Kurs	Name der Aufgabe	Sachgebiet	CAS mit	CAS ohne	Seite
Grundkursfach	1. Pyramide	Analytische Geometrie		X	4
	2. Pyramide	Analytische Geometrie	X		8
	3. Flugbahnen	Analytische Geometrie	X		12
	4. Firmenlogo	Analysis	X		15
	5. Logarithmusfunktion	Analysis		X	18
	6. Eisenbahnviadukt	Analysis		X	21
	7. Eisenbahnviadukt	Analysis	X		26
	8. Betriebsfeier	Stochastik		X	31
Leistungskursfach	9. Fertighäuser	Stochastik		X	34
	10. Fertighäuser	Stochastik	X		37
	11. Dachantenne	Analytische Geometrie		X	40
	12. Dachantenne	Analytische Geometrie	X		43
	13. Pyramide und Ebenen	Analytische Geometrie		X	46
	14. Pyramide und Ebenen	Analytische Geometrie	X		49
	15. Tunnelquerschnitt	Analysis		X	53
	16. Tunnelquerschnitt	Analysis	X		57
	17. Exponentialfunktionenschar	Analysis		X	62
	18. Exponentialfunktionenschar	Analysis	X		65

Grundkurs Mathematik ohne CAS - Analytische Geometrie - 35 BE, ca. 60 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet.

1. Pyramide

In einem dreidimensionalen, kartesischen Koordinatensystem sind die drei Punkte

A(1|1|1), B(3|3|1) und C(0|4|5) sowie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -17 \end{pmatrix}$, $r \in \Re$ gegeben.

a) Die Punkte A, B und C bilden ein Dreieck.
Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.
Berechnen Sie die Größe der Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks.

b) Die Punkte A, B und C sind in einer Ebene E enthalten.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
(Mögliche Lösung zur Kontrolle Ihrer Rechnung: E: $x - y + z = 1$)

c) Der Punkt S(6|-2|8) ist die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche ABC.
Stellen Sie die Pyramide und die Gerade g graphisch dar. Benutzen Sie dafür das beigefügte Koordinatensystem.
Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide.

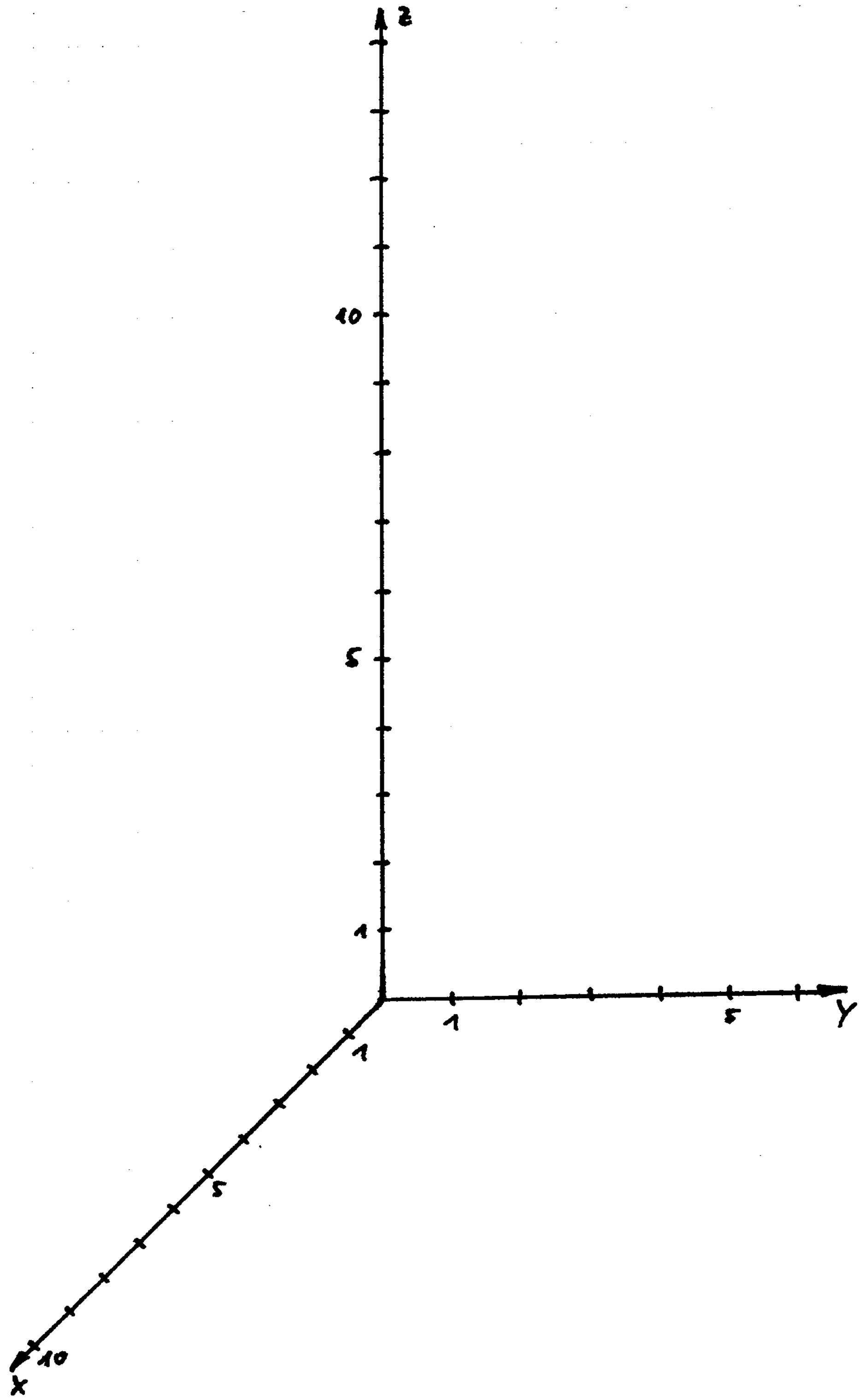
d) Untersuchen Sie, ob g die Kante AS der Pyramide schneidet.

e) Für jedes $t \in \Re$ ist eine Ebene E_t: $t \cdot x + (t-2)y + z = 1$ gegeben.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen E_1 und E_2.
Berechnen Sie den Wert von t, für den E_t parallel zu g ist.

Grundkurs Mathematik ohne CAS - Analytische Geometrie - 35 BE, ca. 60 Min.

1. Pyramide

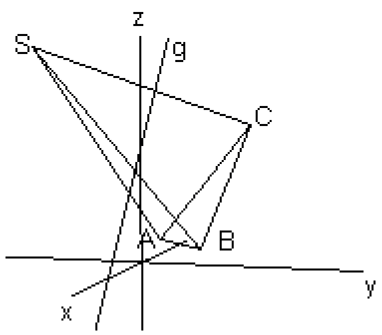
Koordinatensystem für Aufgabeteil c)



GK Mathematik ohne CAS - Analytische Geometrie - **1. Pyramide** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurs: ma-3
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte:
   Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene, Ebenengleichungen, Anwendung des Skalarprodukts, Winkel- und Abstandsberechnungen.
3. Bemerkung: Es handelt sich um eine traditionelle Prüfungsaufgabe.

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB			Erbrachte Leistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
a)	Nachweis, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, z. B. über zwei gleich lange Schenkel. Länge der Dreiecksseiten: $\lvert\overline{AB}\rvert = 2\cdot\sqrt{2}$, $\lvert\overline{AC}\rvert = \sqrt{26}$, $\lvert\overline{BC}\rvert = \sqrt{26}$	3				
	Berechnung der Innenwinkelgrößen: $\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BC}\rvert}$, $\gamma \approx 32{,}2°$. Daraus folgt wegen der Gleichschenkligkeit: $\alpha = \beta \approx 73{,}9°$.		4			
	Flächeninhalt des Dreiecks ABC, z. B. Mittelpunkt D der Strecke $\overline{AB}$: D(2|2|1), Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD} = 4\cdot\sqrt{3}$.	4				
b)	Z. B. Eliminieren der Parameter s und t im System der Koordinatengleichungen von E: Ansatz: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ Eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform lautet $x - y + z = 1$.	4				
c)		4				
	Zwischensumme	15	4	0		

GK Mathematik ohne CAS - Analytische Geometrie - **1. Pyramide** - Erwartungshorizont

	Übertrag	15	4	0		Begutachtung
noch c)	Volumen der Pyramide z. B. durch Berechnung des Abstandes zwischen S und E mithilfe der Abstandsformel $d = \left\|\left(\vec{s}-\vec{a}\right)\cdot\overrightarrow{n_0}\right\|$. Bestimmung eines Normaleneinheitsvektors $\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Man erhält für die Höhe: h = $5\cdot\sqrt{3}$ Durch Einsetzen in die Volumenformel erhält man V = 20 VE.		5			
d)	Geeignete Untersuchung, Ergebnis: Die Gerade g schneidet die Gerade durch A und S nicht, also auch nicht die Kante AS.		4			
e)	Berechnung der Schnittgeraden von E_1 und E_2. Ergebnis g_S: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$		4			
	Dafür müssen der Richtungsvektor von g und der Normalenvektor von E_t orthogonal zueinander sein, d. h. ihr Skalarprodukt muss gleich 0 sein. Normalenvektor von E_t: $\overrightarrow{n_t} = \begin{pmatrix}t\\t-2\\1\end{pmatrix}$ Richtungsvektor von g: $\vec{m} = \begin{pmatrix}5\\-3\\-17\end{pmatrix}$ Der Ansatz $\overrightarrow{n_t}\cdot\vec{m} = 0$ liefert t = 5,5. Für t = 5,5 ist E_t parallel zu g.			3		
	Summe	15	17	3		
	mögliche BE	35				erreichte BE:

Grundkurs Mathematik mit CAS - Analytische Geometrie - 35 BE, ca. 60 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet. Notieren Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

2. Pyramide

In einem dreidimensionalen, kartesischen Koordinatensystem sind die drei Punkte

A(1|1|1), B(3|3|1) und C(0|4|5) sowie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -17 \end{pmatrix}$, $r \in \Re$ gegeben.

a) Die Punkte A, B und C bilden ein Dreieck.
Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.
Berechnen Sie die Größe der Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks.

b) Die Punkte A, B und C sind in einer Ebene E enthalten.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
(Mögliche Lösung zur Kontrolle Ihrer Rechnung: E: $x - y + z = 1$)

c) Der Punkt S(6|-2|8) ist die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche ABC.
Stellen Sie die Pyramide und die Gerade g graphisch dar. Benutzen Sie dafür das beigefügte Koordinatensystem.
Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide.

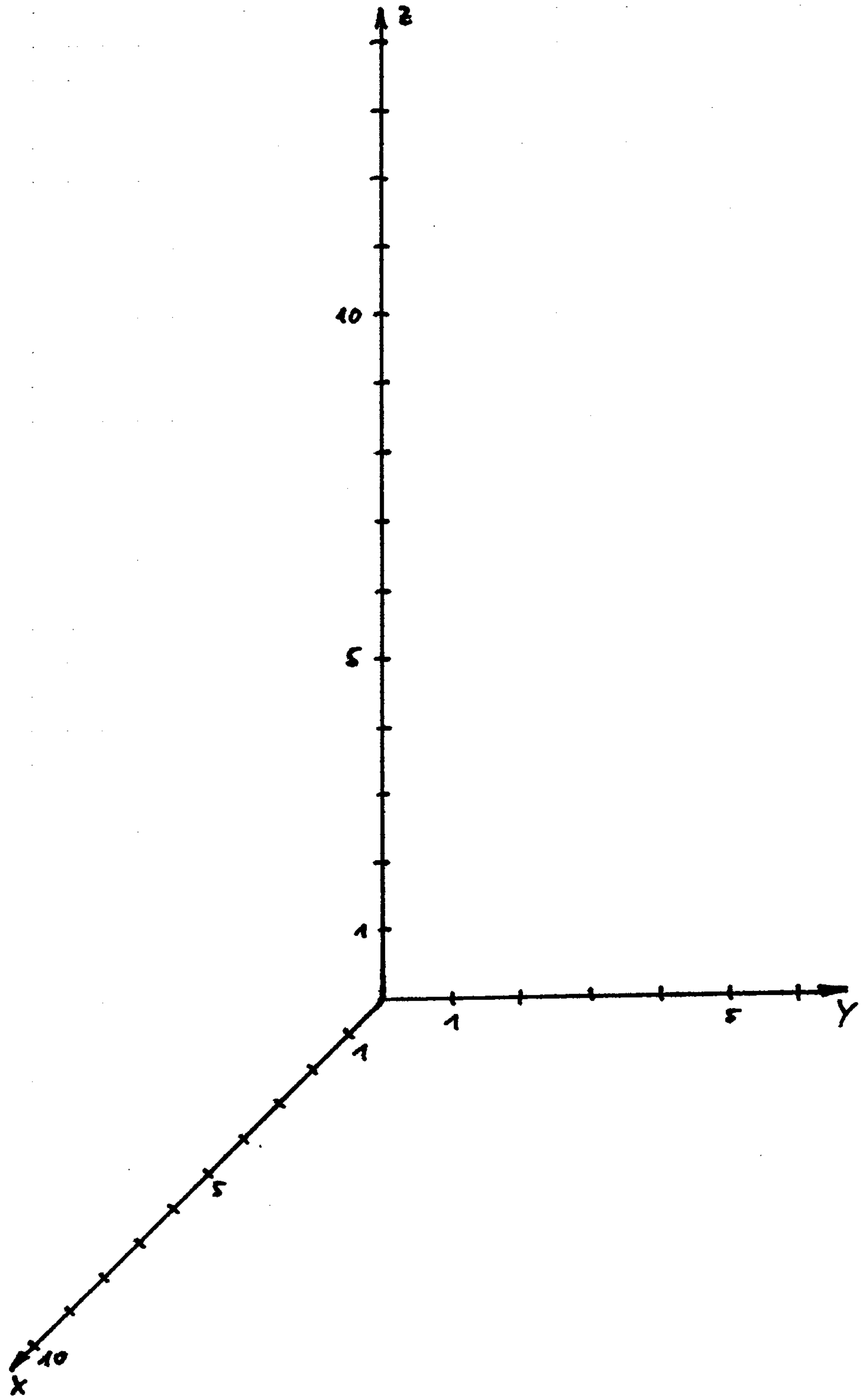
d) Untersuchen Sie, ob g die Kante AS der Pyramide schneidet.

e) Für jedes $t \in \Re$ ist eine Ebene E_t: $t \cdot x + (t-2)y + z = 1$ gegeben.
- Berechnen Sie den Wert von t, für den E_t parallel zu g ist.
- Zeigen Sie, dass alle Ebenen E_t die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $w \in \Re$ gemeinsam haben.
- Geben Sie eine Gleichung derjenigen Scharebene an, die senkrecht auf $E_{5,5}$ steht.

Grundkurs Mathematik mit CAS - Analytische Geometrie - 35 BE, ca. 60 Min.

2. Pyramide

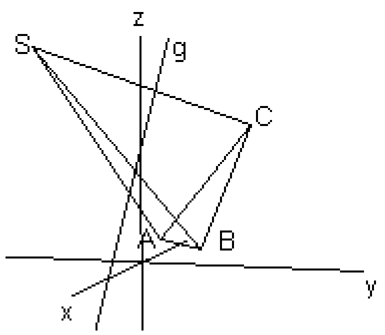
Koordinatensystem für Aufgabeteil c)



GK Mathematik mit CAS - Analytische Geometrie - **2. Pyramide** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurs: ma-3
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte:
   Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene, Ebenengleichungen, Anwendung des Skalarprodukts, Winkel- und Abstandsberechnungen.
3. Bemerkung: Es handelt sich um eine traditionelle Prüfungsaufgabe. Das Hilfsmittel CAS hat kaum Einfluss auf die Aufgabenstellung und den Schwierigkeitsgrad, aber auf die BE-Verteilung. Die besonderen Möglichkeiten eines CAS sind in dieser Aufgabe nicht intensiv nutzbar.

