Dieser Trainingstext ist ungekürzt.
Als Demoversion ist allerdings der Ausdruck gesperrt.

Vektorrechnung

Lernblatt: Lagebeziehungen

Aufgabenversion ohne Lösungen

Untersuchung der gegenseitigen Lage von

Punkt und Gerade
Punkt und Ebene
Punkt und Viereck

Gerade und Gerade
Gerade und Ebene

zwei Ebenen

Datei Nr. 63402

Stand 15. Januar 2013

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die Vektorrechnung macht Schülern das Leben vor allem dadurch schwer, dass es sehr viele Methoden gibt. Angesichts des Zeitdrucks unserer Abiturienten lernen viele nur noch oberflächlich. Nach der nächsten Arbeit wird dann vieles schnell wieder vergessen.

Daher ist es im Hinblick auf die Prüfung wichtig, dass man wiederholt und sich vor allem eine Lernsystematik aneignet, die dabei hilft, das Gelernte zu behalten. Wer hat schon die Zeit immer wieder von vorne anzufangen mit Lernen.

Die Mathematik hat in vielen Bereichen die günstige Eigenschaft, dass Fragestellungen ein typisches Merkmal enthalten. Hat man dazu die passende Methode bereit, kann man loslegen.

Also heißt das Erfolgsrezept:

Lerne zu den wichtigen Methoden (Fragestellungen) die Methoden!

Das ist oft wichtiger als das Üben mit Zahlen. Was nützt alle Rechenkunst, wenn man nicht weiß, mit welcher Methode man die Aufgabe lösen kann!

Aus diesem Grund habe ich eine Sammlung von 18 Lernblättern zum Thema **Lagebeziehungen** erstellt. Jedes Lernblatt gehört zu einer bestimmten Fragstellung. Die Version im Text 63201 enthält die Lösungsmethoden in Worten, aber auch Zahlenbeispiele zum Erleben des Aha-Effekts.

In vielen Fällen gibt es zwei oder drei Methoden. Es zeigt sich dabei, dass fast immer die Methode die günstigste ist, die ***ohne eine Geraden- oder Ebenengleichung*** auskommt! Und gerade diese wählen Schüler gerne, weil sie sich die anderen Methoden nicht merken. Ja so ist das leider …

Arbeits-Empfehlung

Damit man nun auch selbst üben kann und nicht immer gleich die Lösung vor Augen hat, gibt es dieselbe Sammlung noch einmal (Nummer 63401), mit Lösungen. Ich empfehle zuerst das Studium dieser vollständigen Seiten. Anschließend kann man die 18 nur mit den Aufgaben beschriebenen Blätter dieses Textes ausdrucken und damit testen, was man weiß …l

Noch ein Tipp: Man übe es, geeignete Skizzen zu den Aufgaben zu erstellen.
Sie zeigen einem oft, welche Methode man anwenden kann!

Viel Erfolg!
Friedrich Buckel.

Können heißt „Sich erinnern können“

Übersicht über die Prüfungsfragen

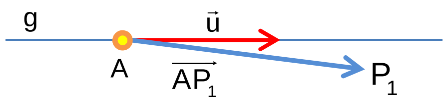
$\boxed{P-g}$

Lage eines Punktes zu einer Geraden

LB1

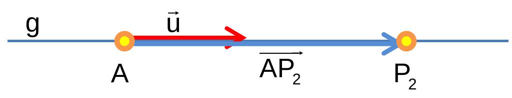
Gegeben ist g: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$. Liegt P_1 auf g?

$P_1(3 \mid -2 \mid 2)$



Wo liegt P_1?

$P_2(3 \mid -2 \mid 3)$



Wo liegt P_2?

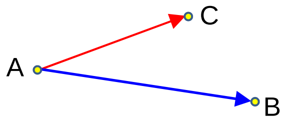
3P

Lage dreier Punkte zueinander

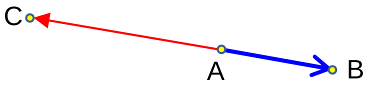
LB2

Überprüfe, ob A, B und C ein Dreieck bilden oder auf einer Geraden liegen.

$A(2\,|\,-1\,|\,4)$, $B(-2\,|\,1\,|\,-2)$, $C(-3\,|\,-8\,|\,3)$



$A(2\,|\,-1\,|\,4)$, $B(-2\,|\,1\,|\,-2)$, $C(8\,|\,-4\,|\,13)$



TIPP: Diese Skizzen können als Hilfe zum Finden einer Methode dienen.

