Abitur Bayern 2011 G9 GK Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto (e^x - 2)^2$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1a (3 BE)

Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

Teilaufgabe 1b (8 BE)

Ermitteln Sie Art und Lage des Extrempunkts, das Krümmungsverhalten und die Lage des Wendepunkts von G_f.

[zur Kontrolle: $f''(x) = 4e^x \cdot (e^x - 1)$]

Teilaufgabe 1c (4 BE)

Zeigen Sie, dass G_f und die durch die Gleichung $y = 4$ gegebene Gerade g genau einen Schnittpunkt $S\,(x_S \mid y_S)$ besitzen, und bestimmen Sie dessen Koordinaten.

[Teilergebnis: $x_S = 2\ln 2$]

Teilaufgabe 1d (6 BE)

Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente von G_f. Berechnen Sie $f(-2)$ und zeichnen Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-4 \leq x \leq 1{,}5$. Tragen Sie auch die Wendetangente und die Gerade g ein.

Teilaufgabe 1e (4 BE)

Betrachtet wird die Tangente an G_f in einem Punkt P, der G_f durchläuft. Geben Sie jeweils alle Werte an, die

α) die Steigung der Tangente

β) der y-Achsenabschnitt der Tangente

dabei annimmt.

Gegeben ist nun die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $I : x \mapsto \int\limits_{\ln 2}^{x} f(t)\,dt$.

Teilaufgabe 2a (4 BE)

Bestimmen Sie ohne Verwendung einer integralfreien Darstellung von I das Monotonieverhalten von I. Zeigen Sie, dass der Graph von I einen Terrassenpunkt besitzt und geben Sie dessen Koordinaten an.

Teilaufgabe 2b (2 BE)

Geben Sie ohne weitere Rechnung das Verhalten von I für $x \to -\infty$ an.

Teilaufgabe 3a (2 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto 0{,}5e^{2x} - 4e^{x} + 4x$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.

Teilaufgabe 3b (7 BE)

Der Graph G_f schließt mit den durch die Gleichungen $y = 4$ bzw. $x = u$ $(u < 0)$ bestimmten Geraden im I. und II. Quadranten ein Flächenstück mit dem Inhalt $A(u)$ ein. Bestimmen Sie $A(u)$.
Ermitteln Sie $\lim\limits_{u \to -\infty} A(u)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.