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB			Erbrachte Leistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
a)	Nachweis, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, z. B. über zwei gleich lange Schenkel. Länge der Dreiecksseiten: $\overline{AB} = 2\cdot\sqrt{2}$, $\overline{AC} = \sqrt{26}$, $\overline{BC} = \sqrt{26}$	3				
	Berechnung der Innenwinkelgrößen: $\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$ $\gamma \approx 32{,}2°$. Daraus folgt wegen der Gleichschenkligkeit: $\alpha = \beta \approx 73{,}9°$.		3			
	Bestimmung z. B. des Mittelpunkts D der Strecke $\overline{AB}$ zu D(2|2|1), Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD} = 4\cdot\sqrt{3}$.	3				
b)	Z. B. Eliminieren der Parameter s und t im System der Koordinatengleichungen von E: Ansatz: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ Eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform lautet x – y + z = 1.	3				
c)		4				
	Zwischensumme	13	3	0		

GK Mathematik mit CAS - Analytische Geometrie - **2. Pyramide** - Erwartungshorizont

	Übertrag	13	3	0		Begutachtung
noch c)	Berechnung des Abstandes zwischen S und E z. B. mithilfe der Abstandsformel d = $\left\vert \left(\vec{s}-\vec{a}\right)\cdot\vec{n_0}\right\vert$. Bestimmung eines Normaleneinheitsvektors $\vec{n_0}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Man erhält d = h_{Pyr} = $5\cdot\sqrt{3}$. Daraus folgt V = 20 VE.		5			
d)	Geeignete Untersuchung, Ergebnis: Die Gerade g schneidet die Gerade durch A und S nicht, also auch nicht die Kante AS.		3			
e)	Der Richtungsvektor von g und der Normalenvektor von E_t müssen orthogonal zueinander sein, d. h. ihr Skalarprodukt muss gleich 0 sein. Normalenvektor von E_t: $\vec{n_t}=\begin{pmatrix}t\\t-2\\1\end{pmatrix}$ Richtungsvektor von g: $\vec{m}=\begin{pmatrix}5\\-3\\-17\end{pmatrix}$ Der Ansatz $\vec{n_t}\cdot\vec{m}=0$ liefert t = 5,5. Für t = 5,5 ist E_t parallel zu g.			3		
	Entweder man untersucht den Schnitt zweier verschiedener Ebenen E_{t1} und E_{t2}, erhält von t unabhängig: y = -x und z = -2x + 1 und stellt damit die vorgegebene Geradengleichung auf oder man weist durch Einsetzen nach, dass h in allen Ebenen E_t enthalten ist.		4			
	Die beiden Normalenvektoren müssen senkrecht aufeinander stehen. Die Orthogonalitätsbedingung führt auf die Gleichung 5,5t + 3,5(t - 2) + 1 = 0 mit der Lösung: t = $\frac{2}{3}$. Es ergibt sich daraus z. B. die Koordinatenform $E_{\frac{2}{3}}:\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}y+z=1$.		4			
	Summe	13	19	3		
	mögliche BE	35			erreichte BE:	

Grundkurs Mathematik mit CAS - Analytische Geometrie - 35 BE, ca. 60 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet. Notieren Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

3. Flugbahnen

Zwei Flugzeuge fliegen mit gleich bleibender Geschwindigkeit auf einem geraden Kurs. Die erste Maschine, ein Passagierflugzeug, befindet sich zum Zeitpunkt t = 0 min in A(60|360|8) und zum Zeitpunkt t = 6 min in B(144|312|8,4). Das zweite Flugzeug, ein Transportflugzeug, befindet sich zum Zeitpunkt t = 0 min in C(120|0|12) und bei t = 6 min in D(192|24|11,6). (Koordinatenangaben in km, Zeitangaben in Minuten)

a) Ermitteln Sie die Geschwindigkeiten der beiden Flugzeuge in $\frac{km}{h}$.

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass sich die beiden Flugzeuge auf Kollisionskurs befinden. Ermitteln Sie die Flughöhe, in der die Kollision stattfinden würde.

c) Ermitteln Sie die Größe des Winkels, in dem beide Flugzeuge aufeinander treffen würden.

d) Das Antikollisionssystem warnt die beiden Piloten vor der Gefahr des Zusammenstoßes. Zum Zeitpunkt t = 6 min korrigieren beide Flugzeuge ihren Kurs. Das Passagierflugzeug fliegt den Kurs mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{m_P} = \begin{pmatrix} 336 \\ -172 \\ -0{,}4 \end{pmatrix}$ und das Transportflugzeug den Kurs mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{m_T} = \begin{pmatrix} 288 \\ 76 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$. Weisen Sie rechnerisch nach, dass es zu keiner Kollision kommt.

e) Damit zwei Flugzeuge in einem sicheren Abstand aneinander vorbeifliegen, muss ein Mindestabstand von 10.000 feet (3048 m) eingehalten werden. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die beiden Flugbahnen diesen Mindestabstand besitzen.

GK Mathematik mit CAS - Analytische Geometrie - **3. Flugbahnen** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurs: ma-3
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte:
   Räumliche Vorstellung, Geradengleichung, Skalarprodukt und Anwendungen, Lösungen von Gleichungssystemen.
3. Bemerkung: Es handelt sich um keine traditionelle Prüfungsaufgabe, ohne CAS wäre der Rechenaufwand zu hoch.

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB I	II	III	Erbrachte Leistung BE	Begutachtung
a)	Berechnung der Abstände AB und CD als Wegstrecken s für 6 min. 6 min = $\frac{1}{10}h$, $v=\frac{s}{t}$ liefert: $v_P \approx 967{,}5\,\frac{km}{h}$; $v_T \approx 759{,}0\,\frac{km}{h}$	6				
b)	Bei Kollisionskurs schneiden sich die Flugbahnen. Aufstellen der Geradengleichungen für die Flugbahnen, z. B.: $g_P: \vec{x}=\vec{a}+r(\vec{b}-\vec{a})=\begin{pmatrix}60\\360\\8\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}84\\-48\\0{,}4\end{pmatrix}$ $g_T: \vec{x}=\vec{c}+s(\vec{d}-\vec{c})=\begin{pmatrix}120\\0\\12\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}72\\24\\-0{,}4\end{pmatrix}$	5				
	Prüfung der Existenz eines Schnittpunktes durch Gleichsetzen der rechten Seiten der Geradengleichungen. Bestimmung der Parameter: r = s = 5. *(Bei diesem Weg folgt aus r = s die tatsächliche Kollisionsgefahr, sonst wären v_P und v_T zu berücksichtigen.)*		3			
	Einsetzen in eine Geradengleichung liefert S(480|120|10) und damit die Kollisionshöhe von 10 km.		2			
	Zwischensumme	11	5	0		

GK Mathematik mit CAS - Analytische Geometrie - **3. Flugbahnen** - Erwartungshorizont

	Übertrag	11	5	0		Begutachtung
c)	Berechnung des Kollisionswinkels aus den Richtungsvektoren: $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{m_1} \cdot \overrightarrow{m_2}}{\lvert\overrightarrow{m_1}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{m_2}\rvert}$. Der Kollisionswinkel beträgt $\alpha \approx 48°$.		3			
d)	Überprüfen, dass die beiden neuen Geraden windschief zueinander liegen durch Gleichsetzen der rechten Seiten der geänderten Geradengleichungen. Das entstehende Gleichungssystem besitzt keine Lösung.	6				
e)	Bestimmung des Abstandes windschiefer Geraden: - Bestimmung eines gemeinsamen Normalenvektors, Normierung. - Berechnung des Abstands mit der Abstandsformel. Ergebnis: Der minimal mögliche Abstand der beiden neuen Flugbahnen beträgt ca. 4,1 km. Somit wird der Mindestabstand eingehalten.		5 5			
	Summe	17	18	0		
	mögliche BE	35			erreichte BE:	

Grundkurs Mathematik mit CAS - Analysis - 35 BE, ca. 60 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet. Notieren Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

4. Firmenlogo

Eine Firma, die vegetarische Fitness-Lebensmittel herstellt, hat bei einem Designer die Entwicklung eines Firmenlogos bestellt. Es soll wie ein stilisiertes Blatt aussehen. Das Logo soll nicht nur gedruckt, sondern auch zu Werbezwecken auf Küchenhandtücher gestickt werden. Für diese maschinelle Verarbeitung muss das Logo von Funktionsgraphen berandet sein. Um die Kosten für die Stickerei kalkulieren zu können, benötigt die Firma u. a. den Flächeninhalt des Logos.

Der Designer formt das Logo mithilfe der Funktionen f und g mit den Gleichungen

$$f(x) = \ln(3 + x) - \ln(3 - x) \text{ und } g(x) = (x - 2)^3 + 3.$$

Das Logo ist die Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f.

b) Untersuchen Sie die Funktion f auf Symmetrie, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

c) Zeichnen Sie das Logo in ein Koordinatensystem und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

d) Berechnen Sie, an welcher Stelle die Differenz der Funktionswerte im Bereich des Logos maximal ist. (Die Überprüfung einer hinreichenden Bedingung für ein Maximum kann entfallen.)

e) An der Stelle $x = 2$ soll eine Tangente an den unteren Rand des Logos gelegt werden. Beschreiben Sie ein Verfahren (keine Rechnung erforderlich!), mit dem man ihre Gleichung ermitteln kann.

f) Dem Auftraggeber gefällt das Logo, er möchte es aber seitenverkehrt verwenden. Geben Sie die Gleichungen zweier Funktionen f* und g* an, die das Logo seitenverkehrt, erzeugen. Begründen Sie Ihren Lösungsweg.

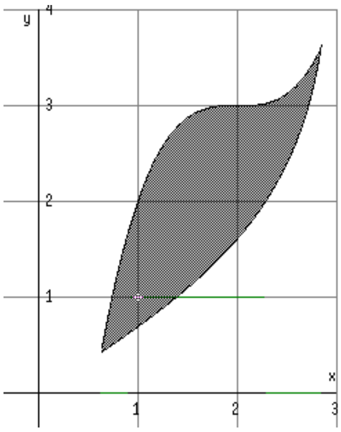
GK Mathematik mit CAS - Analysis - **4. Firmenlogo** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben

1. Bezugskurs: ma-2
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte:
   Untersuchung einer Logarithmusfunktion, Extremwertaufgabe
3. Bemerkung: Die Aufgabe beinhaltet traditionelle Elemente einer Kurvendiskussion mit Anwendungsbezug bei der Zeichnung der Funktionsgraphen, der Flächenberechnung und der Spiegelung der Funktionen. Die Aufgabenteile c und d sind ohne CAS nicht lösbar.

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB I	II	III	Erbrachte Leistung BE	Begutachtung
a)	Definitionsbereich: x > -3 und x < +3, also $D_f =]-3; 3[$	2				
b)	Es gilt f(x) = -f(-x), also ist G_f punktsymmetrisch zum Ursprung.	2				
	$x_N = 0$ ist die einzige Nullstelle von f.	1				
	Extrempunkte: $f'(x) = \frac{-6}{(x-3)(x+3)}$ Notwendige Bedingung: f'(x) = 0 f'(x) besitzt keine Nullstelle, also hat f keine relativen Extrema.	3				
	Wendepunkte: $f''(x) = \frac{12x}{(x-3)^2\cdot(x+3)^2}$ Die notwendige Bedingung: f''(x) = 0 führt auf x = 0.	3				
	Hinreichende Bedingung, z. B. f''(x) = 0 und f'''(x) ≠ 0. $f'''(x) = \frac{-36(x^2+3)}{(x-3)^3\cdot(x+3)^3}$ f'''(0) = $\frac{4}{27}$ > 0. Also liegt ein Wendepunkt vor: W(0/0)	3				
	Zwischensumme	14	0	0		

GK Mathematik mit CAS - Analysis - **4. Firmenlogo** - Erwartungshorizont

	Übertrag	14	0	0		Begutachtung
c)			4			
	Berechnung der Schnittstellen: $f(x_S) = g(x_S)$ $x_{S1} \approx 2{,}8389$, $x_{S2} \approx 0{,}6295$, Eine *(evtl. vom CAS angegebene)* Schnittstelle $x_{S3} = -3$ liegt nicht in D_f.		3			
	Flächenberechnung: A = $\int_{x_{S2}}^{x_{S1}} \left(g(x) - f(x)\right)dx \approx 2{,}5859$		2			
d)	Untersuchung der Differenzfunktion d mit $d(x) = g(x) - f(x)$. $d'(x) = 3x^2 - 12x + 12 + \frac{6}{(x-3)(x+3)}$		2			
	Notwendige Bedingung: $d'(x_E) = 0$ $x_{E1} \approx 1{,}4603$, $x_{E2} \approx -2{,}9866$ Als Lösung kommt nur x_{E1} in Frage, denn x_{E2} liegt nicht zwischen den Schnittstellen. Für $x_{E1} \approx 1{,}4603$ ist der Abstand zwischen den Funktionsgraphen maximal.		4			
e)	Bestimme die Steigung $m = f'(2)$ und den Funktionswert f(2). Setze x = 2, m und f(2) in die angesetzte Geradengleichung $t(x) = mx + n$ ein und ermittle n.		3			
f)	Am einfachsten durch Spiegelung an der y-Achse: Statt f wähle f* mit $f^*(x) = f(-x)$ Statt g wähle g* mit $g^* = -(x+2)^3 + 3$			3		
	Summe	14	18	3		
	mögliche BE		35		erreichte BE:	

Grundkurs Mathematik ohne CAS - Analysis - 35 BE, ca. 60 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet.

5. Logarithmusfunktion

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \ln(3 + x) - \ln(3 - x)$, $x \in \Re$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f.

b) - Weisen Sie nach: Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
- Untersuchen Sie f auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.
  Bei Wendepunkten genügt die Untersuchung der notwendigen Bedingung.
  (Zur Kontrolle Ihrer Rechnung: $f''(x) = \frac{12x}{(9-x^2)^2}$ *)*

c) Gegeben ist eine weitere Funktion g mit $g(x) = \ln(3 - x)$.
- Zeichnen Sie die Graphen von f und g in ein Koordinatensystem.
- Die Graphen von f und g besitzen einen Schnittpunkt.
  Berechnen Sie seine Koordinaten.

d) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt (1| f(1)).
(Zur Kontrolle Ihrer Rechnung: $t(x) = \frac{3}{4}x + \ln(2) - \frac{3}{4}$ *)*

e) Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden h, die zu dieser Tangente senkrecht verläuft und mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck mit dem Inhalt 6 FE einschließt.

f) Ergänzen Sie Ihre Zeichnung um die Graphen von t und h.

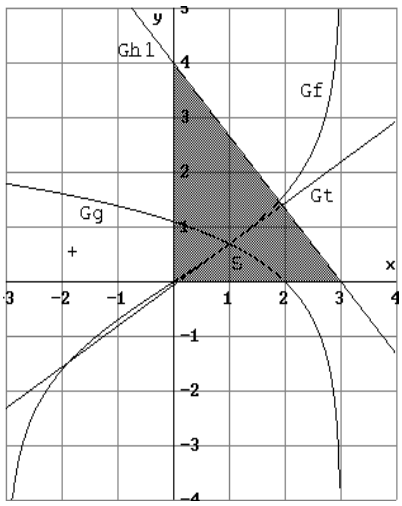
GK Mathematik ohne CAS - Analysis - **5. Logarithmusfunktion** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurs: ma-2
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte: Untersuchung einer Logarithmusfunktion
3. Bemerkung: Es handelt sich um eine traditionelle, innermathematische Aufgabe.