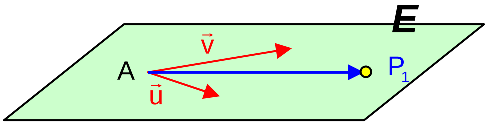
$\boxed{P-E_1}$

Lage eines Punktes zu einer Ebene

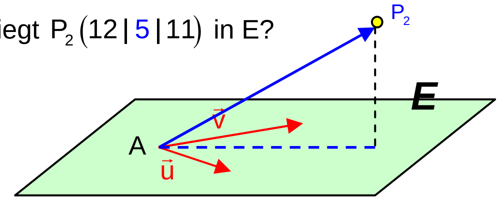
LB3

Gegeben ist die Ebene E: $\vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}}_{\vec{a}}+r\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}6\\-4\\5\end{pmatrix}}_{\vec{u}}+s\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}}_{\vec{v}}$

Liegt $P_1(12\,|-5\,|\,11)$ in E?



Liegt $P_2(12\,|\,5\,|\,11)$ in E?



TIPP: Diese Abbildung immer selbst erstellen!

Nur zur Übung: P_2 in E einsetzen:

$\boxed{P-E_2}$

Lage eines Punktes zu einer Ebene

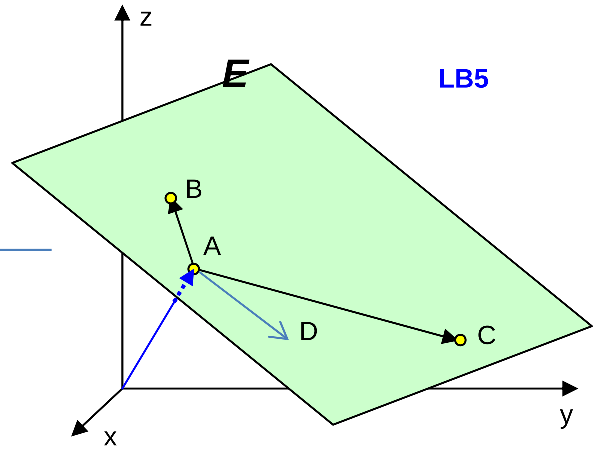
LB4

Methode und Beispiel

E: $3x+2y-5z=18$

Liegt $P_1(5\,|\,4\,|\,1)$ in E?

Liegt $P_2(5\,|\,4\,|\,-1)$ in E?



4P

Lage von 4 Punkten

LB5

Liegen A, B, C und D in einer Ebene?

$A(1|4|-1), B(3|5|0), C(0|7|4), D(-2|6|3)$

PGr$_1$

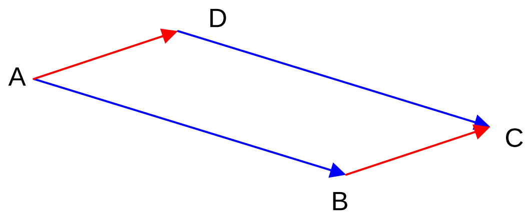
Bilden A, B, C, D ein Parallelogramm?

LB6

Methode und Beispiel

$A(2|5|-2), B(1|3|5), C(5|4|8), D(6|6|1)$

Wenn bei einem Viereck zwei gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind, dann handelt es sich um ein Parallelogramm.



PGr$_2$

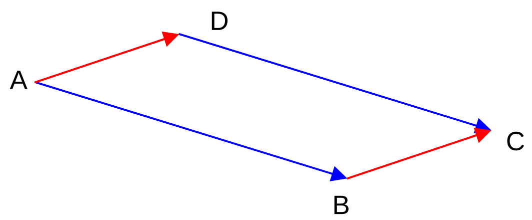
Berechnung des 4. Parallelogrammpunktes

LB7

Methode und Beispiel

$A(2\,|\,5\,|\,-2), B(1|\,3\,|\,5), C(5\,|\,4\,|\,8)$

Die **Parallelogrammbedingung** lautet für das abgebildete Parallelogramm:



Berechnung des Punktes D:

$\boxed{P-PGr}$

Ein Punkt relativ zu einem Parallelogramm

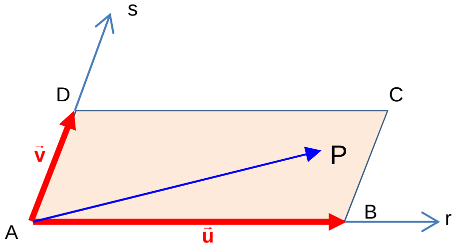
LB8

Methode und Beispiel

Geg.: $A(5\,|\,4\,|\,0)$, $B(-13\,|\,-5\,|\,6)$, $C(-33\,|\,0\,|\,21)$, $D(-15\,|\,9\,|\,15)$ sowie $P(-33\,|\,0\,|\,21)$

Wo liegt P?

