Vektorrechnung

Lernblätter zur Abstandberechnung

Themenblätter zu den wichtigen Methoden
von Abstandberechnungen

Gegenüberstellung von Lösungen mit

- algebraischen Gleichungen
- Vektormethoden
- CAS-Rechner-Methoden

Ziemlich einmalige Zusammenstellungen
zum Wiederholen und LERNEN.

Datei Nr. 64201

Stand 13. Januar 2013

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text dient der Wiederholung und der Prüfungsvorbereitung.

Man verwendet ja nebeneinander oftmals dreierlei Methoden:

$2x-3y+5z=12$	ist eine Koordinaten- oder Normalengleichung einer Ebene.
$\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}\vec{x}=12$	ist die entsprechende Vektorschreibweise, und
$\mathrm{dotP}(n,\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix})-12$	die Eingabe in einen CAS-Rechner zur Darstellung dieser Gleichung, wenn man zuvor schon den Normalenvektor definiert hat.

Dieses Nebeneinander verwirrt viele Schüler. Oberflächliches Lernen unter Zeitdruck verhindert dann ein sicheres Arbeiten in dieser Materie. Dabei sind die Methoden durchaus klar strukturiert und überschaubar.

Der Prüfling sollte also gründlich wiederholen und sich als Ziel vornehmen:

Lernen, welche Methoden zu welcher Fragestellung gehören.

Das ist oft wichtiger als das Bewältigen von Zahlenbeispielen. In der Prüfung muss man sofort das Merkmal der Fragestellung erkennen und dann die zugehörige Lösungsmethode abrufen können.

Noch ein Wort zu den Screenshots der CAS-Rechner. Hier zeige ich natürlich nicht, wie man einfache Berechnungen anstellt oder lächerliche Gleichungen mit solve löst.

Tatsächlich können diese Geräte sehr viel mehr. Oftmals gelingt es, ganze Methoden in zwei oder drei Eingabezeilen umzuwandeln. Ausgehend von der abkürzenden Vektorschreibweise kann man dann mit (nur scheinbar komplizierten) ähnlichen Befehlen, viel auf einmal berechnen. Dies muss ein Schüler nicht unbedingt können. Er wird den Rechner in der Regel nur als Rechenhilfe einsetzen. Dennoch: Wer so ein Gerät besitzt, hat vielleicht auch Lust darauf, es richtig auszureizen.

Ich denke jetzt eher an den sehr guten Schüler, der neugierig ist, als an den schwächeren, der eher stöhnt und wenig Bock auf diese Dinge hat.

Themen der Lernblätter

In diesem Demo-Text nur LB1

LB1 Abstand eines Punktes von einer Geraden (Teil 1: mit einer Lotebene).

Zahlenbeispiel: $g:\ \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}}_{\vec{u}}$, $P_1(3\,|\,5\,|\,2)$

LB2 Abstand eines Punktes von einer Geraden (Teil 2: Operative Methode).

Zahlenbeispiel: $g:\ \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}}_{\vec{u}}$, $P_1(3\,|\,5\,|\,2)$

LB3 Lot von S auf eine Ebene. Gesucht Lotfußpunkt und Abstand.

Zahlenbeispiel: $E:\ x + 2y - 2z = 3$ und $S(3\,|\,7\,|\,-11)$

LB4 Abstand eines Punktes von einer Ebene mit HNF (Teil 1)

Zahlenbeispiel: $E:\ 2x - 3y + 5z = 15$ und $P_1(2\,|\,2\,|\,4)$

LB5 Abstand eines Punktes von einer Ebene mit HNF (Teil 2)

Zahlenbeispiel: $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-9\\9\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\-4\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$ und $P_1(2\,|\,2\,|\,4)$

LB6 Zeige, dass 2 Geraden windschief sind und berechne ihren kürzesten Abstand mit der Methode der parallelen Ebenen.

Zahlenbeispiel: $g:\ \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{u}}$ und $h:\ \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}}_{\vec{b}} + s\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{v}}$

LB7 Abstände von Punkte auf schräger Gerade zu einer Ebene

Zahlenbeispiel: $E:\ x + 2y - 2z = 3$. und die Gerade $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$

Welche Punkte von g haben von E den Abstand 6?

LB8 Gesucht eine zu E parallele Ebene im Abstand e.

Zahlenbeispiel: $E:\ 3x + 2y - 6z = 28$. und $e = 12$

LB1: **Abstand eines Punktes von einer Geraden (Teil 1: Mit einer Lotebene)**

Gegeben ist die Ebene g durch $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}}_{\vec{u}}$. Berechne den Abstand des Punktes $P(3|5|2)$ von g.

ALGEBRA		VEKTORRECHNUNG	CAS
Der Richtungsvektor der Geraden wird Normalenvektor der Lotebene		$\vec{n} = \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$	`[-2;1;3]→n` `[-2;1;3]`
Die gegebene Gerade wird im Rechner als Funktion von r definiert.		$\vec{x}(r) = \vec{a} + r\cdot\vec{n}$	`define g(r)=[1;3;-1]+r×n` `done`
Gleichung der Lotebene	$-2x + y + 3z = d$		
Die Lotebene soll durch $P_1(3\|5\|2)$ gehen:	$k = -2\cdot\boxed{3} + \boxed{5} + 3\cdot\boxed{2} = 5$	$\vec{n}\cdot\vec{x} = \underbrace{\vec{n}\cdot\vec{x}_1}_{5}$	`dotP(n,[x;y;z])=dotP(n,[3;5;2])` `-2·x+y+3·z=5`
Lotebene E_L:	$-2x + y + 3z = 5$		
Der Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt von g und der Lotebene:			
$g \cap E_L = \{F\}$: durch Einsetzen:	$-2\cdot\boxed{1-2r} + \boxed{3+r} + 3\cdot\boxed{-1+3r} = 5$	$\vec{n}\cdot(\vec{a} + r\cdot\vec{n}) = 5$	`solve(dotP(n,g(r))=dotP(n,[3;5;2]),r)` `{r=1/2}`
Das führt auf	$r = \frac{1}{2}$		
Lotfußpunkt	$F(0\|3{,}5\|0{,}5)$ oder $F(0\|\frac{7}{2}\|\frac{1}{2})$	$\vec{f} = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}$	`g(1/2)` `[0;3.5;0.5]`
Gesuchter Abstand:	$d(P_1,g) = d(P,F) = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{54}{3}} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$	$d(P_1,g) = \left\|\overrightarrow{PF}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-3\\-\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\right\| = \frac{3}{2}\left\|\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\| = \frac{3}{2}\sqrt{6}$	`norm(ans-[3;5;2])` `3·√6/2`