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB			Erbrachte Leistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
a)	Definitionsbereich: $D_f =]-3; 3[$	2				
b)	Nachweis der Punktsymmetrie von G_f über $f(x) = -f(-x)$.	2				
	Nullstellen: $f(x) = 0$ liefert $x_N = 0$ als einzige Nullstelle von f.	2				
	Extrempunkte: $f'(x) = \frac{6}{9-x^2}$ Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ $f'(x)$ besitzt keine Nullstelle, es gibt also keine Extrempunkte.		3			
	Wendepunkte: $f''(x) = \frac{12x}{(9-x^2)^2}$ Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$ $x_W = 0$, $f(0) = 0$, $W(0\|0)$	4				
c)	Zeichnung von G_f: und G_g. *(s. komplette Zeichnung bei Teil f)*		5			
	Berechnung der Schnittstellen: Der Ansatz $f(x_S) = g(x_S)$ führt auf $x_S^2 - 7x_S + 6 = 0$. Lösungen $x_{S1} = 1$, $x_{S2} = 6 \notin D_f$. Einsetzen liefert $S(1\|\ln(2))$.		6			
d)	Z. B. über den Ansatz $t(x) = mx + n$. $m = f'(1) = \frac{3}{4}$, $f(1) = \ln(2)$ $t(1) = \frac{3}{4} + n = \ln(2)$, daraus folgt: $t(x) = \frac{3}{4}x + \ln(2) - \frac{3}{4}$.		4			
	Zwischensumme	10	18	0		

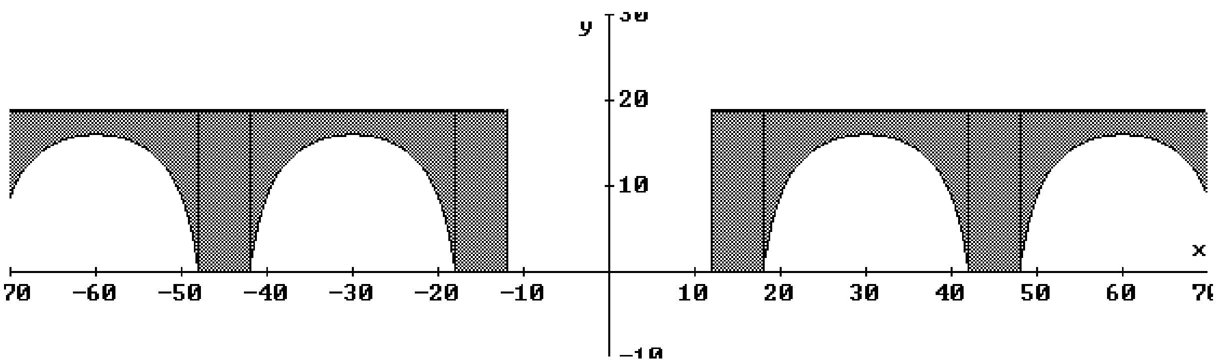
GK Mathematik ohne CAS - Analysis - **5. Logarithmusfunktion** - Erwartungshorizont

	Übertrag	10	18	0		Begutachtung
e)	Steigung der Normalen: $m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{4}{3}$ Parameterabhängiger Ansatz zur Berücksichtigung der Fläche: n(x) = $-\frac{4}{3}x + k$ Nullstelle von n: $-\frac{4}{3}x_N + k = 0 \Rightarrow$ $x_N = \frac{3k}{4}$ $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3k}{4} \cdot k = 6 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 4$ Zwei Lösungen: $h_{1,2}(x) = -\frac{4}{3}x \pm 4$ *(Die Angabe einer Lösung genügt.)*			5		
f)	Ergänzung der Zeichnung aus c) Komplette Zeichnung:  *(1 BE kann hier auch gegeben werden, wenn Gh ohne korrektes Ergebnis aus e) qualitativ richtig eingefügt wurde.)*	2				
	Summe	12	18	5		
	mögliche BE		35		erreichte BE:	

Grundkurs Mathematik ohne CAS - Analysis - 35 BE, ca. 60 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet.

6. Eisenbahnviadukt



Die Zeichnung stellt einen Eisenbahnviadukt dar, dessen mittlerer Bogen weggebrochen ist. Die Lage des Koordinatensystems ist dabei so gewählt, dass die y-Achse Symmetrieachse für den weggebrochenen Bogen ist und die x-Achse in Höhe der Oberkante des Sockels verläuft.

Alle Bögen haben eine Weite von 24 m und vom Sockel aus gemessen eine Höhe von 16 m. Der Fahrweg auf dem Viadukt ist 8 m breit An der obersten Stelle des Bogens ist der Viadukt bis zum Fahrweg noch 3 m dick.

Die Baufirma, die den Bauschutt des weggebrochenen Bogens entsorgen will, benötigt für ihren Kostenvoranschlag Informationen über die Menge dieses Bauschutts. Der fehlende Bogen kann durch eine Funktion h des Typs $h(x) = \frac{k}{x^2 - a} + 25$ mathematisch beschrieben werden.

Grundkurs Mathematik ohne CAS - Analysis - 35 BE, ca. 60 Min.

6. Eisenbahnviadukt

a) Bestimmen Sie die Konstanten a und k aus den gegebenen Abmessungen des Viaduktes, geben Sie die Funktionsgleichung, den maximalen Definitionsbereich $D_{\max}$ und den auf die Darstellung des Bogens beschränkten Definitionsbereich $D_{Viadukt}$ von h an.
(*Zur Kontrolle Ihrer Rechnung: a = 225, k = 2025)*

b) Begründen Sie möglichst ohne zusätzliche Rechnungen, dass h keine weiteren Nullstellen außer 12 und -12 besitzen kann. Zeigen Sie, dass der Graph von h außer $\mathrm{H}(0 \mid 16)$ keinen weiteren relativen Extrempunkt besitzen kann.
Ergänzen Sie den möglichen Verlauf des Graphen von h für ein sinnvolles Intervall von $D_{\max}$ in dem beigefügten Koordinatensystem.

c) Durch $H(x) = \frac{135}{4} \cdot \ln\left(\frac{x-15}{x+15}\right)^2 + 25x$ ist eine Stammfunktion für h gegeben
(Ein Nachweis ist nicht erforderlich).
Bestimmen Sie zunächst die Fläche unter einem Bogen des Viadukts ab Sockelhöhe aufwärts. Berechnen Sie anschließend die sichtbare Seitenfläche eines Bogens.
(*Zur Kontrolle Ihrer Rechnung*: $A_{Seite} = 270 \cdot \ln(3) - 144 \approx 153$ *in* m^2)

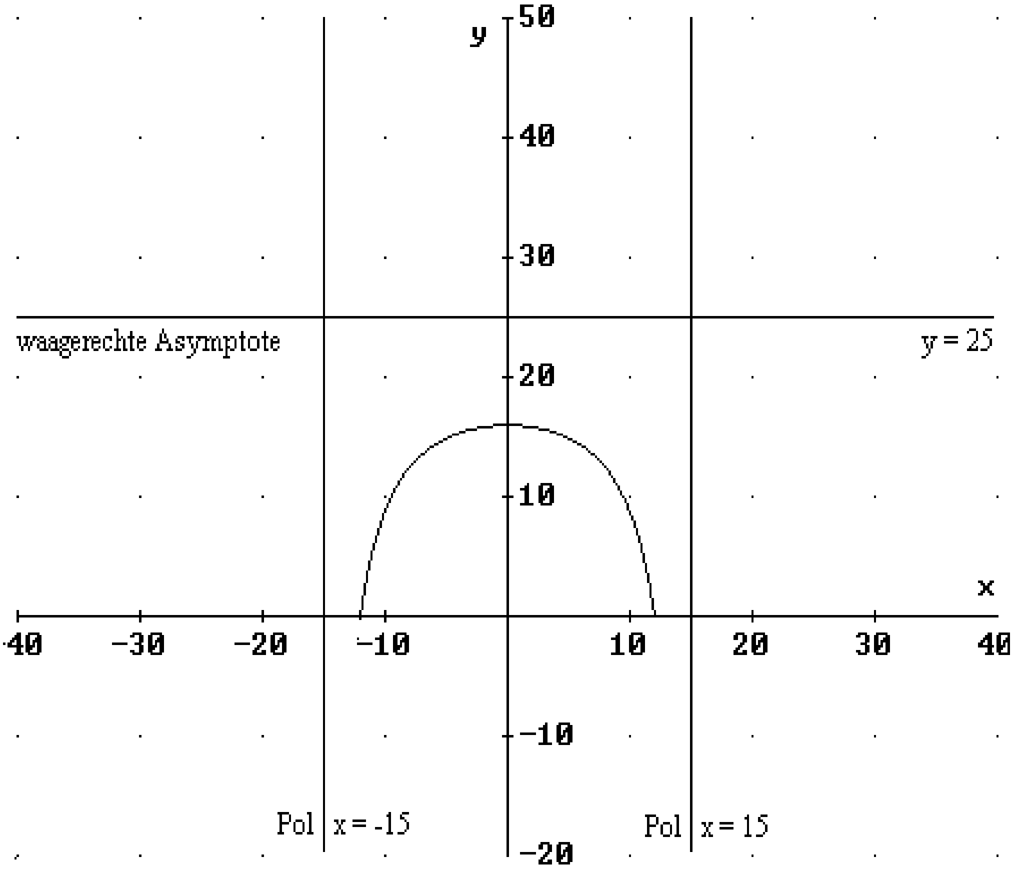
d) Berechnen Sie das Volumen des Bauschutts und seine Masse.
(Klinkersteine besitzen eine Masse von ca. 2 Tonnen pro Kubikmeter. Gehen Sie - etwas unrealistisch - davon aus, dass die Brücke massiv ohne Hohlräume gebaut wurde.)

e) Untersuchen Sie, welche Bedingung die beiden Parameter k und a erfüllen müssen, damit h zwei Nullstellen, eine bzw. keine Nullstelle besitzt.

Grundkurs Mathematik ohne CAS - Analysis - 35 BE, ca. 60 Min.

6. Eisenbahnviadukt

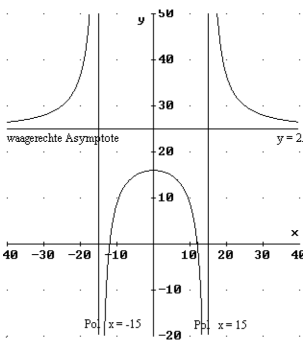
Koordinatensystem für Aufgabenteil b)



GK Mathematik ohne CAS - Analysis - **6. Eisenbahnviadukt** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurse: ma-1, ma-2 und ma-4
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte:
   Rekonstruktion, Extremalprobleme, Modellieren und Lösen von Sachproblemen mit komplexen funktionalen Zusammenhängen.
3. Bemerkung:
   Es handelt sich um keine traditionelle Prüfungsaufgabe. Es wird einerseits Modellierung erwartet, andererseits können auch Prüflinge, die diese Leistung nicht erbringen, aufgrund des Aufbaus der Aufgabe diese auch bearbeiten.

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB			Erbrachte Leistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
a)	Verwenden der zwei Bedingungen h(0) = 16 und h(12) = 0 zum Aufstellen eines Gleichungssystems		4			
	Lösen des Gleichungssystems und Angabe von $h(x)=\frac{2025}{x^2-225}+25$		5			
	$D_{max} = R \setminus \{-15;15\}$	2				
	$D_{Viadukt} = [-12;12]$	1				
b)	Feststellen, dass h(x) = 0 auf eine quadratische Gleichung führt, so dass maximal zwei Lösungen existieren.		3			
	Berechnung von $h'(x)=-\frac{4050x}{(x^2-225)^2}$ mit Begründung dafür, dass es keine weiteren Extrempunkte geben kann, weil die notwendige Bedingung h'(x) = 0 nur die Lösung null besitzt.	4				
	Skizze des Graphen ohne Widerspruch zu den bekannten Eigenschaften von h in das Koordinatensystem 		4			
	Zwischensumme	7	16	0		

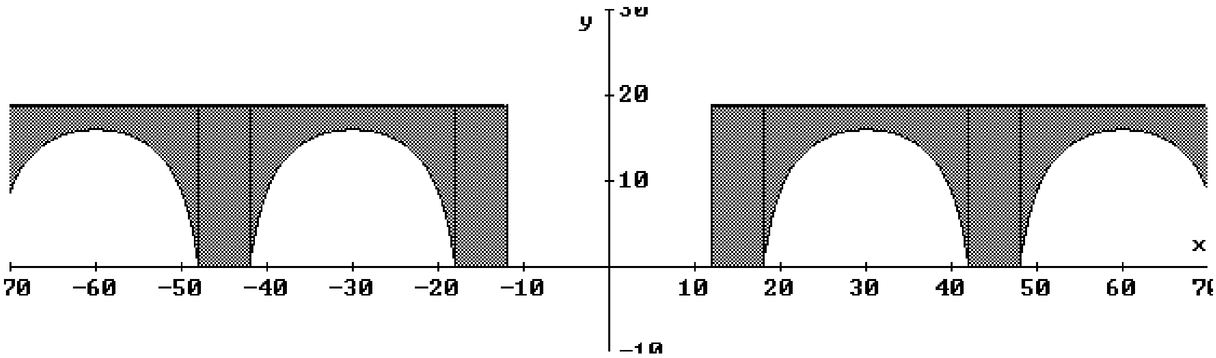
GK Mathematik ohne CAS - Analysis - **6. Eisenbahnviadukt** - Erwartungshorizont

	Übertrag	7	16	0		Begutachtung
c)	Ansatz unter Nutzung der Symmetrie $A = 2 \cdot \int_0^{12} h(x)dx$ und Berechnung von $A = 600 - 270 \cdot \ln 3 \approx 303$	5				
d)	$A_{Seite} = 24 \cdot (16+3) - (600 - 270 \cdot \ln 3)$ bzw. $A_{Seite} \approx 153$ (m²) $V \approx 153 \cdot 8 = 1224$ (m³) $m \approx 1224 \cdot 2 = 2448$ (Tonnen)		3			
e)	- Keine Lösung für k = 0 sowie für k > 25a - eine Lösung für k = 25a - zwei Lösungen für k < 25a			4		
	Summe	12	19	4		
	mögliche BE	35			erreichte BE:	

Grundkurs Mathematik mit CAS - Analysis - 35 BE, ca. 60 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet. Notieren Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

7. Eisenbahnviadukt



Die Zeichnung stellt einen Eisenbahnviadukt dar, dessen mittlerer Bogen weggebrochen ist. Die Lage des Koordinatensystems ist dabei so gewählt, dass die y-Achse Symmetrieachse für den weggebrochenen Bogen ist und die x-Achse in Höhe der Oberkante des Sockels verläuft.

Alle Bögen haben eine Weite von 24 m und vom Sockel aus gemessen eine Höhe von 16 m. Der Fahrweg auf dem Viadukt ist 8 m breit An der obersten Stelle des Bogens ist der Viadukt bis zum Fahrweg noch 3 m dick.

Die Baufirma, die den Bauschutt des weggebrochenen Bogens entsorgen will, benötigt für ihren Kostenvoranschlag Informationen über die Menge dieses Bauschutts. Der fehlende Bogen kann durch eine Funktion h des Typs $h(x) = \dfrac{k}{x^2 - a} + 25$ mathematisch beschrieben werden. Die Lage des Koordinatensystems ist dabei so gewählt, dass die y-Achse Symmetrieachse für den Bogen ist und die x-Achse in Höhe der Oberkante des Sockels verläuft.

Grundkurs Mathematik mit CAS - Analysis - 35 BE, ca. 60 Min.

