Abitur Bayern 2011 G8 Analytische Geometrie VI

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1 \mid 7 \mid 3)$, $B(6 \mid -7 \mid 1)$ und $C(-2 \mid 1 \mid -3)$ gegeben.

Teilaufgabe 1a (4 BE)

Weisen Sie nach, dass die Punkte A, B und C ein rechtwinkliges Dreieck festlegen, dessen Hypotenuse die Strecke $[AB]$ ist und dessen kürzere Kathete die Länge 9 hat.

Teilaufgabe 1b (6 BE)

Alle Punkte $C^\star$ im Raum, die zusammen mit A und B ein zum Dreieck ABC kongruentes Dreieck festlegen, bilden zwei gleich große Kreise.
Beschreiben Sie (z. B. durch eine Skizze) die Lage der beiden Kreise bezüglich der Strecke $[AB]$ und ermitteln Sie den Radius der beiden Kreise.

Das Dreieck ABC aus Aufgabe 1a ist die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide $ABCS$ mit der Spitze $S(11{,}5 \mid 4 \mid -6)$.

Teilaufgabe 1c (3 BE)

Die Grundfläche der Pyramide liegt in einer Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

(*mögliches Ergebnis:* $E: \; 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 3 = 0$)

Teilaufgabe 1d (7 BE)

Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels der Seitenkante $[BS]$ gegen die Ebene E sowie das Volumen V der Pyramide.

(*Teilergebnis*: $V = 216$)

Teilaufgabe 1e (3 BE)

Welche Lagebeziehung muss eine Gerade zur Ebene E haben, wenn für jeden Punkt P dieser Geraden die Pyramide $ABCP$ das gleiche Volumen wie die Pyramide $ABCS$ besitzen soll? Begründen Sie Ihre Antwort.

Teilaufgabe 1f (7 BE)

Der Umkreis des Dreiecks ABC und der Punkt S legen einen Kegel fest. Zeigen Sie, dass es sich um einen geraden Kegel handelt, der Mittelpunkt des Grundkreises also zugleich der Höhenfußpunkt des Kegels ist. Berechnen Sie, um wie viel Prozent das Volumen des Kegels größer ist als das Volumen der Pyramide $ABCS$.