(Im Parallelogramm – außerhalb -
auf dem Rand – in einem Teildreieck?)



$\boxed{g - h}$

Lage zweier Geraden

LB9

Gegeben sind g und h. Wie liegen sie zueinander?

Übersicht – noch keine Rechnungen

Welche 4 Möglichkeiten gibt es?

Beschreibe mit Worten eine Methode, wie man feststellen kann, welche Lage g und h zueinander einnehmen. *(Das könnte eine Fragestellung im Abitur sein!)*

$\boxed{g \| h}$

Sind zwei Geraden parallel?

LB10

Methode und Beispiel

Gegeben sind g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\boxed{g,h \text{ in } E}$

Schneiden sich g und h / sind sie windschief? LB11

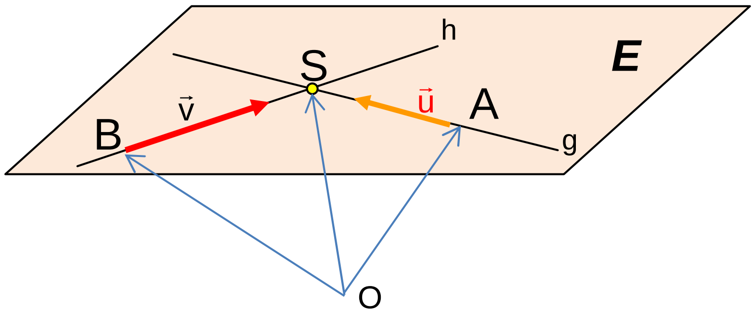
Gegeben sind g: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r\underbrace{\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{u}}$ und h: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\-6\\6\end{pmatrix}}_{\vec{b}} + s\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}}_{\vec{v}}$

Zuerst **sollte man feststellen (und aufschreiben), dass g und h nicht parallel sind, weil ihre Richtungsvektoren nicht kollinear sind.**

Achtung: Die weitere Methode hängt davon ab, wie die Aufgabe formuliert ist.

(1) Wenn <u>nicht</u> davon die Rede ist, gegebenenfalls einen Schnittpunkt zu berechnen, dann:

1. Methode:



(2) Wenn <u>es aber heißt</u>: Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt …

2. Methode:

$g-E_{PF}$

Lage einer Geraden zu einer Ebene

LB12

Gegeben sind g und E **(in Parameterform)**. Wie liegen sie zueinander?

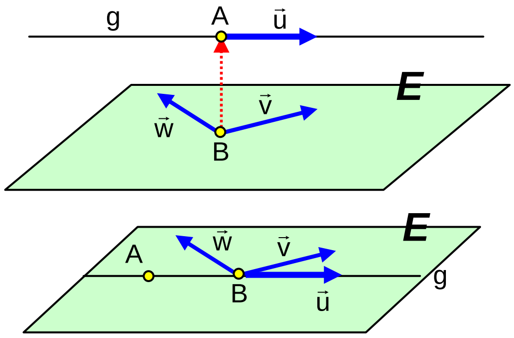
Methoden (Zahlenbeispiele nächste Seite)

Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Situationen zu betrachten:

Beschreibe mit Worten ein Verfahren zur Klärung des Sachverhalts.

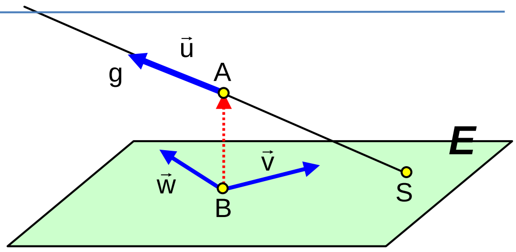
(1) **Wann ist g parallel zu E:**

Methode:



/Diese hilfreichen Skizzen üben!)