7. Eisenbahnviadukt

a) Bestimmen Sie die Konstanten a und k aus den gegebenen Abmessungen des Viaduktes, geben Sie die Funktionsgleichung, den maximalen Definitionsbereich $D_{\max}$ und den auf die Darstellung des Bogens beschränkten Definitionsbereich $D_{Viadukt}$ von h an.
(*Zur Kontrolle Ihrer Rechnung: a = 225, k = 2025)*

b) Begründen Sie ohne zusätzliche Rechnungen, dass h keine weiteren Nullstellen außer 12 und -12 besitzen kann. Begründen Sie, dass der Graph von h keinen weiteren relativen Extrempunkt außer $H(0|16)$ und keine Wendepunkte besitzen kann. Zeichnen Sie den Verlauf des Graphen von h für ein sinnvolles Intervall von D_{max} einschließlich aller Asymptoten in das beigefügte Koordinatensystem.

c) Bestimmen Sie die Fläche unter einem Viaduktbogen ab Sockelhöhe aufwärts.
Berechnen Sie die sichtbare Seitenfläche eines Bogens.
(Zur Kontrolle Ihrer Rechnung: $A_{Seite} = 270 \cdot \ln 3 - 144 \approx 153$ *in* m^2)

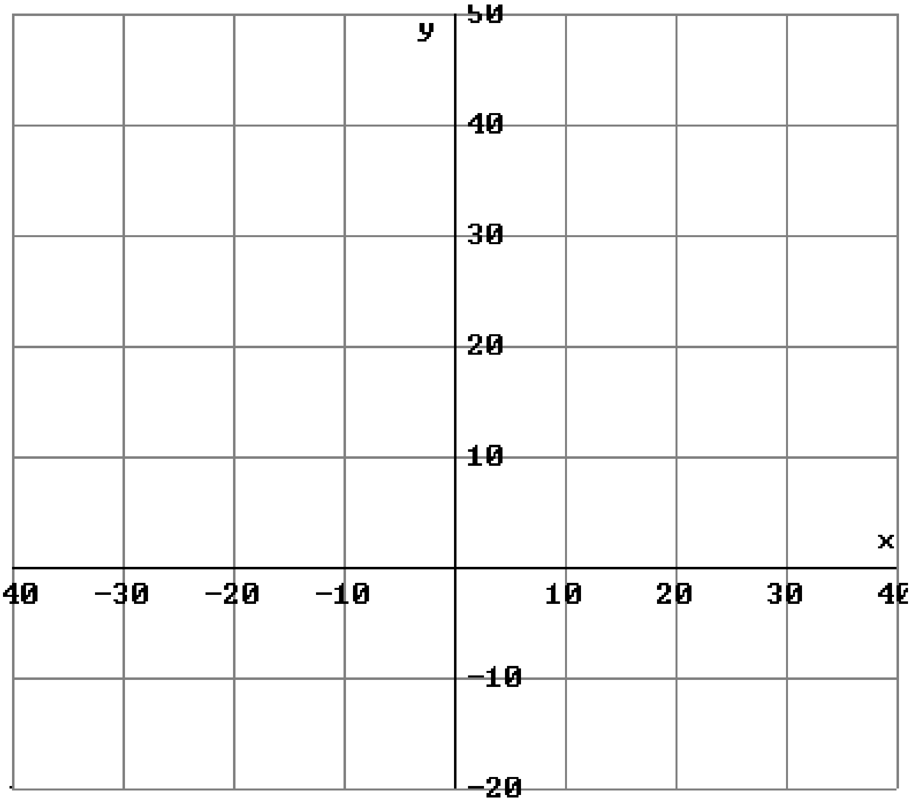
d) Berechnen Sie das Volumen des Bauschutts und seine Masse.
(Klinkersteine besitzen eine Masse von ca. 2 Tonnen pro Kubikmeter. Gehen Sie - etwas unrealistisch - davon aus, dass die Brücke massiv ohne Hohlräume gebaut wurde.)

e) Die von Ihnen ermittelte Funktion h besitzt genau die zwei Nullstellen 12 und -12.
Untersuchen Sie, welche Bedingung die beiden Parameter k und a erfüllen müssen, damit die Funktion h zwei Nullstellen, eine bzw. keine Nullstelle besitzt.

Grundkurs Mathematik mit CAS - Analysis - 35 BE, ca. 60 Min.

7. Eisenbahnviadukt

Koordinatensystem für Aufgabenteil b)



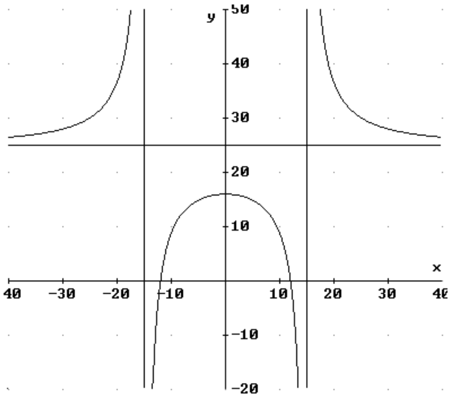
GK Mathematik mit CAS - Analysis - **7. Eisenbahnviadukt** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurse: ma-1, ma-2 und ma-4
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte:
   Rekonstruktion, Extremalprobleme, Modellieren und Lösen von Sachproblemen mit komplexen funktionalen Zusammenhängen.
3. Bemerkung:
   Es handelt sich um keine traditionelle Prüfungsaufgabe. Es wird einerseits Modellierung erwartet, andererseits können auch Prüflinge, die diese Leistung nicht erbringen, aufgrund des Aufbaus der Aufgabe diese auch bearbeiten.

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB			Erbrachte Leistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
a)	Verwenden der zwei Bedingungen h(0) = 16 und h(12) = 0 zum Aufstellen eines nicht linearen Gleichungssystems		4			
	Lösen des Gleichungssystems und Angabe von $h(x) = \frac{2025}{x^2 - 225} + 25$	2				
	$D_{max} = R \setminus \{-15;15\}$	2				
	$D_{Viadukt} = [-12;12]$	1				
b)	Feststellen, dass h(x) = 0 auf eine quadratische Gleichung führt und somit maximal zwei Lösungen existieren können.		3			
	Angabe von $h'(x) = -\frac{4050x}{(x^2-225)^2}$ und von $h''(x) = \frac{12150 \cdot (x^2 + 75)}{(x^2 - 225)^3}$	2				
	Begründung, dass es keine weiteren Extrempunkte geben kann, weil die notwendige Bedingung h'(x) = 0 nur die Lösung null besitzt.		2			
	Begründung, dass es keine Wendepunkte geben kann, weil die notwendige Bedingung h''(x) = 0 für $x \neq \pm 15$ äquivalent zu $x^2 + 75 = 0$ ist und diese Gleichung keine Lösung besitzt.		4			
	Zwischensumme	7	13	0		

GK Mathematik mit CAS - Analysis - **7. Eisenbahnviadukt** - Erwartungshorizont

	Übertrag	7	13	0		Begutachtung
noch b)	Saubere Zeichnung durch Übertrag des Graphenverlaufs vom Rechner in das beigefügte Koordinatensystem sowie Einzeichnen der waagrechten Asymptote und der beiden Polgeraden.  	6				
c)	Ansatz z. B. $A = \int_{-12}^{12} h(x)dx$ und Angabe von $A = 600 - 270 \cdot \ln 3 \approx 303$	2				
d)	$A_{Seite} = 24 \cdot (16+3) - (600 - 270 \cdot \ln 3)$ bzw. $A_{Seite} \approx 153 \ (m^2)$ $V \approx 153 \cdot 8 = 1224 \ (m^3)$ $m \approx 1224 \cdot 2 = 2448$ (Tonnen)		3			
e)	- Keine Lösung für k = 0 sowie für k > 25a - eine Lösung für k = 25a - zwei Lösungen für k > 25a			4		
	Summe	15	16	4		
	mögliche BE		35		erreichte BE:	

Grundkurs Mathematik ohne CAS - Stochastik - 35 BE, ca. 60 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet.

8. Betriebsfeier

Für eine Betriebsfeier werden zwei Glücksspiele in die engere Wahl gezogen. Jeder Mitarbeiter darf die ausgewählte Variante einmal spielen.

Variante 1:

Aus einer Urne mit 20 weißen und 30 schwarzen Kugeln werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

a) Eine Person zieht zwei Kugeln ohne Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen Kugeln mindestens eine weiße Kugel ist?

b) Für jede gezogene weiße Kugel gibt es ein Geschenk im Wert von 10 €, für eine schwarze Kugel nur ein Geschenk im Wert von 5 €. Mit welcher durchschnittlichen Ausgabe pro Mitarbeiter muss die Firmenleitung rechnen?

c) Da die Firma gute Geschäfte gemacht hat, beschließt die Leitung, den Gewinn für das Ziehen einer weißen Kugel so abzuändern, dass durchschnittlich 40 € pro Mitarbeiter als Spielgewinn ausgeschüttet werden. Berechnen Sie, welchen Wert muss das Geschenk beim Ziehen einer weißen Kugel jetzt haben?

Variante 2:

Zuerst wird ein Würfel geworfen, bei dem 4 Seiten mit „1“ und 2 Seiten mit „2“ gekennzeichnet sind. Erscheint die „1“, darf der Kandidat aus einer Urne mit 7 weißen und 3 schwarzen Kugeln zweimal ohne Zurücklegen ziehen. Erscheint beim Würfel hingegen die „2“, muss zweimal ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 3 weißen und 7 schwarzen Kugeln gezogen werden. Man gewinnt, wenn zwei weiße Kugeln gezogen werden.

d) Weisen Sie nach: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Glückspilz bei dieser Variante zwei weiße Kugeln zieht, ist gleich $\frac{1}{3}$.

e) Die fünf Mitglieder der Geschäftsleitung spielen. Beschreiben Sie den Lösungsweg und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für die drei Ereignisse
A: Genau 2 Geschäftsführer gewinnen
B: Mindestens ein Geschäftsführer gewinnt
C: Bei 2 unmittelbar aufeinander folgenden Spielen treten stets unterschiedliche Ergebnisse auf (Gewinn oder Verlust).

f) Anschließend spielen die übrigen 100 Mitarbeiter der Firma auch mit. Berechnen Sie:
- Wie viele Gewinnfälle sind insgesamt unter allen Mitarbeitern und der Geschäftsführung zu erwarten?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 100 Mitarbeitern der Firma ohne die Mitglieder der Geschäftsleitung mehr als 35 Gewinner sind?

GK Mathematik ohne CAS - Stochastik - **8. Betriebsfeier** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurse: Q2 (Stochastik II)
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte: Baumdiagramme, Bernoulli-Kette, Erwartungswert
3. Bemerkung: In allen Aufgabenteilen sollen Modellbildung und Ansätze begründet und verwendete Formeln und Tabellen erläutert werden.

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB			Erbrachte Leistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
a)	W: Weiße Kugel wird gezogen; S: Schwarze Kugel wird gezogen Baumdiagramm oder direkte Rechnung: $P(S\|S) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$; P(mindestens eine weiße Kugel) = $= 1 - 0{,}16 = 0{,}84$	3				
b)	W|W tritt ein mit der Wahrscheinlichkeit 36 %: Auszahlung 20 € W|S oder S|W tritt ein mit der Wahrscheinlichkeit 48 %: Auszahlung 15 € S|S tritt ein mit der Wahrscheinlichkeit 16 %: Auszahlung 10 € Durchschnittliche Auszahlung: 0,36·20 € + 0,48·15 € + 0,16·10 €=16 €		4			
c)	Für eine weiße Kugel werden x Euro ausgezahlt. W|W tritt ein mit der Wahrscheinlichkeit 36 %: Auszahlung 2x € W|S oder S|W tritt ein mit der Wahrscheinlichkeit 48 %: Auszahlung (x + 5) € S|S tritt ein mit der Wahrscheinlichkeit 16 %: Auszahlung 10 € Durchschnittliche Auszahlung: $0{,}36 \cdot 2x + 0{,}48 \cdot (x+5) + 0{,}16 \cdot 10 = 40$ $x = 30$		6			
	Zwischensumme	3	10	0		

GK Mathematik <u>ohne</u> CAS - Stochastik - **8. Betriebsfeier** - Erwartungshorizont

	Übertrag	3	10	0		Begutachtung
d)	1, 2: Anzeige des Würfels; W: Weiße Kugel wird gezogen; S: Schwarze Kugel wird gezogen G: Gewinn; Baumdiagramm oder direkte Rechnung: $P(1\|W\|W) = \frac{4}{6}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9} = \frac{14}{45}$, $P(2\|W\|W) = \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9} = \frac{1}{45}$, $P(G) = \frac{14}{45} + \frac{1}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$	6				
e)	Bernoulli – Formel angeben, Kenngrößen n = 5 und p = $\frac{1}{3}$ benennen; X: Anzahl der Gewinner A: k = 2: $P(X = 2) = \binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$ B: $k \geq 1$: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) =$ $1-\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{211}{243}$ C: $C = \{ G\bar{G}G\bar{G}G, \bar{G}G\bar{G}G\bar{G} \}$, $P(C) = \left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{12}{243}$	3 2	2 4			
f)	X: Anzahl der Gewinner unter den Mitarbeitern und der Geschäftsführung; Bernoulli – Kette mit n = 105; E(X) = 35 Y: Anzahl der Gewinner unter den Mitarbeitern; Bernoulli – Kette mit n = 100; p = $\frac{1}{3}$ $P(Y > 35) = 1 - P(Y \leq 35) =$ $= 1 - 0{,}6803 = 0{,}3197$	2	3			
	Summe	16	19	0		
	mögliche BE		35		erreichte BE:	

Leistungskurs Mathematik ohne CAS - Stochastik - 40 BE, ca. 80 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet.

9. Fertighäuser

Eine Fertighausfirma stellt Einfamilienhäuser her und verkauft mit besonderem Erfolg den Haustyp „Belvedere" mit 115 m^2 Wohnfläche, der für Familien mit zwei bis drei Kindern sehr geeignet ist. Deshalb wird „Belvedere" als Typ A mit zwei oder als Typ B mit drei Kinderzimmern angeboten.

Begründen Sie bitte bei der Bearbeitung der folgenden Aufgaben stets Ihre Modellbildung!

a) Bauherren, die sich für das Haus Belvedere entscheiden, wählen zu 17,3 % den Typ B. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen von den nächsten 20 Kunden genau acht das Haus Typ B und höchstens 19 das Haus Typ A bestellen.

b) Zur Auswahl der Tapeten, Fliesen und sonstiger Ausstattungen werden 10 Bauherren für einen Tag in ein Bemusterungszentrum eingeladen. Jeder Bauherr benötigt durchschnittlich 24 Minuten pro Stunde einen Berater.
   - Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei vier vorhandenen Beratern mindestens ein Berater frei ist, wenn ein Bauherr eine Beratung wünscht.
   - Ermitteln Sie die Anzahl der Berater, die sich im Bemusterungszentrum befinden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % ein Berater zur Verfügung steht, wenn eine Beratung gewünscht wird.

c) Die Firma überlegt, ob eine alternativ wählbare ökologische Wärmedämmung aus Hanf ins Programm aufgenommen werden sollte. Dies gilt als wirtschaftlich, wenn mindestens 20 % der Bauherren diese Wärmedämmung bestellen.
   - Bei einer Umfrage während einer Ausstellung von Musterhäusern geben von 358 zukünftigen Bauherren 73 an, eine Wärmedämmung aus Hanf bestellen zu wollen. Die Fertighausfirma wünscht eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,5 %. Berechnen Sie aus dem Umfrageergebnis ein Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil derjenigen Hauskäufer, die eine Wärmedämmung aus Hanf bestellen würden und treffen Sie eine begründete Entscheidung darüber, ob die Firma die Wärmedämmung anbieten wird.
   - Untersuchen Sie, ob die Entscheidung anders ausfällt, wenn sich die Firma mit einem Sicherheitsniveau von 68 % begnügt.
   - Erläutern Sie, welcher Zusammenhang zwischen der Breite eines Konfidenzintervalls und dessen bestimmenden Größen besteht. Begründen Sie, welche Größe den entscheidenden Einfluss auf das Konfidenzintervall hat.

LK Mathematik <u>ohne</u> CAS - Stochastik - **9. Fertighäuser** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

4. Bezugskurse: MA-2, MA-4 (Stochastik II)
5. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte: Bernoulli-Kette, Binomialverteilung, Konfidenzintervalle
6. Bemerkung: In allen Aufgabenteilen sollen Modellbildung und Ansätze begründet und verwendete Formeln und Tabellen erläutert sein.

