Abiturprüfung

Matrizenrechnung

Aufgaben aus Bremen zum Thema

Übergangsmatrizen

Datei Nr. 72501

Stand: 5. März 2013

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

VORWORT

Dies ist eine Sammlung von Abituraufgaben zum Thema Entwicklung von Populationen, Prozess-Diagramme und Übergangsmatrizen. Sie stammen alle aus Bremen. Zu fast jeder Aufgabe sind mehrere Varianten herausgegeben worden, für Leistungskurse, für Grundkurse, für CAS-Rechner, für GTR usw. Und dann gibt es einige Aufgaben, in denen auch Eigenwerte und Eigenvektoren verwendet werden. Ich stelle daher einige Aufgaben in zwei Varianten zur Verfügung.

Diese Aufgaben gibt es auch alle im Internet. Ich habe mich daher bemüht, die Lösungen sehr ausführlich zu gestalten, sodass Schüler sie nachvollziehen können. Und dass auch Lehrer, die diesen Teilbereich der Mathematik noch nicht kennen, schnell diese Materie erfassen. Ich habe daher auch oft zwei Lösungsmöglichkeiten angegeben.

Die Sammlung wurde in zwei Kapitel eingeteilt. Zuerst kommen nur Aufgaben ohne Verwendung von Eigenvektoren, und dann einige Aufgaben mit Eigenvektoren.

Zum Thema Eigenvektoren gibt es speziell im Hinblick auf Aufgaben zu Mehrstufigen Prozessen den Hinführungstext 62300.

Inhalt

Aufgabe 1: Rauchverhalten von Jugendlichen (Bremen GK 2007)

Um die langfristigen Auswirkungen von Antirauchkampagnen bei Jugendlichen zu testen, wurde im Jahr 2005 eine Gruppe von 14- bis 15-jährigen Schülerinnen und Schülern erfasst. 16% von ihnen gaben an, regelmäßig zu rauchen. Ein Jahr später wurde festgestellt, dass sich der Anteil der regelmäßig rauchenden Jugendlichen in dieser Gruppe auf 5% erniedrigt hatte. Der Befragung konnte man nicht entnehmen, wie das Wechselverhalten der Jugendlichen im Einzelnen aussah, d.h. wer von ihnen zum Nichtraucher / zur Nichtraucherin wurde bzw. neu anfing zu rauchen.

Rein rechnerisch könnte man den Übergang im betreffenden Jahr mit der Matrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}022 \\ 0{,}8 & 0{,}978 \end{pmatrix}$ beschreiben. In M bedeutet der Wert 0,2, dass 20% der Rauchergruppe Raucher blieben, und der Wert 0,8, dass 80% dieser Gruppe den Ausstieg schafften und nun zu den Nichtrauchern / Nichtraucherinnen gehörten.

a) Interpretieren Sie die Werte 0,022 und 0,978 der zweiten Spalte in diesem Zusammenhang.

b) Erstellen Sie zu M ein Übergangsdiagramm.

c) Zeigen Sie für die Vektoren $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}160 \\ 0{,}840 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}050 \\ 0{,}950 \end{pmatrix}$, dass gilt $\vec{v}_1 = M \cdot \vec{v}_0$ auf drei Nachkommastellen gerundet. Der Rechenweg muss dabei deutlich werden.

Erläutern Sie die Bedeutung der Komponenten von $\vec{v}_0$ und $\vec{v}_1$.

d) Gehen Sie davon aus, dass das Übergangsverhalten sich in den nächsten Jahren nicht ändern wird. Berechnen Sie Prognosewerte für die zwei folgenden Jahre.

e) Berechnen Sie die stationäre Verteilung $\vec{v}_S$ mit Hilfe der Gleichung $M \cdot \vec{v}_S = \vec{v}_S$.

Bestätigen Sie $\vec{v}_S = \begin{pmatrix} 0{,}027 \\ 0{,}973 \end{pmatrix}$ auf drei Nachkommastellen gerundet.

