Abitur 2015 Mathematik Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto \ln(2x+3)$ mit maximaler Definitionsmenge D und Wertemenge W. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.

Teilaufgabe Teil A 1a (2 BE)

Geben Sie D und W an.

Teilaufgabe Teil A 1b (4 BE)

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_g im Schnittpunkt von G_g mit der x-Achse.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ und $x \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe Teil A 2a (3 BE)

Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt des Graphen von f auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt.

Teilaufgabe Teil A 2b (2 BE)

Der Graph von f wird verschoben. Der Punkt $(2|0)$ des Graphen der Funktion f besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(3|2)$. Der verschobene Graph gehört zu einer Funktion h. Geben Sie eine Gleichung von h an.

Geben Sie jeweils den Term einer Funktion an, die die angegebene(n) Eigenschaft(en) besitzt.

Teilaufgabe Teil A 3a (2 BE)

Die Funktion g hat die maximale Definitionsmenge $]-\infty; 5]$.

Teilaufgabe Teil A 3b (3 BE)

Die Funktion k hat in $x = 2$ eine Nullstelle und in $x = -3$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Der Graph von k hat die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ als Asymptote.

Teilaufgabe Teil A 4 (4 BE)

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto x\, e^{a\, x}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ermitteln Sie, für welchen Wert von a die erste Ableitung von f_a an der Stelle $x = 2$ den Wert 0 besitzt.

Der Graph G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f : x \mapsto a\,x^4 + b\,x^3$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt im Punkt $O(0|0)$ einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

Teilaufgabe Teil B 1a (4 BE)

$W(1|-1)$ ist ein weiterer Wendepunkt von G_f. Bestimmen Sie mithilfe dieser Information die Werte von a und b.

(Ergebnis: $a = 1$, $b = -2$)

Teilaufgabe Teil B 1b (4 BE)

Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

Die Gerade g schneidet G_f in den Punkten W und $(2|0)$.

Teilaufgabe Teil B 1c (4 BE)

Zeichnen Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse G_f sowie die Gerade g in ein Koordinatensystem ein. Geben Sie die Gleichung der Geraden g an.

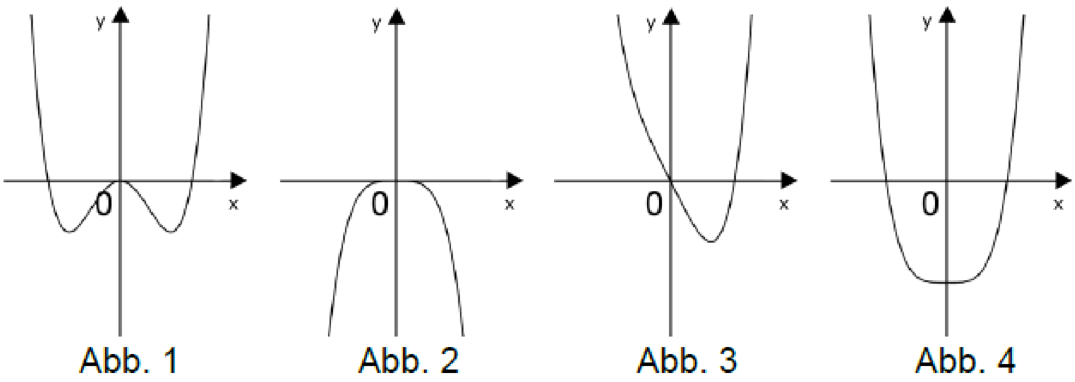
Teilaufgabe Teil B 1d (6 BE)

G_f und die x-Achse schließen im IV. Quadranten ein Flächenstück ein, das durch die Gerade g in zwei Teilflächen zerlegt wird. Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser beiden Teilflächen.

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_n : x \mapsto x^4 - 2x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ sowie die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_0 : x \mapsto x^4 - 2$.