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB I	BE in AFB II	BE in AFB III	Erbrachte Leistung BE	Erbrachte Leistung Begutachtung
a)	Modellbildung: Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette; Angabe von $B(n;p;k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ und Zuordnung der gegebenen Daten zu den Größen der Bernoulli-Formel	4				
	$P(X=8)=B(20;0{,}173;8)\approx 0{,}0103$ *(Tabellen enthalten nicht p = 0,173.)*	3				
	Verwenden des Gegenereignisses: $P(X\le 19)=1-B(20;0{,}827;20)$ $P(X\le 19)\approx 0{,}9776$	3				
b)	Vorausgesetzt wird, dass kein Bauherr eine ungewöhnlich lange oder kurze Beratungszeit benötigt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Berater benötigt wird, beträgt 0,4.	2				
	Höchstens vier Bauherren können gleichzeitig beraten werden. $P(X\le 4)=\sum_{k=0}^{4}B(10;0{,}4;k)\approx 0{,}6331$		3			
	Gesucht ist das minimale k mit $P(X\le k)\ge 0{,}9$. k muss schrittweise erhöht werden, bis 0,9 erreicht oder überschritten ist.		2			
	$P(X\le 6)=\sum_{k=0}^{6}B(10;0{,}4;k)\approx 0{,}9452$ Es müssen 6 Berater zur Verfügung stehen.		2			
	Zwischensumme	12	7	0		

LK Mathematik ohne CAS - Stochastik - **9. Fertighäuser** - Erwartungshorizont

	Übertrag	12	7	0		Begutachtung
c)	Die Wahrscheinlichkeit ist unbekannt und soll abgeschätzt werden. Begründung und Erläuterung des Ansatzes $\left\|\frac{X}{n}-p\right\| \le \frac{2\sigma}{n}$.		3			
	Der Ansatz $\left\|\frac{73}{358}-p\right\| \le 2\cdot\frac{\sqrt{358\cdot p\cdot(1-p)}}{358}$ führt auf $362p^2-150p+\frac{73^2}{358} \le 0$.		4			
	Lösen der quadratischen Ungleichung ergibt das Konfidenzintervall: $16{,}47\ \% \le p \le 24{,}97\ \%$. p liegt also zwischen 16 % und 25 %.		4			
	Obwohl ca. 20 % der Befragten zugestimmt haben, kann die notwendige Bestellmenge nicht mit der geforderten Sicherheit erwartet werden, da Werte unter 20 % im Konfidenzintervall liegen.		2			
	Da bei dem geforderten Sicherheitsniveau von 68 % $18{,}35\% \le p \le 22{,}60\%$ gilt, fällt die Entscheidung nicht anders aus.		2			
	Die Breite eines Konfidenzintervalles hängt von der Sicherheitswahrscheinlichkeit und vom Stichprobenumfang ab. Sie kann verringert werden, wenn bei gegebenem Stichprobenumfang die Sicherheitswahrscheinlichkeit herabgesetzt oder wenn man bei gegebener Sicherheitswahrscheinlichkeit der Stichprobenumfang erhöht wird. Die ermittelte relative Häufigkeit hat den wesentlichen Einfluss. Sie muss deutlich über der gewünschten Wahrscheinlichkeit liegen. Wenn nicht wesentlich mehr als 20 % der Befragten bei der Umfrage zustimmen, enthält das Konfidenzintervall immer Werte unter 20 %.			6		
	Summe	12	22	6		
	mögliche BE	40			erreichte BE:	

Leistungskurs Mathematik mit CAS - Stochastik - 40 BE, ca. 80 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet. Notieren Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

10. Fertighäuser

Eine Fertighausfirma stellt Einfamilienhäuser her und verkauft mit besonderem Erfolg den Haustyp „Belvedere" mit 115 m^2 Wohnfläche, der für Familien mit zwei bis drei Kindern sehr geeignet ist. Deshalb wird „Belvedere" als Typ A mit zwei oder als Typ B mit drei Kinderzimmern angeboten.

Begründen Sie bitte bei der Bearbeitung der folgenden Aufgaben stets Ihre Modellbildung!

a) Bauherren, die sich für das Haus „Belvedere" entscheiden, wählen zu 17,3 % den Typ B. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen von den nächsten 20 Kunden genau 8 das Haus Typ B und höchstens 13 das Haus Typ A bestellen.

b) Zur Auswahl der Tapeten, Fliesen und sonstiger Ausstattungen werden 10 Bauherren für einen Tag in ein Bemusterungszentrum eingeladen. Jeder Bauherr benötigt durchschnittlich 25 Minuten pro Stunde einen Berater.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei vier vorhandenen Beratern mindestens ein Berater frei ist, wenn ein Bauherr eine Beratung wünscht.
- Ermitteln Sie die Anzahl der Berater, die sich im Bemusterungszentrum befinden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % ein Berater zur Verfügung steht, wenn eine Beratung gewünscht wird.

c) Die Firma überlegt, ob eine alternativ wählbare ökologische Wärmedämmung aus Hanf ins Programm aufgenommen werden sollte. Dies gilt als wirtschaftlich, wenn mindestens 15 % der Bauherren diese Wärmedämmung bestellen.

- Bei einer Umfrage während einer Ausstellung von Musterhäusern geben von 358 zukünftigen Bauherren 54 an, eine Wärmedämmung aus Hanf bestellen zu wollen. Die Fertighausfirma wünscht eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,5 %. Berechnen Sie aus dem Umfrageergebnis ein Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil derjenigen Hauskäufer, die eine Wärmedämmung aus Hanf bestellen würden und treffen Sie eine begründete Entscheidung, ob die Firma die Wärmedämmung anbieten wird.
- Erläutern Sie, welcher Zusammenhang zwischen der Breite eines Konfidenzintervalls, der zugehörigen Sicherheitswahrscheinlichkeit und dem Stichprobenumfang besteht.
- Untersuchen Sie, ob die Entscheidung anders ausfällt, wenn die Firma sich mit einem Sicherheitsniveau von 68 % begnügt. Begründen Sie, warum auch bei geringer Sicherheitswahrscheinlichkeit die Entscheidung der Firma nur lauten kann, den Dämmstoff Hanf nicht ins Programm aufzunehmen. Ermitteln Sie, wie viele Bauherren mindestens bei einer Befragung den Dämmstoff bevorzugen müssten, damit dieser angeboten würde.

LK Mathematik mit CAS - Stochastik - **10. Fertighäuser** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurse: MA-2, MA-4 (Stochastik II)
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte: Bernoulli-Kette, Binomialverteilung, Konfidenzintervalle
3. Bemerkung: In allen Aufgabenteilen sollen Modellbildung und Ansätze begründet und verwendete Formeln und Tabellen erläutert sein.

Aufga-benteil	Erwartete Leistung	BE in AFB I	II	III	Erbrachte Leistung BE	Begutachtung
a)	Modellbildung: Bernoulli-Experiment, Bernoulli-Kette; Angabe von $B(n;p;k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ und Zuordnung der gegebenen Daten zu den Größen der Bernoulli-Formel	4				
	$P(X=8)=B(20;0{,}173;8)\approx 0{,}0103$ *(Tabellen enthalten nicht p = 0,173.)*	3				
	Verwenden des Gegenereignisses: $P(X\le 13)=\sum_{k=0}^{13} B(20;0{,}827;k)$ $P(X\le 13)\approx 0{,}0445$	3				
b)	Vorausgesetzt wird, dass kein Bauherr eine ungewöhnlich lange oder kurze Beratungszeit benötigt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Berater benötigt wird, beträgt $\frac{5}{12}$.	2				
	Höchstens vier Bauherren können gleichzeitig beraten werden. $P(X\le 4)=\sum_{k=0}^{4} B(10;\frac{5}{12};k)\approx 0{,}5908$		2			
	Gesucht ist das minimale k mit $P(X\le k)\ge 0{,}9$. k muss schrittweise erhöht werden, bis 0,9 erreicht oder überschritten ist.		2			
	$P(X\le 6)=\sum_{k=0}^{6} B(10;\frac{5}{12};k)\approx 0{,}9318$ Es müssen 6 Berater zur Verfügung stehen.		2			
	Zwischensumme	12	6	0		

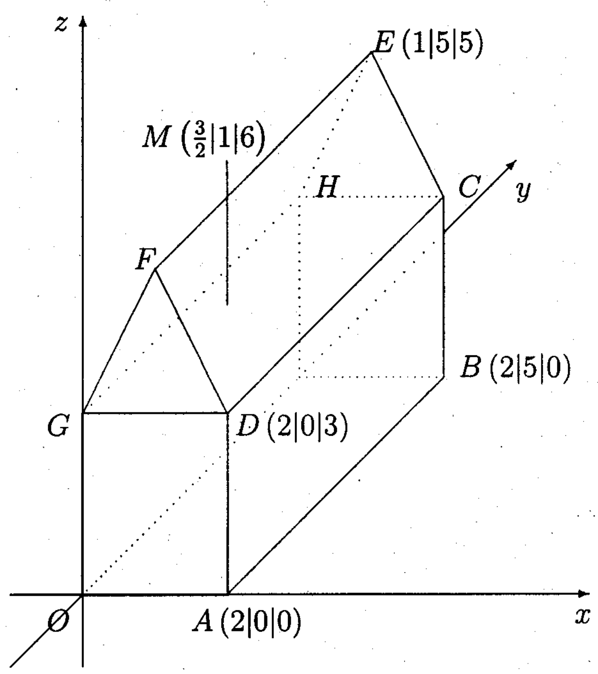
LK Mathematik mit CAS - Stochastik - **10. Fertighäuser** - Erwartungshorizont

	Übertrag	12	6	0		Begutachtung
c)	Die Wahrscheinlichkeit ist unbekannt und soll abgeschätzt werden. Begründung und Erläuterung des Ansatzes $\left\lvert \frac{X}{n} - p \right\rvert \le \frac{2\sigma}{n}$.		3			
	Der Ansatz $\left\lvert \frac{54}{358} - p \right\rvert \le 2 \cdot \frac{\sqrt{358 \cdot p \cdot (1-p)}}{358}$ führt auf $362p^2 - 112p + \frac{54^2}{358} \le 0$.		3			
	Lösen der quadratischen Ungleichung ergibt das Konfidenzintervall: $11{,}69\ \% \le p \le 19{,}25\ \%$ p liegt also zwischen 11 % und 20 %.		3			
	Obwohl ca. 15 % der Befragten zugestimmt haben, kann die notwendige Bestellmenge nicht mit der geforderten Sicherheit erwartet werden, da Werte unter 15 % im Konfidenzintervall liegen.		2			
	Da bei dem geforderten Sicherheitsniveau von 68 % $13{,}29\,\% \le p \le 17{,}07\,\%$ gilt, fällt die Entscheidung nicht anders aus.		2			
	Die Breite eines Konfidenzintervalles hängt von der Sicherheitswahrscheinlichkeitund vom Stichprobenumfang ab. Sie kann verringert werden, wenn bei gegebenem Stichprobenumfang die Sicherheitswahrscheinlichkeit herabgesetzt oder wenn man bei gegebener Sicherheitswahrscheinlichkeit der Stichprobenumfang erhöht wird.		3			
	Wenn nicht wesentlich mehr als 15 % der Befragten bei der Umfrage zustimmen, enthält das Konfidenzintervall immer Werte unter 15 %. Ermitteln der minimalen Anzahl: bei 61 „Hanffreunden“ unter 358 Befragten und einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 68 % ergibt sich $15{,}14\,\% \le p \le 19{,}12\,\%$.			6		
	Summe	12	22	6		
	mögliche BE	40			erreichte BE:	

Leistungskurs Mathematik ohne CAS - Analytische Geometrie - 40 BE, ca. 80 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet.

11. Dachantenne



(nicht maßstabsgerechtes) Schrägbild eines Hauses

a) Geben Sie für die vier Wandebenen E_{vorne}, E_{hinten}, E_{links} und E_{rechts} und für die zwei Ebenen E_1 und E_2 der Dachschrägen jeweils eine Gleichung in Normalenform an und berechnen Sie das Maß des Winkels zwischen E_1 und E_2.

b) Bestimmen Sie das Volumen des Hauses.

c) Berechnen Sie die Länge der Antenne von der Spitze M bis zur Dachschräge.

d) Untersuchen Sie, ob die Antennenspitze M vom Punkt $P(3|1|0)$ sichtbar ist.

e) Die Sonne scheint in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$, $z < 0$. M' ist der Schatten der Antennenspitze M.

Bestimmen Sie die Koordinaten von M' in Abhängigkeit von z, führen Sie eine sinnvolle Fallunterscheidung durch.

LK Mathematik ohne CAS - Analytische Geometrie - **11. Dachantenne** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurs: MA-3 Analytische Geometrie
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte:
   Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene, Ebenengleichungen, Anwendung des Skalar- und Vektorprodukts, Winkel- und Abstandsberechnungen.
3. Bemerkung: Die Aufgabe fordert ein hohes Maß an Vorstellungsvermögen. Geometrische Sachverhalte müssen neu mit den Rechenverfahren und deren Ergebnissen verknüpft werden, umgekehrt müssen diese gewinnbringend interpretiert werden

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB I	II	III	Erbrachte Leistung BE	Begutachtung
a)	$E_v : \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0,\ E_h : \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 5,$ $E_l : \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0,\ E_r : \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 2.$	2				
	Angabe von Richtungsvektoren für E_1 und E_2 und Bestimmung von Normalenformen, z. B. E_1: -2x + z = 3, E_2: 2x + z = 7.	6				
	$\cos\varphi = \frac{\lvert\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert \cdot \lvert\vec{n}_2\rvert},\ \cos\varphi = \frac{3}{5},\ \varphi \approx 53°$	3				
b)	$V = V_{Quader} + V_{Prisma}$ $V = 40\,VE$	3				
c)	Eine Trägergerade der Antenne ist $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1{,}5\\1\\6\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ k \in R.$ Der Schnittpunkt von g mit E_2 ist S(1,5|1|4), die Länge der Antenne beträgt l = 2 LE.		6			
	Zwischensumme	14	6	0		

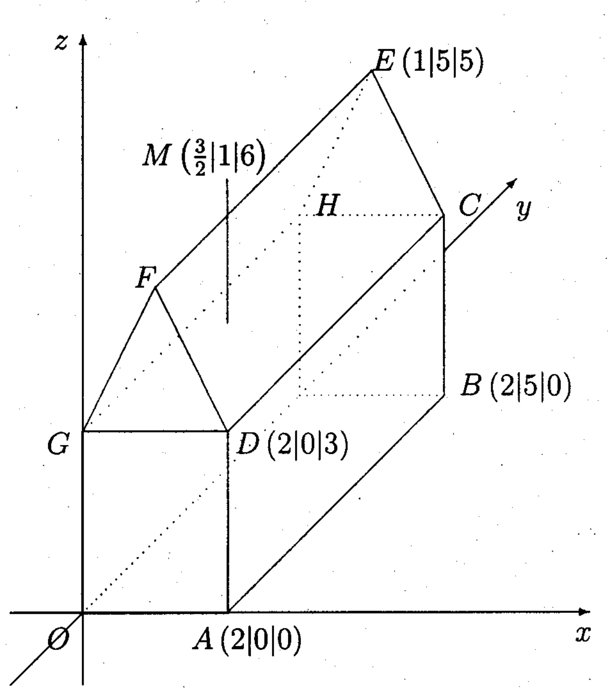
LK Mathematik <u>ohne</u> CAS - Analytische Geometrie - **11. Dachantenne** - Erwartungshorizont

	Übertrag	14	6	0		Begutachtung
d)	Richtungsvektor $\left\|\overrightarrow{MP}\right\|$ und Gleichung der Geraden durch P und M: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix},\ r \in R.$ Bestimmung des Schnittpunktes mit einer geeigneten Ebene, z. B. mit E_r : $T(2\|1\|4)$. Die Spitze M ist sichtbar, da T ($z_T = 4$) oberhalb der Dachkante $\overline{DC}$ ($z_{DC} = 3$) verläuft.		6			
e)	Gleichung für die Gerade s des Sonnenstrahls durch die Spitze M: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ z \end{pmatrix},\ u \in R.$ Wegen der positiven x-Koordinate des Richtungsvektors ist ein Schatten M' außer auf der x-y-Ebene nur auf der rechten Dachschräge möglich. Berechnung der Schnittpunkte in Abhängigkeit von z ergibt für $s \cap E_{xy}$ M' = $\left(\frac{3}{2} - \frac{12}{z} \middle\| 1 - \frac{6}{z} \middle\| 0\right)$.		5			
	$s \cap E_2$ ergibt M' = $\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{4+z} \middle\| 1 - \frac{2}{4+z} \middle\| 6 - \frac{2z}{4+z}\right)$.		4			
	Fallunterscheidung unter Beachtung der positiven x- und y-Koordinate des Richtungsvektors von s: M' liegt auf der Dachschräge, wenn gilt: $1{,}5 \le x_{M'} \le 2$ und $y_{M'} \le 5$. Ansonsten liegt M' in der x-y-Ebene. Somit liegt M' auf der Dachschräge für $z \le -12$ und in der x-y-Ebene für $z > -12$ (mit $z < 0$).			5		
	Summe	14	21	5		
	mögliche BE	40				erreichte BE:

Leistungskurs Mathematik mit CAS - Analytische Geometrie - 40 BE, ca. 80 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet. Notieren Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

12. Dachantenne



(nicht maßstabsgerechtes) Schrägbild eines Hauses

a) Geben Sie für die vier Wandebenen E_{vorne}, E_{hinten}, E_{links} und E_{rechts} und für die zwei Ebenen E_1 und E_2 der Dachschrägen jeweils eine Gleichung an und berechnen Sie das Maß des Winkels zwischen E_1 und E_2.

b) Bestimmen Sie das Volumen des Hauses.

c) Berechnen Sie die Länge der Antenne von der Spitze M bis zur Dachschräge.

d) Untersuchen Sie, ob die Antennenspitze M vom Punkt P(3|1|0) sichtbar ist.

e) Die Sonne scheint in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$, $z < 0$. M' ist der Schatten der Antennenspitze M.

