ sowie die Entfernung der Punkte B_1 und B_2 voneinander.

c) Eine Ebene E verlaufe senkrecht zur Geraden g_1 sowie zur Geraden g_2 und schneide diese Geraden in den Punkten C_1 bzw. C_2 so, dass die Strecken $\overline{B_1C_1}$ und $\overline{B_2C_2}$ gleichlang sind.
Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E auf und berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C_1 und C_2.

[mögliches Ergebnis zur Kontrolle: E: $10y - z - 1586 = 0$]

d) Für eine Verbindung der Stollen werden als Trassen die direkte Verbindungsstrecke $\overline{B\,B_2}$ sowie der Streckenzug $B_1C_1C_2B_2$ in Betracht gezogen.
Berechnen Sie den Unterschied der Längen dieser Trassen.

Grundkursniveau Kernfach Mathematik 2005 | Aufgabe 2
Pflichtaufgabe | Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines Tetraeders*)

$H_1(6 \mid 0 \mid 0)$, $H_2(0 \mid 6 \mid 0)$, $H_3(0 \mid 0 \mid 6)$ und $H_4(6 \mid 6 \mid 6)$ sowie der Punkt $C(3 \mid 3 \mid 3)$ gegeben.

a) Die Punkte C, H_1 und H_2 bestimmen eine Ebene E.

Zeigen Sie, dass der Vektor $\overrightarrow{H_3H_4}$ ein Normalenvektor dieser Ebene ist und geben Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene an.

Berechnen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes der Strecke $\overline{H_3H_4}$ durch die Ebene E und charakterisieren Sie dessen spezielle Lage auf dieser Strecke.

Schlussfolgern Sie die Lage der Punkte H_3 und H_4 zur Ebene E.

b) Im Modell eines Methanmoleküls befinden sich die Wasserstoffatome in Eckpunkten H_i (i = 1; 2; 3; 4) und das Kohlenstoffatom im Mittelpunkt C eines Tetraeders. Der Winkel α heißt Bindungswinkel zwischen dem Kohlenstoffatom und jeweils einem Wasserstoffatom (siehe Abbildung).

Berechnen Sie das Gradmaß des Bindungswinkels α.

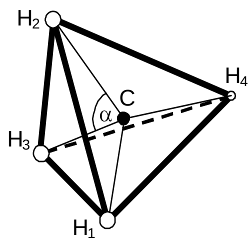
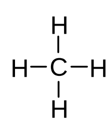


Abbildung: Methanmolekül (nicht maßstäblich)

c) Projiziert man die Punkte H_i (i = 1; 2; 3; 4) und den Punkt C durch senkrechte Parallelprojektion in die x-y-Ebene, so erhält man die Bildpunkte $H_1'(6 \mid 0 \mid 0)$, $H_2'(0 \mid 6 \mid 0)$, $H_3'(0 \mid 0 \mid 0)$, H_4' und C'.

Zeigen Sie, dass durch diese Projektion folgende Strukturformel des Methanmoleküls aus geometrischer Sicht gerechtfertigt ist.



*) *Ein Tetraeder ist ein Körper, der von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird.*

Grundkursniveau Kernfach Mathematik 2005	Aufgabe 4.2
Wahlpflichtaufgabe	Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Dreieck ABC durch die Punkte $A(-1 \mid 5)$, $B(9 \mid -19)$ und $C(4 \mid 6)$ gegeben.

Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ ist.

Begründen Sie, dass der Mittelpunkt des Umkreises k des Dreiecks ABC auch Mittelpunkt der Hypotenuse $\overline{AB}$ dieses Dreiecks ist und geben Sie eine Gleichung des Umkreises k an.

Unter Beibehaltung der Hypotenuse $\overline{AB}$ gibt es genau zwei Punkte C_1 und C_2, so dass die Dreiecke ABC_1 und ABC_2 rechtwinklig gleichschenklig sind.

Ermitteln Sie die Koordinaten dieser Punkte C_1 und C_2

Leistungskursniveau Kernfach Mathematik 2005 — Aufgabe 2
Pflichtaufgabe — Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Eckpunkte eines Tetraeders *) $Q_1(6 \mid 0 \mid 0)$, $Q_2(0 \mid 6 \mid 0)$, $Q_3(0 \mid 0 \mid 6)$ und $S(6 \mid 6 \mid 6)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $C_1(3 \mid 3 \mid 3)$ Mittelpunkt des Tetraeders (d. h. Mittelpunkt der Umkugel) ist.