Teilaufgabe Teil B 2a (4 BE)

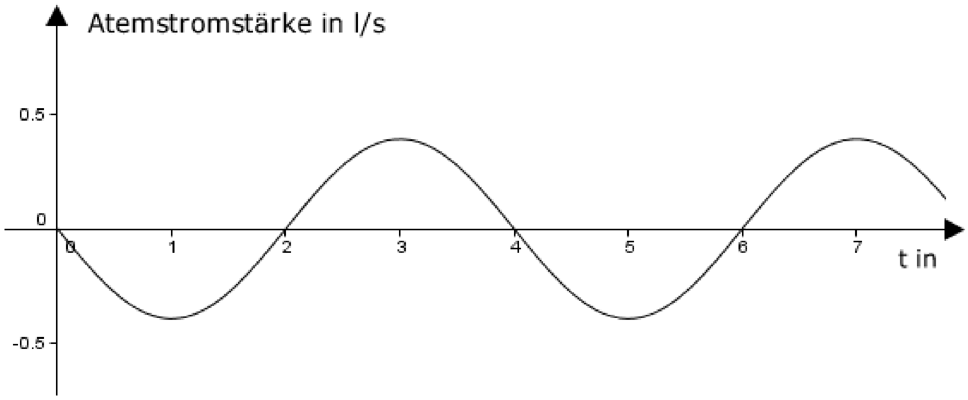
Die unteren Abbildungen 1 bis 4 zeigen die Graphen der Funktionen f_0, f_1, f_2 bzw. f_4. Ordnen Sie jeder dieser Funktionen den passenden Graphen zu und begründen Sie drei Ihrer Zuordnungen durch Aussagen zur Symmetrie, zu den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen oder dem Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs des jeweiligen Graphen.



Teilaufgabe Teil B 2b (3 BE)

Betrachtet werden nun die Funktionen f_n mit $n > 4$. Geben Sie in Abhängigkeit von n das Verhalten dieser Funktionen für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ an.

In der Lungenfunktionsdiagnostik spielt der Begriff der Atemstromstärke eine wichtige Rolle. Im Folgenden wird die Atemstromstärke als die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge betrachtet, d. h. insbesondere, dass der Wert der Atemstromstärke beim Einatmen positiv ist. Für eine ruhende Testperson mit normalem Atemrhythmus wird die Atemstromstärke in Abhängigkeit von der Zeit modellhaft durch die Funktion $g: t \mapsto -\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}_0^+$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $g(t)$ die Atemstromstärke in Litern pro Sekunde. Das untere Bild zeigt den durch die Funktion g beschriebenen zeitlichen Verlauf der Atemstromstärke.



Teilaufgabe Teil B 3a (2 BE)

Berechnen Sie $g(1,5)$ und interpretieren Sie das Vorzeichen dieses Werts im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe Teil B 3b (2 BE)

Beim Atmen ändert sich das Luftvolumen in der Lunge. Geben Sie auf der Grundlage des Modells einen Zeitpunkt an, zu dem das Luftvolumen in der Lunge der Testperson minimal ist, und machen Sie Ihre Antwort mithilfe der Abbildung in Teilaufgabe 3a plausibel.

Teilaufgabe Teil B 3c (4 BE)

Berechnen Sie $\int_2^4 g(t)\ dt$ und deuten Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang.

(Teilergebnis: Wert des Integrals: $0,5$)

Teilaufgabe Teil B 3d (3 BE)

Zu Beginn eines Ausatemvorgangs befinden sich $3,5$ Liter Luft in der Lunge der Testperson. Skizzieren Sie auf der Grundlage des Modells unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus Aufgabe 3c in einem Koordinatensystem für $0 \leq t \leq 8$ den Graphen einer Funktion, die den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge der Testperson beschreibt.

Die Testperson benötigt für einen vollständigen Atemzyklus 4 Sekunden. Die Anzahl der Atemzyklen pro Minute wird als Atemfrequenz bezeichnet.

Teilaufgabe Teil B 3e (4 BE)

Geben Sie zunächst die Atemfrequenz der Testperson an.
Die Atemstromstärke eines jüngeren Menschen, dessen Atemfrequenz um 20% höher ist als die der bisher betrachteten Testperson, soll durch eine Sinusfunktion der Form $h : t \mapsto a \cdot \sin(b \cdot t)$ mit $t \geq 0$ und $b > 0$ beschrieben werden. Ermitteln Sie den Wert von b.