Bestimmen Sie die Koordinaten von M' in Abhängigkeit von z, führen Sie eine sinnvolle Fallunterscheidung durch.

f) Untersuchen Sie, ob für z ein Wert existiert, sodass sich der Schatten M' auf der Regenrinne CD befindet.

LK Mathematik mit CAS - Analytische Geometrie - **12. Dachantenne** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurs: MA-3 Analytische Geometrie
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte:
   Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene, Ebenengleichungen, Anwendung des Skalar- und Vektorprodukts, Winkel- und Abstandsberechnungen.
3. Bemerkung: Die Aufgabe fordert ein hohes Maß an Vorstellungsvermögen. Geometrische Sachverhalte müssen neu mit den Rechenverfahren und deren Ergebnissen verknüpft werden, umgekehrt müssen diese gewinnbringend interpretiert werden

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB			Erbrachte Leistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
a)	$E_v : \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$, $E_h : \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 5$, $E_l : \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$, $E_r : \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 2$.	2				
	Angabe von Richtungsvektoren für E_1 und E_2 und Bestimmung von Normalenformen, z. B. E_1: $-2x + z = 3$, E_2: $2x + z = 7$.	6				
	$\cos\varphi = \frac{\lvert\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert \cdot \lvert\vec{n}_2\rvert}$, $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\varphi \approx 53°$	3				
b)	$V = V_{Quader} + V_{Prisma}$ $V = 40\,VE$	3				
c)	Eine Trägergerade der Antenne ist $g : \vec{x} = \begin{pmatrix}1{,}5\\1\\6\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $k \in R$. Schnittpunkt von g mit E_2 ist $S(1{,}5 \mid 1 \mid 4)$, die Länge der Antenne $l = 2\,LE$.		5			
	Zwischensumme	14	5	0		

LK Mathematik mit CAS - Analytische Geometrie - **12. Dachantenne** - Erwartungshorizont

	Übertrag	14	5	0		Begutachtung
d)	Richtungsvektor $\left\lvert\overrightarrow{MP}\right\rvert$ und Gleichung der Geraden durch P und M: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix},\ r \in R$. Bestimmung des Schnittpunktes mit einer geeigneten Ebene, z. B. mit E_r : $T(2 \mid 1 \mid 4)$. Die Spitze M ist sichtbar, da T ($z_T = 4$) oberhalb der Dachkante $\overline{DC}$ ($z_{DC} = 3$) verläuft.		5			
e)	Gleichung für die Gerade s des Sonnenstrahls durch die Spitze M: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ z \end{pmatrix},\ u \in R$. Wegen positiver x-Koordinate des Richtungsvektors ist ein Schatten M' außer auf der x-y-Ebene nur auf der rechten Dachschräge möglich. Berechnung der Schnittpunkte in Abhängigkeit von z ergibt für $s \cap E_{xy}$ M' = $\left(\frac{3}{2} - \frac{12}{z} \,\middle\vert\, 1 - \frac{6}{z} \,\middle\vert\, 0\right)$.		5			
	$s \cap E_2$ ergibt M' = $\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{4+z} \,\middle\vert\, 1 - \frac{2}{4+z} \,\middle\vert\, 6 - \frac{2z}{4+z}\right)$.		3			
	Fallunterscheidung unter Beachtung der positiven x- und y-Koordinate des Richtungsvektors von s: M' liegt auf der Dachschräge, wenn gilt: $1{,}5 \le x_{M'} \le 2$ und $y_{M'} \le 5$. Ansonsten liegt M' in E_{xy}. Somit liegt M' auf der Dachschräge für $z \le -12$ und in E_{xy} für $z > -12$ (mit $z < 0$).			5		
f)	Nachweis oder Begründung, dass M' für z = -12 ein Punkt der Strecke $\overline{CD}$ ist.		3			
	Summe	14	21	5		
	mögliche BE	40			erreichte BE:	

Leistungskurs Mathematik ohne CAS - Analytische Geometrie - 40 BE, ca. 80 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet.

13. Pyramide und Ebenen

In einem dreidimensionalen, kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(1|1|1), B(3|3|1) und C(0|4|5) sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -17 \end{pmatrix}, \lambda \in R$, gegeben.

a) Die Punkte A, B und C bilden ein Dreieck.
Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.
Berechnen Sie die Größe der Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks.

b) Geben Sie eine Parametergleichung für die Ebene E durch die Punkte A, B und C an und bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für E.
(Zur Kontrolle Ihrer eigenen Rechnung: eine mögliche Lösung ist E: $x - y + z = 1$.)

c) Der Punkt P(6|-2|8) ist die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche ABC.
Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide.

d) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von g und E.
Die Gerade h entsteht durch Spiegelung der Geraden g an der Ebene E.
Bestimmen Sie eine Gleichung für h.

e) Für jedes $t \in R$ ist eine Ebene E_t: $t \cdot x + (t - 2)y + z = 1$ gegeben.
Bestimmen Sie den Wert von t, für den E_t parallel zu g verläuft.

f) Zeigen Sie, dass alle Ebenen E_t eine Gerade gemeinsam haben und bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene H an, die durch den Koordinatenursprung verläuft und zu allen Ebenen E_t orthogonal ist.

LK Mathematik ohne CAS - Analytische Geometrie - **13. Pyramide u. Ebenen** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurs: MA-3 Analytische Geometrie
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte:
   Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene, Ebenengleichungen, Anwendung des Skalar- und Vektorprodukts, Winkel- und Abstandsberechnungen.
3. Bemerkung: Es handelt sich um eine traditionelle Prüfungsaufgabe.

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB I	II	III	Erbrachte Leistung BE	Begutachtung
a)	Nachweis, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, Berechnung der Längen der Dreiecksseiten: $\overline{AB}=\sqrt{8}$, $\overline{AC}=\sqrt{26}$, $\overline{BC}=\sqrt{26}$	3				
	Berechnung der Innenwinkelgrößen: $\cos\gamma=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BC}\rvert}$, $\gamma\approx 32{,}2°$, $\alpha=\beta\approx 73{,}9°$.	3				
	Flächeninhalt A des Dreiecks ABC, z. B. mithilfe des Mittelpunktes $D(2\|2\|1)$ der Strecke $\overline{AB}$, $A=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD}$, $A=4\cdot\sqrt{3}\ FE$	3				
b)	Parameterform für die Ebene, z. B. $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ und Bestimmung einer Koordinatenform, z. B. $E: x-y+z=1$.	3				
c)	Berechnung des Abstandes von P zu E z. B. mithilfe der Abstandsformel $d=\lvert\vec{n}_0\cdot(\vec{p}-\vec{a})\rvert$, Bestimmung eines Normaleneinheitsvektors, z. B. $\vec{n}_0=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, Berechnung der Höhe $h=d=5\cdot\sqrt{3}$ der Pyramide und des Volumens $V=20\,VE$.		4			
	Zwischensumme	12	4	0		

LK Mathematik ohne CAS - Analytische Geometrie - **13. Pyramide u. Ebenen** - Erwartungshorizont

	Übertrag	12	4	0		Begutachtung
d)	Bestimmung des Schnittpunktes $S(4\|-1\|-4)$ von g mit E	4				
	Spiegelung eines von $S(4\|-1\|-4)$ verschiedenen Punktes der Geraden g an der Ebene E, z. B. Spiegelung von $Q(-1\|2\|13)$: Angabe einer Gleichung der Lotgeraden durch Q, z. B. $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} + \omega \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und Bestimmung des Schnittpunktes $F(-4\|5\|10)$ von l mit E.		6			
	Bestimmung des Spiegelpunkte $Q'(-7\|8\|7)$ und Angabe einer Gleichung für die Spiegelgerade, z. B. $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$.		4			
e)	Der Ansatz $\vec{n}_E \cdot \vec{r}_g = 0$ mit einem Normalenvektor von E_t und einem Richtungsvektor von g, z. B. $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t-2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ liefert $t = 5{,}5$.		4			
f)	Nachweis, dass die Schnittbedingung für zwei verschiedene Ebenen E_{t_1} und E_{t_2} unabhängig von den Parametern t_1 und t_2 ist: $y = -x \wedge z = -2x + 1$, Angabe einer Gleichung für die allen Ebenen E_t gemeinsame Gerade k, z. B. $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in R$.			4		
	$H: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$			2		
	Summe	16	18	6		
	mögliche BE	40			erreichte BE:	

Leistungskurs Mathematik mit CAS - Analytische Geometrie - 40 BE, ca. 80 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet. Notieren Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

14. Pyramide und Ebenen

In einem dreidimensionalen, kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte

A(1|1|1), B(3|3|1) und C(0|4|5) sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -17 \end{pmatrix}, \lambda \in R$, gegeben.

a) Die Punkte A, B und C bilden ein Dreieck.
Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.
Berechnen Sie die Größe der Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks.

b) Geben Sie eine Parametergleichung für die Ebene E durch die Punkte A, B und C an und bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für E.
(Zur Kontrolle Ihrer eigenen Rechnung: eine mögliche Lösung ist E: $x - y + z = 1$.)

c) Der Punkt P(6|-2|8) ist die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche ABC.
Bestimmen Sie das Volumen der Pyramide.

d) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von g und E und überprüfen Sie, ob die Gerade g die Grundfläche ABC der Pyramide schneidet.
Die Gerade h entsteht durch Spiegelung der Geraden g an der Ebene E.
Bestimmen Sie eine Gleichung für h.

e) Für jedes $t \in R$ ist eine Ebene E_t: $t \cdot x + (t - 2)y + z = 1$ gegeben.
- Bestimmen Sie den Wert von t, für den E_t parallel zu g verläuft.
- Zeigen Sie, dass alle Ebenen E_t eine Gerade gemeinsam haben und bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden.
- Geben Sie eine Gleichung der Ebene H an, die durch den Koordinatenursprung und zu allen Ebenen E_t orthogonal verläuft.

LK Mathematik mit CAS - Analytische Geometrie - **14. Pyramide und Ebenen** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurs: MA-3 Analytische Geometrie
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte:
   Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene, Ebenengleichungen, Anwendung des Skalar- und Vektorprodukts, Winkel- und Abstandsberechnungen.
3. Bemerkung: Es handelt sich um eine traditionelle Prüfungsaufgabe.

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB I	II	III	Erbrachte Leistung BE	Begutachtung
a)	Nachweis, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, Berechnung der Längen der Dreiecksseiten: $\overline{AB}=\sqrt{8}$, $\overline{AC}=\sqrt{26}$, $\overline{BC}=\sqrt{26}$	3				
	Berechnung der Innenwinkelgrößen: $\cos\gamma=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BC}\rvert}$, $\gamma\approx 32{,}2°$, $\alpha=\beta\approx 73{,}9°$.	3				
	Flächeninhalt A des Dreiecks ABC, z. B. mithilfe des Mittelpunktes $D(2\|2\|1)$ der Strecke $\overline{AB}$, $A=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CD}$, $A=4\cdot\sqrt{3}\ FE$	3				
b)	Parameterform für die Ebene, z. B. $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ und Bestimmung einer Gleichung in Koordinatenform, z. B. $E: x-y+z=1$.	3				
c)	Berechnung des Abstandes von P zu E z. B. mithilfe der Abstandsformel $d=\lvert\vec{n}_0\cdot(\vec{p}-\vec{a})\rvert$, Bestimmung eines Normaleneinheitsvektors, z. B. $\vec{n}_0=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, Berechnung der Höhe $h=d=5\cdot\sqrt{3}$ der Pyramide und des Volumens $V=20\,VE$.		4			
	Zwischensumme	12	4	0		

LK Mathematik mit CAS - Analytische Geometrie - **14. Pyramide und Ebenen** - Erwartungshorizont

	Übertrag	12	4	0		Begutachtung
d)	Bestimmung des Schnittpunktes $S(4\|-1\|-4)$ von g mit E	3				
	$\begin{pmatrix}4\\-1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \mu=0{,}875 \wedge \nu=-1{,}25$, also liegt $S(4\|-1\|-4)$ nicht in der Grundfläche der Pyramide.		3			
	Spiegelung eines von $S(4\|-1\|-4)$ verschiedenen Punktes der Geraden g an der Ebene E, z. B. Spiegelung von $Q(-1\|2\|13)$: Angabe einer Gleichung der Lotgeraden durch Q, z. B. $l:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\13\end{pmatrix}+\omega\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ und Bestimmung des Schnittpunktes $F(-4\|5\|10)$ von l mit E.		4			
	Bestimmung des Spiegelpunktes $Q'(-7\|8\|7)$ und Angabe einer Gleichung für die Spiegelgerade, z. B. $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-1\\-4\end{pmatrix}+\kappa\cdot\begin{pmatrix}-11\\9\\11\end{pmatrix}$.		4			
e)	Ansatz $\vec{n}_E\cdot\vec{r}_g=0$ mit einem Normalenvektor von E_t und einem Richtungsvektor von g, z. B. $\begin{pmatrix}5\\-3\\-17\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t\\t-2\\1\end{pmatrix}=0$ und Berechnung von $t=5{,}5$.		4			
	Zwischensumme	15	19	0		

LK Mathematik mit CAS - Analytische Geometrie - **14. Pyramide und Ebenen** - Erwartungshorizont

	Übertrag	15	19	0		Begutachtung
noch e)	Nachweis, dass die Schnittbedingung für zwei verschiedene Ebenen E_{t_1} und E_{t_2} unabhängig von den Parametern t_1 und t_2 ist: $y=-x \wedge z=-2x+1$, Angabe einer Gleichung für die allen Ebenen E_t gemeinsame Gerade k, z. B. $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \in R$.			4		
	$H: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$			2		
	Summe	15	19	6		
	mögliche BE	40			erreichte BE:	

Leistungskurs Mathematik ohne CAS - Analysis - 40 BE, ca. 80 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet.

15. Tunnelquerschnitt

Für einen Verbindungsgang mit quadratischem Querschnitt soll aus statischen Gründen zunächst ein parabelförmiger Tunnel gebaut werden. Der Gang soll von innen bis an den Tunnel heranreichen und eine Querschnittsfläche von 16 m^2 haben. In den Abbildungen sehen Sie die quadratische Querschnittsfläche des Ganges. Die beiden oberen, auf den Parabeln liegenden Eckpunkte sind $P(x_P|y_P)$ und $Q(x_Q|y_Q)$.

