Stochastik

4. Aufgabe

Familie Wedel verbringt regelmäßig ihren Skiurlaub in Au, einem großen Skigebiet im Bregenzerwald, in dem insgesamt 44 Lifte mit 44 Kilometern Piste und zahlreiche Loipen zur Verfügung stehen.

27	

1. Drei der größten Gebiete sind Damüls (D), Warth (W) und Faschina (F). Hier wurde das Verhalten der Stammgäste erfasst:

   Skifahrer, die in W fuhren, bleiben zu 80% dem Gebiet am nächsten Tag treu, die übrigen wechseln am nächsten Tag zu gleichen Teilen nach D und F.

   Skifahrer, die in D fuhren, wechseln mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% am nächsten Tag nach W.

   70% der Skifahrer in D und F bleiben ihrem Gebiet treu, 20% wechseln von F nach W.

   a) Sabine Wedel fährt am Sonntag in Warth.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie am Dienstag nicht dort fährt?

   b) Sohn Peter fährt am Sonntag in Damüls.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er an den beiden folgenden Tagen ebenfalls dort fährt?

   c) Wie werden die Stammgäste sich langfristig auf die drei Skigebiete verteilen?

Stochastik

2. Vater Wolfgang ist Langläufer; er hat sich für ein Gaudirennen qualifiziert, bei dem jeweils ein Gast und ein einheimischer Langläufer (bzw. eine Langläuferin) zusammen gelost werden. **11**

a) Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, ein solches Team zu bilden, wenn sich jeweils 10 Gäste und 10 Einheimische qualifiziert haben?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Wedel mit seiner ebenfalls qualifizierten Vermieterin zusammen gelost wird?

c) Was ändert sich, wenn sich bei Gästen und Einheimischen jeweils 5 Damen und 5 Herren qualifiziert haben und daraus ausschließlich geschlechtsgemischt Paarungen gebildet werden sollen?

d) Das Team von Herrn Wedel gehört zu den sechs Teams, die sich für den Endlauf qualifiziert haben.

Wie viele theoretisch möglichen Platzierungsmöglichkeiten im Endlauf gibt es für diese Teams?

Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn man weiß, dass das Team von Herrn Wedel Letzter geworden ist?

3. Als Skipass testet man in Au in diesem Winter eine neue Chipkarte als 3-Täler-Skipass: die Skifahrer fahren mit umgehängter Karte an einem Lesegerät vorbei, die Karte wird erkannt und der Zugang zum Skilift wird freigemacht. **33**

Laut Herstellerangabe wird der Chip mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% sofort vom Lesegerät erkannt.
Unterstellen wir, dass die Herstellerangabe stimmt.

Berufsbildende Schule Wirtschaft I, Ludwigshafen am Rhein
Berufliches Gymnasium, Bildungsgang Wirtschaft

Abiturprüfung 2007

Mathematik
Leistungsfachanforderungen

Stochastik

a) Sabine Wedel fährt im Schnitt 20 Mal am Tag mit dem Lift.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert die Karte auf Anhieb
(i) bei mehr als 18 Fahrten?
(ii) immer?
(iii) zwischen 17 und 19 mal?
(iv) mindestens drei Mal nicht?

b) Frau Wedel beobachtet in ihrer Mittagspause 50 Gäste am Lift.

(i) Mit wie vielen Lesefehlern ist dabei im Schnitt zu rechnen?

(ii) Sie bemerkt, dass bei 5 Skifahrern die Karte nicht auf Anhieb gelesen werden kann. Kann man aufgrund dieser Beobachtung die Behauptung des Herstellers mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 6 % ablehnen?

c) Das Tourismusbüro möchte die Qualität der Karten testen und entnimmt der neuen Lieferung zufällig n Karten um sie zu testen.
Wenn die Stichprobe keine fehlerhaften Teile enthält, wird dem Hersteller geglaubt und die Lieferung angenommen, ansonsten zweifelt man die Qualitäts-zusage (mindestens 95% der Karten sind in Ordnung) des Herstellers an.

Wie groß muss n in etwa sein, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% mindestes eine fehlerhafte Karte erwischt?

d) Der Hersteller testet die Karten selbst: Er entnimmt eine Stichprobe von 2000 Karten aus seiner Produktion.

(i) Berechne Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er höchstens 90 defekte Karten findet!

(ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwischen 80 und 110 defekte Karten zu finden?

Berufsbildende Schule Wirtschaft I, Ludwigshafen am Rhein
Berufliches Gymnasium, Bildungsgang Wirtschaft

Abiturprüfung 2007

Mathematik
Leistungsfachanforderungen

Stochastik

4. Ein Mal in der Woche veranstaltet das Tourismusbüro für die Wintergäste einen Glücksspieleabend. | **9** |

Gegen einen Einsatz von einem Euro darf man mit zwei unterscheidbaren Würfeln einmal würfeln.

Wirft man eine Zwei und eine Eins („Mäxchen"), so erhält man 10 €, bei einem Pasch erhält man 5€, ansonsten verliert man seinen Einsatz.

Erstellen Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zu diesem Spiel!

Für wen bringt das Spiel langfristig Vorteile?

Anlage: Summentabellen 20 und 50 und Tabelle für Φ

Ansätze / Nebenrechnungen jeweils angeben!
Wahrscheinlichkeiten auf vier Dezimale genau angeben, Prozentwerte mit einer Dezimalen!
Begründungen / Erklärungen in vollständigen Sätzen angeben!

Berufsbildende Schule Wirtschaft I, Ludwigshafen am Rhein
Berufliches Gymnasium, Bildungsgang Wirtschaft

Abiturprüfung 2007 **Mathematik**
Leistungsfachanforderungen

Stochastik

Lösungen zu den Aufgaben bzw. Erwartungshorizont

Familie Wedel verbringt regelmäßig ihren Skiurlaub in Au, einem großen Skigebiet im Bregenzerwald, in dem insgesamt 44 Lifte mit 44 Kilometern Piste und zahlreiche Loipen zur Verfügung stehen.

1. Drei der größten Gebiete sind Damüls (D), Warth (W) und Faschina (F).
   Hier wurde das Verhalten der Stammgäste erfasst:

   Skifahrer, die in W fuhren, bleiben zu 80% dem Gebiet am nächsten Tag treu, die übrigen wechseln am nächsten Tag zu gleichen Teilen nach D und F.

   Skifahrer, die in D fuhren, wechseln mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% am nächsten Tag nach W.

   70% der Skifahrer in D und F bleiben ihrem Gebiet treu, 20% wechseln von F nach W.

   a) Sabine Wedel fährt am Sonntag in Warth.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie am Dienstag nicht dort fährt?

Lösung:

Übergangsmatrix:

	W	D	F
W	0,8	0,2	0,2
D	0,1	0,7	0,1
F	0,1	0,1	0,7

$$\Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_2 = U^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}68 \\ 0{,}16 \\ 0{,}16 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \vec{p}_2 = 0{,}32$$

Stochastik

b) Sohn Peter fährt am Sonntag in Damüls.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er an den beiden folgenden Tagen ebenfalls dort fährt?

Lösung:

$$\vec{p}_{2a} = U \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,7 \\ 0,1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{p}_{2b} = U \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0,7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,14 \\ 0,49 \\ 0,07 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{p}_2 = 0,49$$

c) Wie werden die Stammgäste sich langfristig auf die drei Skigebiete verteilen?

Lösung:

$$Ansatz: \quad U \cdot \vec{x} = \vec{x} \Rightarrow (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & -0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & -0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{2z+z+z=1} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

Langfristig werden 50 % der Stammgäste nach Warth, 25 % nach Damüls und 25 % nach Faschina fahren.

Stochastik

Herleitung:

$$Ansatz: \quad U \cdot \vec{x} = \vec{x} \Rightarrow (U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & -0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & -0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrr|l|r}
I.) & -0,2 & 0,2 & 0,2 & 0 & \xrightarrow{10 \cdot I.)} \\
II.) & 0,1 & -0,3 & 0,1 & 0 & \xrightarrow{10 \cdot II.)} \\
III.) & 0,1 & 0,1 & -0,3 & 0 & \xrightarrow{10 \cdot III.)} \\
\hline
I.) & -2 & 2 & 2 & 0 & \xrightarrow{I.) + 2 \cdot III.)} \\
II.) & 1 & -3 & 1 & 0 & \xrightarrow{II.) - III.)} \\
III.) & 1 & 1 & -3 & 0 & \\
\hline
I.) & 0 & 4 & -4 & 0 & \xrightarrow{0,25 \cdot I.)} \\
II.) & 0 & -4 & 4 & 0 & \xrightarrow{II.) + I.)} \\
III.) & 1 & 1 & -3 & 0 & \xrightarrow{III.) - 0,25 \cdot I.)} \\
\hline
I.) & 0 & 1 & -1 & 0 & y = z \\
II.) & 0 & 0 & 0 & 0 & z = z \\
III.) & 1 & 0 & -2 & 0 & x = 2z
\end{array}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{2z+z+z=1} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