Gehen Sie davon aus, dass der Übergangsprozess die stationäre Verteilung $\vec{v}_S$ als Grenzwert besitzt. Erläutern Sie die Bedeutung der Komponenten von $\vec{v}_S$.

f) Auch für die Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}003 \\ 0{,}7 & 0{,}997 \end{pmatrix}$ gilt $N \cdot \vec{v}_0 \approx \vec{v}_1$, auf drei Nachkommastellen gerundet, $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$ aus Teil c).

Entscheiden Sie, bei welcher der beiden Übergangsmatrizen, M oder N, der Raucheranteil langfristig größer bleibt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung Aufgabe 1: Rauchverhalten

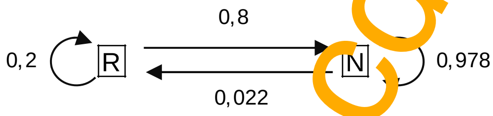
a) Gegeben ist $M=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}022\\ 0{,}8 & 0{,}978\end{pmatrix}$. Zugehörende Übergangstabelle:

	R	N
R	0,2	0,022
N	0,8	0,978

Die 2. Spalte gibt an, dass 2,2% der Nichtraucher nach 1 Jahre zur Gruppe der Raucher und gehören und 97,8% der Nichtrauchergruppe Nichtraucher geblieben sind.

b) Übergangsdiagramm:

R bedeutet Raucher, N Nichtraucher.



c) Behauptung: Für $\vec v_0=\begin{pmatrix}0{,}160\\0{,}840\end{pmatrix}$ und $\vec v_1=\begin{pmatrix}0{,}050\\0{,}950\end{pmatrix}$ gilt $\vec v_1 = M\cdot\vec v_0$:

$$\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}022\\ 0{,}8 & 0{,}978\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}160\\0{,}840\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}2\cdot 0{,}160+0{,}022\cdot 0{,}840\\0{,}8\cdot 0{,}160+0{,}978\cdot 0{,}840\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0{,}0504...\\0{,}9495...\end{pmatrix}\approx\vec v_1$$

Bedeutung der Komponenten von $\vec v_0$ und $\vec v_1$:

$\vec v_0=\begin{pmatrix}0{,}160\\0{,}840\end{pmatrix}$ stellt die Verteilung der Jugendlichen vor Beginn der Kampagne dar: 16% waren Raucher und 84% Nichtraucher.

$\vec v_1=\begin{pmatrix}0{,}050\\0{,}950\end{pmatrix}$ stellt die Verteilung der Jugendlichen nach einem Jahr dar: 5% waren immer noch Raucher, 95% betrug der Anteil der Nichtraucher.

d) Prognosewerte für die zwei folgenden Jahre.

$$\vec v_2=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}022\\ 0{,}8 & 0{,}978\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}050\\0{,}950\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}2\cdot 0{,}050+0{,}022\cdot 0{,}950\\0{,}8\cdot 0{,}050+0{,}978\cdot 0{,}950\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}0309\\0{,}9691\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0{,}031\\0{,}969\end{pmatrix}$$

$$\vec v_3=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}022\\ 0{,}8 & 0{,}978\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}031\\0{,}969\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}2\cdot 0{,}031+0{,}022\cdot 0{,}969\\0{,}8\cdot 0{,}031+0{,}978\cdot 0{,}969\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}027518\\0{,}972482\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0{,}028\\0{,}972\end{pmatrix}$$

e) Eine **stationäre Verteilung** bezieht sich auf einen Fixvektor, also auf einen Zustandsvektor $\vec v$, für den gilt $M\cdot\vec v_S=\vec v_S$.

Mit dem Ansatz $\vec v_S=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}022\\ 0{,}8 & 0{,}978\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$.