Weisen Sie nach, dass zwei gegenüberliegende Seitenkanten dieses Tetraeders orthogonal zueinander verlaufen.

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E_1, in der die Tetraederseitenfläche $Q_1Q_2Q_3$ liegt, und berechnen Sie die Maßzahl der Höhe dieses Tetraeders.

Im Modell eines Ethanmoleküls befinden sich die Wasserstoffatome in den Eckpunkten Q_i und R_i bzw. R_i' ($i = 1; 2; 3$) und die Kohlenstoffatome in den Mittelpunkten C_i ($i = 1; 2$) von zwei sich im Punkt S berührenden Tetraedern.

Es gibt zwei Formen des Ethanmoleküls. In der gestaffelten Form liegen die Punkte R_i und Q_i symmetrisch zum Punkt S (siehe Abbildung 1). In der verdeckten Form liegen die Punkte R_i' und Q_i symmetrisch zu einer Ebene E_2, die parallel zur Ebene E_1 und durch den Punkt S verläuft (siehe Abbildung 2).

b) Berechnen Sie das Gradmaß des Bindungswinkels α (siehe Abbildungen).

Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte R_i ($i = 1; 2; 3$).

Begründen Sie, dass die Punkte R_i und R_i' ($i = 1; 2; 3$) in ein und derselben Ebene E_3 liegen, die parallel zur Ebene E_1 verläuft.

c) Der Abstand von einem Wasserstoffatom der Ebene E_1 zum nächstliegenden Wasserstoffatom der Ebene E_3 ist in den beiden Formen des Ethanmoleküls verschieden (z. B. Abstände $\overline{Q_1R_2}$ und $\overline{Q_1R'_1}$).

Berechnen Sie das Verhältnis dieser Abstände.

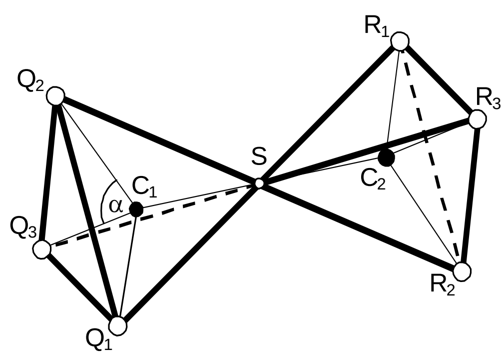


Abbildung 1: Gestaffelte Form eines Ethanmoleküls (nicht maßstäblich)

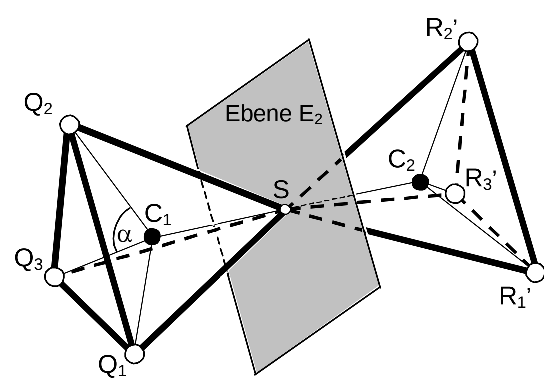


Abbildung 2: Verdeckte Form eines Ethanmoleküls (nicht maßstäblich)

*) *Ein Tetraeder ist ein Körper, der von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird.*

Leistungskursniveau Kernfach Mathematik 2005 — Aufgabe 4.2
Wahlpflichtaufgabe — Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind gegeben

das Dreieck ABC durch die Punkte A(–10 | –9), B(8 | –3) und C(4 | 5),

die Gerade m_1 durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in R.$

Weisen Sie nach, dass die Gerade m_1 Mittelsenkrechte der Dreiecksseite $\overline{AB}$ ist und ermitteln Sie eine Gleichung der Mittelsenkrechten der Dreiecksseite $\overline{AC}$.

Stellen Sie eine Gleichung des Umkreises des Dreiecks ABC auf.

Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes C', so dass ein gleichschenkliges Dreieck ABC' entsteht, in dem das Maß des Innenwinkels $\angle AC'B$ mit dem Maß des Innenwinkels $\angle ACB$ (des Dreiecks ABC) übereinstimmt.