Stochastik

2. Vater Wolfgang ist Langläufer; er hat sich für ein Gaudirennen qualifiziert, bei dem jeweils ein Gast und ein einheimischer Langläufer (bzw. eine Langläuferin) zusammen gelost werden.

a) Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, ein solches Team zu bilden, wenn sich jeweils 10 Gäste und 10 Einheimische qualifiziert haben?

Lösung: Es gibt 10 * 10 Möglichkeiten, also insgesamt 100 Kombinationen.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Wedel mit seiner ebenfalls qualifizierten Vermieterin zusammen gelost wird?

Lösung: Nach Laplace gilt: $\frac{1\left[günstiges\ Ereignis\right]}{100\left[mögliche\ Ereignisse\right]} = 0,01 = 1\left[\%\right]$

c) Was ändert sich, wenn sich bei Gästen und Einheimischen jeweils 5 Damen und 5 Herren qualifiziert haben und daraus ausschließlich geschlechtsgemischt Paarungen gebildet werden sollen?

Lösung:

Nun gibt es nur noch 2 * 5 * 5 Möglichkeiten, also insgesamt 50 Kombinationen.

Für die Wahrscheinlichkeit gilt dann: $\frac{1\left[günstiges\ Ereignis\right]}{50\left[mögliche\ Ereignisse\right]} = 0,02 = 2\left[\%\right]$

d) Das Team von Herrn Wedel gehört zu den sechs Teams, die sich für den Endlauf qualifiziert haben.

Wie viele theoretisch möglichen Platzierungsmöglichkeiten im Endlauf gibt es für diese Teams?

Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn man weiß, dass das Team von Herrn Wedel Letzter geworden ist?

Lösung: 6! = 720 Möglichkeiten; wenn Wedel letzter wird,
dann sind es nur noch 5 ! * 1 = 120 Möglichkeiten

Stochastik

3. Als Skipass testet man in Au in diesem Winter eine neue Chipkarte als 3-Täler-Skipass: die Skifahrer fahren mit umgehängter Karte an einem Lesegerät vorbei, die Karte wird erkannt und der Zugang zum Skilift wird freigemacht.

Laut Herstellerangabe wird der Chip mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% sofort vom Lesegerät erkannt.
Unterstellen wir, dass die Herstellerangabe stimmt.

a) Sabine Wedel fährt im Schnitt 20 Mal am Tag mit dem Lift.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert die Karte auf Anhieb

(i) bei mehr als 18 Fahrten?
(ii) immer?
(iii) zwischen 17 und 19 mal?
(iv) mindestens drei Mal nicht?

Lösung:

$Binomialverteilung;\quad n=20;\quad p=0,95;\quad q=0,05$

$(i)\quad B_{20;0.95}(X>18)=B_{20;0.95}(X\geq 19)=1-B_{20;0.95}(X\leq 18)=1-\left[(1-0,7358)\right]=0,7358$

$(ii)\quad B_{20;0.95}(X=20)=\binom{20}{20}\cdot 0,95^{20}\cdot 0,05^{0}=0,3585$

$(iii)\quad B_{20;0.95}(17\leq X\leq 19)=B(X\leq 19)-B(X\leq 16)=(1-0,3585)-(1-0,9841)=0,6256$

$(iv)\quad B_{20;0,05}(Y\geq 3)=1-B_{20;0,05}(Y\leq 2)=1-0,9245=0,0755$

b) Frau Wedel beobachtet in ihrer Mittagspause 50 Gäste am Lift.

(i) Mit wie vielen Lesefehlern ist dabei im Schnitt zu rechnen?

(ii) Sie bemerkt, dass bei 5 Skifahrern die Karte nicht auf Anhieb gelesen werden kann. Kann man aufgrund dieser Beobachtung die Behauptung des Herstellers mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 6 % ablehnen?