Als Gleichungssystem: $\begin{Bmatrix}0{,}2\cdot v_1+0{,}022\cdot v_2=v_1\\0{,}8\cdot v_1+0{,}978\cdot v_2=v_2\end{Bmatrix}$

Umformung: $\begin{Bmatrix}0{,}2\cdot v_1-v_1+0{,}022\cdot v_2=0\\0{,}8\cdot v_1+0{,}978\cdot v_2-v_2=0\end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix}-0{,}8\cdot v_1+0{,}022\cdot v_2=0\\0{,}8\cdot v_1-0{,}022\cdot v_2=0\end{Bmatrix}$

Diese Gleichungen sind gleichwertig, also ist eine entbehrlich. Da es sich jedoch um einen stochastischen Vektor handelt, ist die Summe seiner Komponenten 1, d.h. es gilt die Zusatzbedingung $v_1+v_2=1$

Lösung des Gleichungssystems: $\begin{Bmatrix}0{,}8\cdot v_1-0{,}022\cdot v_2=0\\v_1+\quad v_2=1\end{Bmatrix}$ (1) (2)

Aus (2) folgt: $v_2=1-v_1$ (3)

Einsetzen in (1): $0{,}8\cdot v_1-0{,}022\cdot(1-v_1)=0$

$$0{,}8\cdot v_1 - 0{,}022 + 0{,}022\cdot v_1 = 0$$
$$0{,}822\cdot v_1 = 0{,}022$$
$$v_1 = \frac{0{,}022}{0{,}822} \approx 0{,}0267... \approx 0{,}027$$

In (3): $$v_1 = \frac{0{,}022}{0{,}822} \approx 0{,}0267... \approx 0{,}027$$

Ergebnis: Diese stationäre Verteilung besitzt den Fixvektor $\vec{v}_F = \begin{pmatrix} 0{,}027 \\ 0{,}973 \end{pmatrix}$

Bedeutung: Tritt dieser Übergangsprozess fortgesetzt ein, werden 2,7% der Schüler Raucher sein und 97,3% Nichtraucher.

f) Berechnung des Fixvektors $\vec{w}_F$ zu Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}003 \\ 0{,}7 & 0{,}997 \end{pmatrix}$:

Ansatz: $N\cdot\vec{w}_F = \vec{w}_F$ mit $\vec{w}_F = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

Mit der Zusatzbedingung: $w_1 + w_2 = 1$

Man kann nun so rechnen wie in e), oder kürzer so:

$$N\cdot\vec{w}_F = \vec{w}_F \quad\Leftrightarrow\quad N\cdot\vec{w}_F = E\cdot\vec{w}_F \quad\Leftrightarrow\quad N\cdot\vec{w}_F - E\cdot\vec{w}_F = \vec{o} \quad\Leftrightarrow\quad (N-E)\cdot\vec{w}_F = \vec{o}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}3-1 & 0{,}003 \\ 0{,}7 & 0{,}997-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -0{,}7 & 0{,}003 \\ 0{,}7 & -0{,}003 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} -0{,}7\cdot w_1 + 0{,}003\cdot w_2 = 0 \\ 0{,}7\cdot w_1 - 0{,}003\cdot w_2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Die zweite Gleichung ist entbehrlich. Unter Verwendung der aus der Zusatzbedingung folgenden Gleichung $w_2 = 1 - w_1$ erhält man aus der 2. Gleichung des Systems:

$$0{,}7\cdot w_1 - 0{,}003\cdot(1-w_1) = 0$$

bzw. $$0{,}7\cdot w_1 + 0{,}003\cdot w_1 = 0{,}003$$

$$0{,}703\cdot w_1 = 0{,}003$$
$$w_1 = \frac{0{,}003}{0{,}703} \approx 0{,}004$$

Fixvektor wird also: $\vec{w}_F = \begin{pmatrix} 0{,}004 \\ 0{,}996 \end{pmatrix}$.

Bei diesem Übergang ist langfristig der Raucheranteil geringer als bei der Übergangsmatrix M.