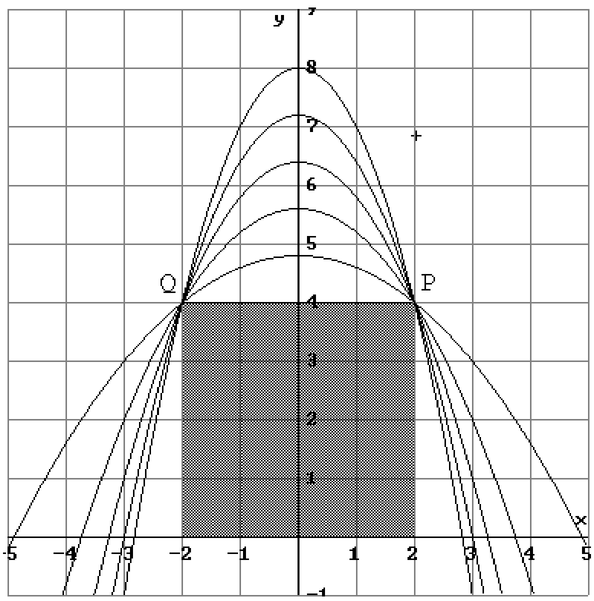


Abb. 1

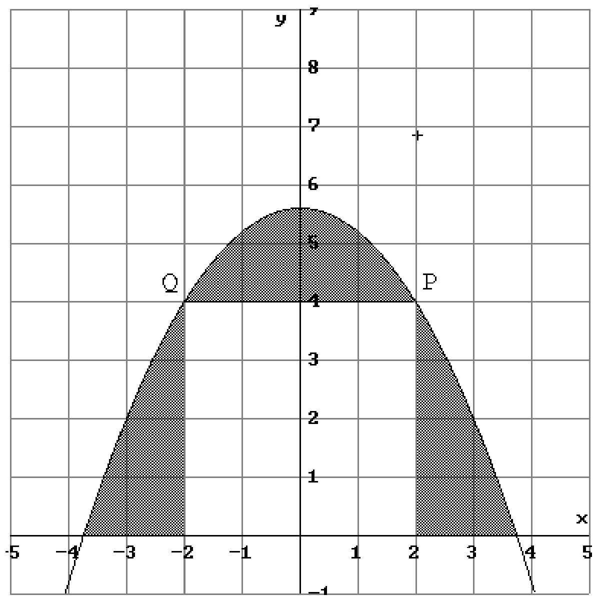


Abb. 2

Leistungskurs Mathematik ohne CAS - Analysis - 40 BE, ca. 80 Min.

15. Tunnelquerschnitt

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte P und Q an. Bestimmen Sie für den Funktionsterm einer quadratischen Funktionenschar der Form $f(x) = -ax^2 + bx + c$ die Parameter b und c, so weit dies mit Hilfe von P und Q möglich ist. Begründen Sie, warum $a > 0$ gelten muss. *(Zur Kontrolle Ihrer Rechnung: $f_a(x) = -ax^2 + 4a + 4$)*

b) Bestimmen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche $A_P(a)$ des parabelförmigen Tunnels in Abhängigkeit von a.

(Zur Kontrolle Ihrer Rechnung: $A_P(a) = \frac{16}{3} \cdot (a+1) \cdot \sqrt{4 + \frac{4}{a}}$)

c) Der nicht nutzbare Anteil des parabelförmigen Querschnitts des Tunnels ist in Abb. 2 hervorgehoben. Er soll minimal sein. Zeigen Sie, dass sich seine Flächenmaßzahl in Abhängigkeit von a durch $g(a) = \frac{16}{3} \cdot \left(\sqrt{4 + \frac{4}{a}} + \sqrt{4a^2 + 4a} \right) - 16$ darstellen lässt und geben Sie den für diese Darstellung geltenden Definitionsbereich von g an.

d) Lösen Sie das Extremalproblem unter Berücksichtigung des Definitionsbereiches von g.

Begründen Sie, dass Ihr für a angegebener Wert eine relative und zugleich eine absolute Minimalstelle von sein muss.

(Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden, dass $g'(a) = \frac{16}{3} \cdot \frac{8a^2 + 4a - 4}{2a \cdot \sqrt{4a^2 + 4a}}$ gilt.)

e) Geben Sie für den Fall, dass die Bedingung a > 0 entfällt, den maximal möglichen Definitionsbereich der unter c) genannten Funktion g an und begründen Sie kurz, warum nunmehr g(-1) das absolute Minimum ist.

LK Mathematik ohne CAS - Analysis - **15. Tunnelquerschnitt** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurse: MA-1/2 und MA-4
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte: Rekonstruktion, Extremalprobleme, Modellieren und Lösen von Sachproblemen mit komplexen funktionalen Zusammenhängen.
3. Bemerkung: Es handelt sich um keine traditionelle Prüfungsaufgabe. Es wird einerseits Modellierung erwartet, andererseits können auch Prüflinge, die diese Leistung nicht erbringen, aufgrund der angegebenen Zwischenergebnisse die Aufgabe zum größten Teil bearbeiten. Bei dieser Aufgabe ist der Rechenaufwand bewusst zu Gunsten größerer Argumentationsanteile reduziert worden.

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB			Erbrachte Leistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
a)	Angabe von P(2|4) und Q(-2|4). Aufstellen der Bedingungsgleichungen f(2) = 4 und f(-2) = 4 sowie $4 = -4a + 2b + c \wedge 4 = -4a - 2b + c$	4				
	Bestimmen der Lösungsmenge in Abhängigkeit von a: $b = 0$; $c = 4a + 4$; $a \in \mathbb{R}^+$; Angabe von $f(x) = -a \cdot x^2 + 4a + 4$ sowie Begründung für a>0 mit der sachlich bedingten Öffnung der Parabel nach unten.	4				
b)	Bestimmen der Nullstellen von f als Integrationsgrenzen in Abhängigkeit von a, z. B. in der Form: $x = \sqrt{4 + \frac{4}{a}} \vee x = -\sqrt{4 + \frac{4}{a}}$	3				
	Ansatz für die Flächenberechnung (unter Ausnutzung der Symmetrie): $A_P(a) = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{4+\frac{4}{a}}} (-ax^2 + 4a + 4)dx$ und bestimmen des Integrals zu $A_P(a) = \frac{16}{3} \cdot (a+1) \cdot \sqrt{4 + \frac{4}{a}}$		6			
	Zwischensumme	11	6	0		

LK Mathematik ohne CAS - Analysis - **15. Tunnelquerschnitt** - Erwartungshorizont

	Übertrag	11	6	0		Begutachtung
c)	Ansatz $g(a)=\frac{16}{3}\cdot(a+1)\cdot\sqrt{4+\frac{4}{a}}-16$, Nachweis (für a > 0), dass gilt: $g(a)=\frac{16}{3}\cdot\left(\sqrt{4+\frac{4}{a}}+\sqrt{4a^2+4a}\right)-16$ mit Definitionsbereich $D_g=\left]0;+\infty\right[$.		6			
d)	Verwenden der notwendigen Bedingung g'(a) = 0 für relative Extremstellen und Angabe der Lösungsmenge $L=\{-1;0,5\}$ für die Gleichung $8a^2+4a-4=0$. Angabe von 0,5 als Lösung mit Begründung $0,5\in D_g$.	5				
	0,5 ist relative und absolute Minimalstelle, weil $P\left(0,5\,\middle|\,g(0,5)\right)$ der einzige Punkt mit waagerechter Tangente ist und weil zusätzlich gilt: $g(a)\to+\infty$ für $a\to 0^+$ und $g(a)\to+\infty$ für $a\to+\infty$ und g ist überall definiert im Intervall $D_g=\left]0;+\infty\right[$ und dort stetig.		6			
e)	Angabe von Dg = R \ ]-1;0]		2			
	Begründung z. B.: g(-1)= -16 ist kleiner als g(a) für a > 0, weil für a > 0 g(a) Maßzahl einer Fläche und somit positiv ist; g(-1) = -16 ist für a < -1 kleiner als g(a), weil die Radikanden der Wurzeln im Funktionsterm nur für a = -1 null werden, die Wurzeln ansonsten positive Summanden zu -16 ergeben.			4		
	Summe	16	20	4		
	mögliche BE	40			erreichte BE:	

Leistungskurs Mathematik mit CAS - Analysis - 40 BE, ca. 80 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet. Notieren Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

16. Tunnelquerschnitt

Für einen Verbindungsgang mit quadratischem Querschnitt soll aus statischen Gründen zunächst ein parabelförmiger Tunnel gebaut werden. Der Gang soll von innen bis an den Tunnel heranreichen und eine Querschnittsfläche von 16 m^2 haben. In den Abbildungen sehen Sie die quadratische Querschnittsfläche des Ganges. Die beiden oberen, auf den Parabeln liegenden Eckpunkte sind $P(x_P|y_P)$ und $Q(x_Q|y_Q)$.

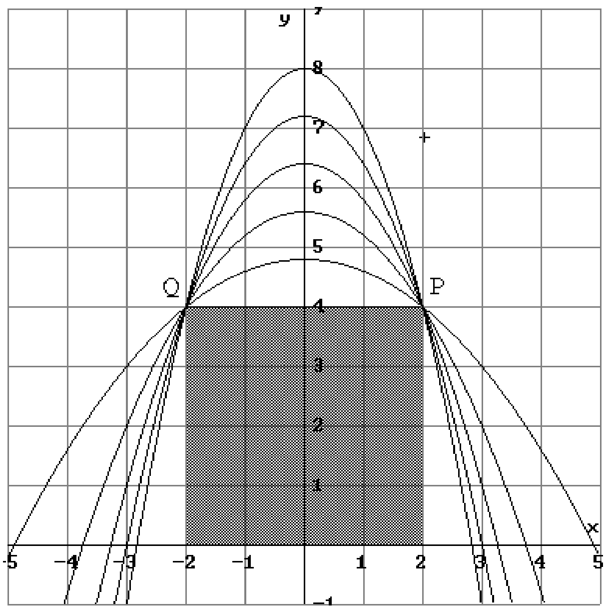


Abb. 1

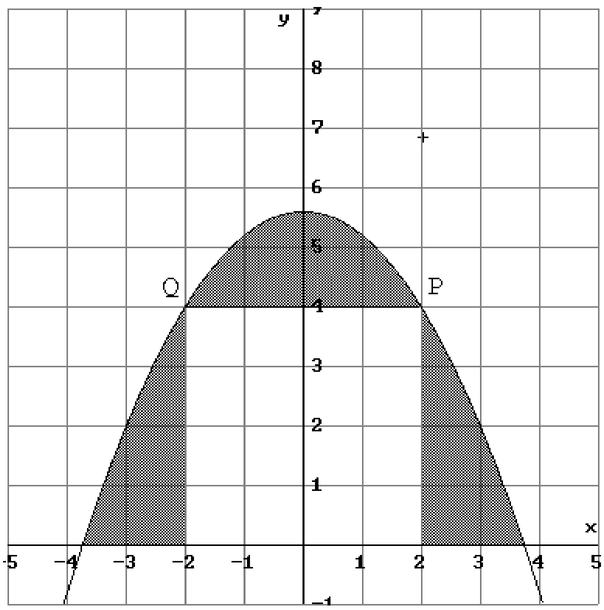


Abb. 2

Leistungskurs Mathematik mit CAS - 40 BE, ca. 80 Min.

16. Tunnelquerschnitt

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte P und Q an. Bestimmen Sie für den Funktionsterm einer quadratischen Funktionenschar der Form $f(x) = -ax^2 + bx + c$ die Parameter b und c, so weit dies mit Hilfe von P und Q möglich ist. Begründen Sie, warum $a > 0$ gelten muss. *(Zur Kontrolle Ihrer Rechnung:* $f_a(x) = -ax^2 + 4a + 4$ *)*

b) Bestimmen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche $A_P(a)$ des parabelförmigen Tunnels in Abhängigkeit von a.

(Zur Kontrolle Ihrer Rechnung: $A_P(a) = \frac{16}{3} \cdot (a+1) \cdot \sqrt{4 + \frac{4}{a}}$ *)*

c) Der nicht nutzbare Anteil des parabelförmigen Querschnitts des Tunnels ist in Abb. 2 hervorgehoben. Er soll minimal sein. Zeigen Sie, dass sich seine Flächenmaßzahl in Abhängigkeit von a durch $g(a) = \frac{16}{3} \cdot \left(\sqrt{4 + \frac{4}{a}} + a \cdot \sqrt{4 + \frac{4}{a}} \right) - 16$ darstellen lässt und geben Sie den für diese Darstellung geltenden Definitionsbereich von g an.

d) Lösen Sie das Extremalproblem unter Berücksichtigung des Definitionsbereiches von g. Begründen Sie, dass Ihr für a angegebener Wert eine relative und zugleich eine absolute Minimalstelle von sein muss.
Berechnen Sie den prozentualen Anteil, den die nicht nutzbare Fläche von der gesamten Querschnittsfläche des Tunnels einnimmt.

e) Geben Sie für den Fall, dass die Bedingung a > 0 entfällt, den maximal möglichen Definitionsbereich der unter c) genannten Funktion g an. Vergleichen Sie unter dieser Bedingung die Funktion g mit $g^*(a) = \frac{16}{3} \cdot \left(\sqrt{4 + \frac{4}{a}} + \sqrt{4a^2 + 4a} \right) - 16$ und erläutern Sie die an den Graphen von g und von g* erkennbaren Unterschiede und Übereinstimmungen.

LK Mathematik mit CAS - **16. Tunnelquerschnitt** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurse: MA-1/2 und MA-4
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte: Rekonstruktion, Extremalprobleme, Modellieren und Lösen von Sachproblemen mit komplexen funktionalen Zusammenhängen.
3. Bemerkung: Es handelt sich um keine traditionelle Prüfungsaufgabe. Es wird einerseits Modellierung erwartet, andererseits können auch Prüflinge, die diese Leistung nicht erbringen, aufgrund der angegebenen Zwischenergebnisse die Aufgabe zum größten Teil bearbeiten. Die Aufgabe liegt vom Umfang, vom Schwierigkeits- und vom Komplexitätsgrad her an der Obergrenze.