(2) **Wann schneiden sich g und E?**



$\boxed{g - E_{PF}}$

Lage einer Geraden zu einer Ebene

LB13

Gegeben sind g und E **(in Parameterform)**

Zahlenbeispiele zur Lageuntersuchung (LB12)

a) Gegeben sind g_1: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + t\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$ und $E: \ \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} + r\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} + s\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{w}}$

b) Gegeben sind g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) Gegeben sind g_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

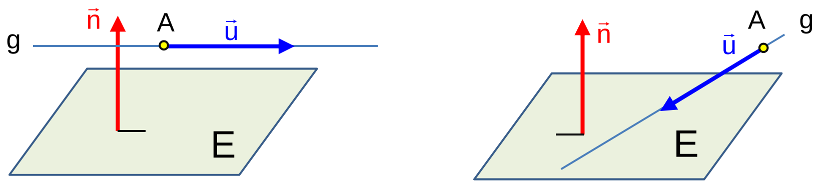
$g - E_{NF}$

Lage einer Geraden zu einer Ebene

LB14

Gegeben sind g und E **(in Normalenform)**. Wie liegen sie zueinander?

Methoden (Zahlenbeispiele nächste Seite)



a) Wie weist man nach, dass $g \parallel E$ ist?

b) Wie weist man nach, dass sich g und E schneiden?

$\boxed{g - E_{NF}}$

Lage einer Geraden zu einer Ebene

LB15

Zahlenbeispiele zur Lageuntersuchung

b) Gegeben $E:\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 18$ und $g_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) Gegeben $E:\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 18$ und $g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Gegeben $E:\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 18$ und $g_3:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{E_{NF} - E_{NF}}$

Lage zweier Ebenen

LB16

1. Fall: Beide Ebenen in Normalenform

Zahlenbeispiel

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Normalenvektoren, wenn die Ebenen parallel sind?

a) Gegeben: E_1: $4x - 6y + 2z = 11$ und E_2: $-6x + 9y - 3z = 8$

b) Gegeben: E_1: $4x - 6y + 2z = 11$ und E_2: $-6x + 9y - 3z = \boxed{-16{,}5}$

c) Gegeben E_1: $2x + 4y - 3z = 12$ und E_2: $x - 3y + 3z = 18$

Erg.: Schnittgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 36 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$

$\boxed{E_{NF} - E_{PF}}$

Lage zweier Ebenen

LB17

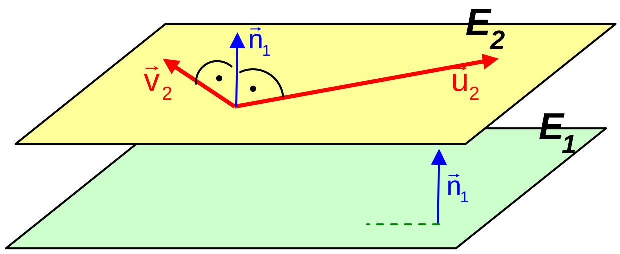
2. Fall: Ebenen in verschiedenen Gleichungsformen

Methoden und Zahlenbeispiele

Man kann natürlich die Parametergleichung in eine zweite Normalengleichung umwandeln und dann wie in LB 16 (1. Fall) vorgehen.

Wenn man das nicht tut:

Methode: (Wann ist $E_1 \parallel E_2$?)



a) Gegeben E_1: $2x - y + 3z = 12$ und E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Gegeben E_1: $2x - y + 3z = 12$ und E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{E_{PF} - E_{PF}}$

Lage zweier Ebenen

LB18

3. Fall: Beide Ebenen in Parameterform

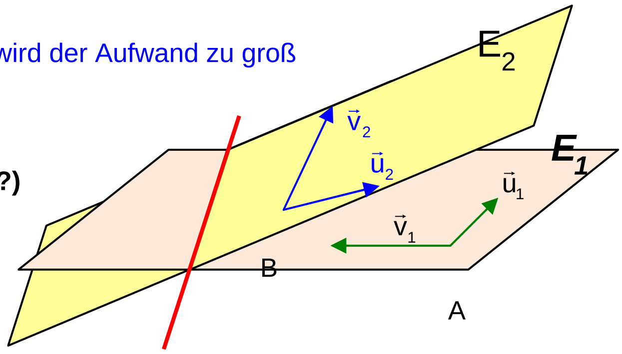
Methoden und Zahlenbeispiel

Man sollte dann eine Parametergleichung in eine Normalengleichung umwandeln und dann wie in LB 17 (2. Fall) vorgehen.

Man kann natürlich auch beide umrechnen, doch dann wird der Aufwand zu groß

Wenn man mit beiden Parametergleichungen arbeitet:

Methode: (Wann sind E_1 und E_2 parallel bzw. gleich?)



Gegeben E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix}$