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB			Erbrachte Leistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
a)	Angabe von P(2|4) und Q(-2|4), Aufstellen der Bedingungsgleichungen f(2) = 4 und f(-2) = 4 sowie $4 = -4a + 2b + c \wedge 4 = -4a - 2b + c$	4				
	Bestimmen der Lösungsmenge in Abhängigkeit von a: b = 0; c = 4a + 4; $a \in R^+$; Angabe von $f(x) = -a \cdot x^2 + 4a + 4$ sowie Begründung für a > 0 mit der sachlich bedingten Öffnung der Parabel nach unten.	3				
b)	Bestimmen der Nullstellen von f als Integrationsgrenzen in Abhängigkeit von a, z. B. in der Form $x = -\frac{2\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} \vee x = \frac{2\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}}$	2				
	Ansatz für die Flächenberechnung: $A_P(a) = \int_{-\frac{2\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}}}^{\frac{2\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}}} (-ax^2 + 4a + 4)dx$ und Bestimmen des Integrals zu $A_P(a) = \frac{32(a+1)^{3/2}}{3\sqrt{a}}$.		3			
	Zwischensumme	9	3	0		

LK Mathematik mit CAS - **16. Tunnelquerschnitt** - Erwartungshorizont

	Übertrag	9	3	0		Begutachtung
c)	Ansatz z. B. $g(a)=\frac{32(a+1)^{3/2}}{3\sqrt{a}}-16$ und Nachweis, dass gilt: $g(a)=\frac{16}{3}\cdot\left(\sqrt{4+\frac{4}{a}}+a\cdot\sqrt{4+\frac{4}{a}}\right)-16$ Definitionsbereich $D_g=\left]0;+\infty\right[$		5			
d)	Bestimmen der ersten Ableitungsfunktion, z. B. $\frac{d}{da}g(a)=\frac{16(2a-1)\cdot\sqrt{\frac{a+1}{a}}}{3a}$	2				
	Verwenden der notwendigen Bedingung $g'(a)=0$ für relative Extremalstellen; Lösen der Gleichung $\frac{16(2a-1)\cdot\sqrt{\frac{a+1}{a}}}{3a}=0:L=\{-1;0{,}5\}$ Angabe von 0,5 als Lösung mit Begründung $0{,}5\in D_g$.	3				
	0,5 ist relative und absolute Minimalstelle, weil $P\left(0{,}5\,\middle|\,g(0{,}5)\right)$ der einzige Punkt mit waagerechter Tangente ist und weil zusätzlich gilt: $g(a)\to+\infty$ für $a\to 0^+$ und $g(a)\to+\infty$ für $a\to+\infty$ und g ist überall definiert im Intervall $D_g=\left]0;+\infty\right[$ und dort stetig.		6			
	Berechnung des Verlustanteiles von etwa 42%.	3				
e)	Angabe von Dg = R \ ]-1;0]		2			
	Fallunterscheidung: für a > 0 stimmen die Graphen überein, für $a\le-1$ bzw. für a < -1 nicht. Begründung für a > 0, dass $g^*(a)=g(a)$ gilt.		3			
	Zwischensumme	17	19	0		

LK Mathematik <u>mit</u> CAS - **16. Tunnelquerschnitt** - Erwartungshorizont

	Übertrag	17	19	0		Begutachtung
	Erläuterungen für $a \le -1$, dass g* streng monoton fallend , g steigend; g(-1) (Rand-)Maximum / waagerechte Tangente (linksseitig), g*(-1) absolutes Minimum / senkrechte Tangente; Begründung der Abweichungen für $a \le -1$ dadurch, dass von g nach g* ein Vorzeichenwechsel von "-" nach "+" beim zweiten Summanden erfolgt. *(Bei der Zuordnung der Anforderungsbereiche wird berücksichtigt, dass die charakteristischen Eigenschaften der Graphen durch den Einsatz des CAS offensichtlich sind und die eigentliche Leistung in der Interpretation des Graphenverlaufs besteht.)*			4		
	Summe	17	19	4		
	mögliche BE	40			erreichte BE:	

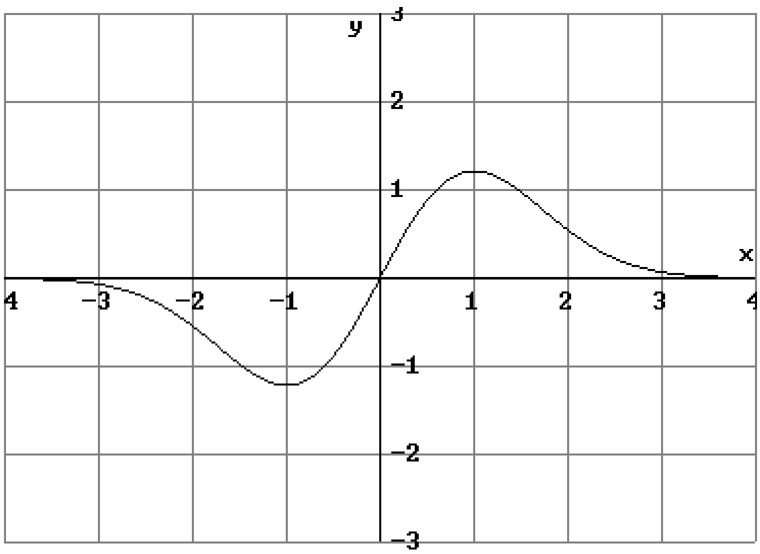
Leistungskurs Mathematik ohne CAS - Analysis - 40 BE, ca. 80 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet.

17. Exponentialfunktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = k \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{k}}$, $k \neq 0$.

Die Zeichnung zeigt den Graphen einer Funktion dieser Schar.



a) Untersuchen Sie die Funktionen f_k auf Symmetrie, Nullstellen, Art und Lage relativer Extrempunkte sowie auf Wendepunkte in Abhängigkeit von k.

(Zur Kontrolle Ihrer eigenen Rechnung: $f_k''(x) = (\frac{4}{k}x^3 - 6x) \cdot e^{\frac{-x^2}{k}}$ *.)*

b) Zeichnen Sie in die vorgegebene Zeichnung den Graphen der Funktion f_{-1} für $k = -1$.

c) Ermitteln Sie k für den vorgegebenen Graphen.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt, der von dem Graphen der Funktion f_3 und der x-Achse begrenzt wird.

e) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ortskurve der Hochpunkte der Funktionenschar f_k.

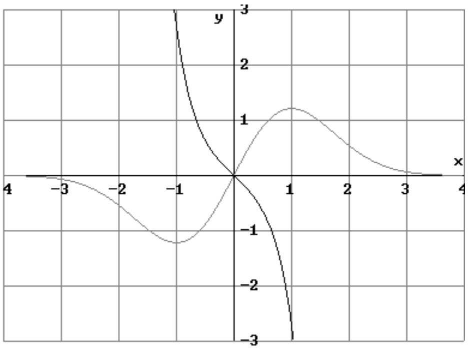
LK Mathematik ohne CAS - **17. Exponentialfunktionenschar** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurse: MA-1/2 und MA-4
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte: Untersuchung einer Funktionenschar, Integration mit Substitution, Flächenberechnung mit uneigentlichem Integral, Ortskurve der Hochpunkte einer Funktionenschar
3. Bemerkung: Es handelt sich um eine traditionelle Prüfungsaufgabe.

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB			Erbrachte Leistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
a)	Nachweis der Punktsymmetrie: $f_k(-x) = -f_k(x)$	2				
	Bedingung $f_k(x) = 0$ für Nullstellen und Bestimmung der einzigen Nullstelle 0 für alle k ($k \neq 0$).	2				
	Nennen einer hinreichende Bedingung für relative Extremalstellen, z. B. $f_k'(x) = 0$ mit Vorzeichenwechsel Ableitung: $f_k'(x) = (k - 2x^2) \cdot e^{\frac{-x^2}{k}}$; Verwenden der notwendigen Bedingung $f_k'(x) = 0$ ergibt $x = \sqrt{\frac{k}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{k}{2}}$ nur für k > 0.		5			
	VZW $+ \to -$ bei $x = \sqrt{\frac{k}{2}}$, VZW $- \to +$ bei $x = -\sqrt{\frac{k}{2}}$; Angabe von $H\left(\sqrt{\frac{k}{2}} \middle\vert k \cdot \sqrt{\frac{k}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$ und $T\left(-\sqrt{\frac{k}{2}} \middle\vert -k \cdot \sqrt{\frac{k}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$.	5				
	Nennen einer hinreichenden Bedingung für Wendestellen, z. B. $f_k''(x) = 0$ mit VZW; 2.Ableitung: $f_k''(x) = (\frac{4}{k}x^3 - 6x) \cdot e^{\frac{-x^2}{k}}$.	3				
	Zwischensumme	12	5	0		

LK Mathematik <u>ohne</u> CAS - **17. Exponentialfunktionenschar** - Erwartungshorizont

	Übertrag	12	5	0		Begutachtung
noch a)	Verwenden der notwendigen Bedingung $f_k''(x) = 0$ ergibt $x = 0 \vee x = \sqrt{\frac{3k}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{3k}{2}}$.	3				
	$W_1(0\mid 0)$ für alle $k \neq 0$; für $k > 0$ VZW bei $\pm\sqrt{\frac{3k}{2}}$: Angabe von $W_{2/3}\left(\pm\sqrt{\frac{3k}{2}}\middle\vert \pm k\cdot\sqrt{\frac{3k}{2}}\cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$.		4			
b)			3			
c)	Erkennbar sind die relativen Extremalstellen $\pm 1\cdot(k-2)\cdot e^{-1/k} = 0 \Leftrightarrow k = 2$		2			
d)	Ansatz unter Nutzung der Symmetrie $A = 2\cdot\int_0^\infty f_3(x)dx$ und Ermitteln einer Stammfunktion, z. B durch die Substitution $z = -\frac{x^2}{3}$: $F_3(x) = -\frac{9}{2}\cdot e^{-x^{\frac{2}{3}}}$		5			
	$A = 2\cdot\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b f_3(x)dx$ $A = 2\cdot\lim\limits_{b\to\infty}\left[-9/2\cdot e^{-x^2/3}\right]_0^b$, $A = 9\ FE$		3			
e)	Ortskurve: $x = \sqrt{k/2} \Leftrightarrow k = 2x^2$ für $x \geq 0$, $y = 2x^2\cdot\sqrt{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{2}}$ $y = 2\cdot e^{-\frac{1}{2}}\cdot x^3$ für $x \geq 0$.		3			
	Summe	15	25	0		
	mögliche BE		40		erreichte BE:	

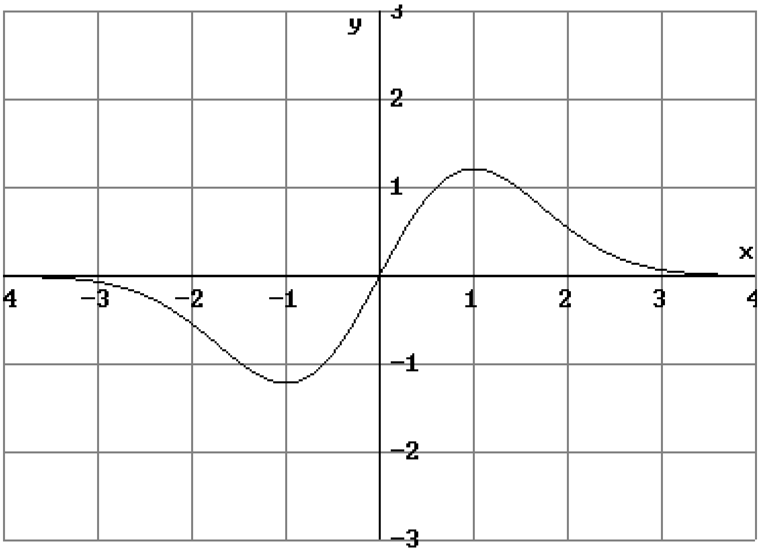
Leistungskurs Mathematik mit CAS - Analysis - 40 BE, ca. 80 Min.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile. Beschreiben Sie dabei Ihre Vorgehensweise und kommentieren Sie Ihre Lösungen. Die Qualität der textlichen Begleitung wird mitbewertet. Notieren Sie Ihre Ansätze, Lösungswege und Ergebnisse in der in der Mathematik üblichen Form und nicht in der CAS-Eingabeform.

18. Exponentialfunktionenschar

Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = k \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{k}}$, $k \neq 0$.

Die Zeichnung zeigt den Graphen einer Funktion f_k dieser Schar.



a) Zeichnen Sie in die vorgegebene Zeichnung den Graphen der Funktion f_{-1} für $k = -1$.

b) Untersuchen Sie die Funktionen f_k auf Symmetrie, Nullstellen, Art und Lage relativer Extrempunkte sowie auf Wendepunkte in Abhängigkeit von k.

c) Ermitteln Sie den Wert des Parameters k für den vorgegebenen Graphen.

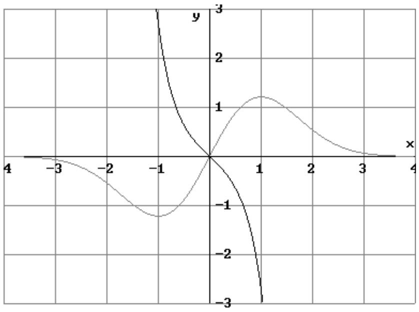
d) Ermitteln Sie durch Handrechnung eine Stammfunktion von f_k und berechnen Sie den Flächeninhalt, der von dem Graphen der Funktion f_3 und der x-Achse begrenzt wird.

e) Ein Punkt eines im 1. Quadranten gelegenen rechtwinkligen Dreiecks ist der Ursprung. Ein zweiter Punkt P liegt auf dem Graphen von f_k und der dritte Punkt, an dem sich der rechte Winkel befindet, liegt auf der x-Achse.
Bestimmen Sie die Koordinaten von P so, dass P der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird und berechnen Sie diesen maximalen Flächeninhalt.
Fertigen Sie zuerst eine Skizze an.

LK Mathematik mit CAS - **18. Exponentialfunktionenschar** - Erwartungshorizont

Didaktischer Zusammenhang der Aufgabe zu den curricularen Vorgaben:

1. Bezugskurse: MA-1/2 und MA-4
2. Inhaltliche und kompetenzbezogene Schwerpunkte: Untersuchung einer Funktionenschar, Integration mit Substitution, Flächenberechnung mit uneigentlichem Integral, Ortskurve der Hochpunkte einer Funktionenschar
3. Bemerkung: Es handelt sich um eine traditionelle Prüfungsaufgabe.

Aufgabenteil	Erwartete Leistung	BE in AFB I	II	III	Erbrachte Leistung BE	Begutachtung
a)	Übertragen des Graphen von f_{-1}. 	2				
b)	Nachweis der Punktsymmetrie: $f_k(-x) = -f_k(x)$	2				
	Bedingung $f_k(x) = 0$ für Nullstellen und Bestimmung der einzigen Nullstelle 0 für alle k ($k \neq 0$).	2				
	Nennen einer hinreichende Bedingung für relative Extremalstellen, z. B. $f_k'(x) = 0$ mit Vorzeichenwechsel. $f_k'(x) = (k - 2x^2) \cdot e^{\frac{-x^2}{k}}$; Verwenden der notwendigen Bedingung $f_k'(x) = 0$ ergibt $x = \sqrt{\frac{k}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{k}{2}}$ nur für $k > 0$.		4			
	VZW $+ \rightarrow -$ bei $x = \sqrt{\frac{k}{2}}$, VZW $- \rightarrow +$ bei $x = -\sqrt{\frac{k}{2}}$; Angabe von $H\left(\sqrt{\frac{k}{2}} \middle| k \cdot \sqrt{\frac{k}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$ und $T\left(-\sqrt{\frac{k}{2}} \middle| -k \cdot \sqrt{\frac{k}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$.	4				
	Zwischensumme	10	4	0		

LK Mathematik <u>mit</u> CAS - **18. Exponentialfunktionenschar** - Erwartungshorizont

	Übertrag	10	4	0		Begutachtung
noch b)	Nennen einer hinreichenden Bedingung für Wendestellen, z. B. $f_k''(x)=0$ mit VZW; 2.Ableitung: $f_k''(x)=(\frac{4}{k}x^3-6x)\cdot e^{\frac{-x^2}{k}}$.	2				
	Verwenden der notwendigen Bedingung $f_k''(x)=0$ ergibt $x=0 \vee x=\sqrt{\frac{3k}{2}} \vee x=-\sqrt{\frac{3k}{2}}$. $W_1(0\mid 0)$ für alle $k\neq 0$; für $k>0$ VZW bei $\pm\sqrt{\frac{3k}{2}}$: Angabe von $W_{2/3}\left(\pm\sqrt{\frac{3k}{2}}\middle|\pm k\cdot\sqrt{\frac{3k}{2}}\cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$.	5				
c)	Erkennbar sind die relativen Extremalstellen ± 1. $(k-2)\cdot e^{-1/k}=0 \Leftrightarrow k=2$		2			
d)	Ermitteln einer Stammfunktion, z. B. durch die Substitution $z=-x^2/k$: $F_3(x)=-\frac{k^2}{2}\cdot e^{-\frac{x^2}{k}}$		4			
	Ansatz unter Nutzung der Symmetrie, $A=2\cdot\int_0^\infty f_3(x)dx$, $A=2\cdot\lim_{b\to\infty}\int_0^b f_3(x)dx$, $A=2\cdot\lim_{b\to\infty}\left[-9/2\cdot e^{-x^2/3}\right]_0^b$, $A=9\ FE$		3			
e)	Skizze, Ansatz für die Dreiecksfläche: $A_k(x)=\frac{1}{2}x\cdot f_k(x)$, $A_k(x)=\frac{k}{2}\cdot x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{k}}$		4			
	$A_k'(x)=(kx-x^3)\cdot e^{-\frac{x^2}{k}}$, notwendige Bedingung: $A_k'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm\sqrt{k}$, $k>0$		2			
	x = 0 und x = $x=-\sqrt{k}$ begründet ausschließen; Begründung dafür, dass $x=\sqrt{k}$ Maximalstelle ist, Ermittlung von $P\left(\sqrt{k}\middle|k^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-1}\right)$ und $A_{\max}=\frac{k^2}{2e}$		4			
	Summe	17	23	0		
	mögliche BE		40		erreichte BE:	