Stochastik

Lösung:

Binomialverteilung; $n=50$; $p=0,05$; $q=0,95$

(i) $\mu = n\cdot p \Rightarrow \mu = 50\cdot 0,05 = 2,5\,[Lesefehler]$

(ii) *Möglichkeit* 1: *Sichtweise WEDEL*

$H_0: p_0 \le 0,05 \Rightarrow H_1: p_1 > 0,95$ *mit* $\alpha = 0,06$

rechtsseitiger Test

$B_{50;0,05}(X \ge g) \le \alpha \Rightarrow 1 - B_{50;0,05}(X \ge g) \ge 1-\alpha$

$\Rightarrow B_{50;0,05}(X \le g-1) \ge 0,94 \Rightarrow g-1 = 4$

$\Rightarrow g = 5 \Rightarrow Annahme = [0;4]$ $Ablehnung = [5;50]$

Möglichkeit 2: *Sichtweise Hersteller*

$H_0: p_0 \ge 0,95 \Rightarrow H_1: p_1 < 0,05$ *mit* $\alpha = 0,06$

linksseitiger Test

$B_{50;0,95}(X \le g) \le \alpha \Rightarrow B_{50;0,95}(X \le g) \le 0,06$

$\Rightarrow B_{50;0,95}(X \ge g+1) \ge 0,94 \Rightarrow g+1 = 45$

$\Rightarrow g = 44 \Rightarrow Ablehnung = [0;44]$ $Annahme = [45;50]$

Möglichkeit 3: *Sichtweise WEDEL mit Normalverteilung*

$H_0: p_0 \le 0,05 \Rightarrow H_1: p_1 > 0,95$ *mit* $\alpha = 0,06 \xrightarrow{\varphi(x)=0,94} c = 1,56$

rechtsseitiger Test

$\mu = 50\cdot 0,05 = 2,5$ *und* $\sigma = 2,5\cdot 0,95 = 1,5411$

Grenze: $g = \mu + c\cdot\sigma = 2,5 + 1,56\cdot 1,5411 = 4,904$

$\Rightarrow Annahme = [0;4]$ $Ablehnung = [5;50]$

Stochastik

Möglichkeit 4: Sichtweise Hersteller mit Normalverteilung

$H_0: p_0 \geq 0,95 \Rightarrow H_1: p_1 < 0,05 \quad mit\ \alpha = 0,06 \xrightarrow{\varphi(x)=0,94} c = 1,56$

linksseitiger Test

$\mu = 50 \cdot 0,95 = 47,5 \quad und \quad \sigma = 47,5 \cdot 0,05 = 1,5411$

$Grenze: \quad g = \mu - c \cdot \sigma = 47,5 - 1,56 \cdot 1,5411 = 45,096$

$\Rightarrow \quad Ablehnung = [0\,;45] \quad Annahme = [46\,;50]$

Die Angabe des Hersteller kann nicht abgelehnt werden.

c) Das Tourismusbüro möchte die Qualität der Karten testen und entnimmt der neuen Lieferung zufällig n Karten um sie zu testen.
Wenn die Stichprobe keine fehlerhaften Teile enthält, wird dem Hersteller geglaubt und die Lieferung angenommen, ansonsten zweifelt man die Qualitätszusage (mindestens 95% der Karten sind in Ordnung) des Herstellers an.

Wie groß muss n in etwa sein, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% mindestes eine fehlerhafte Karte erwischt?

Lösung:

$Binomialverteilung; \quad n = ?; \quad p_{Fehler} = 0,05; \quad q = 0,95$

$B_{n;0.05}(X \geq 1) \geq 0,99 \Rightarrow 1 - B_{n;0.05}(X = 0) \geq 0,99 \Rightarrow B_{n;0.05}(X = 0) \leq 0,01$

$\Rightarrow \binom{n}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^n \leq 0,01 \Rightarrow 0,95^n \leq 0,01 \Rightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,95)}$

$\Rightarrow n \geq 89,7811 \Rightarrow n \geq 90$

Stochastik

d) Der Hersteller testet die Karten selbst: Er entnimmt eine Stichprobe von 2000 Karten aus seiner Produktion.

(i) Berechne Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er höchstens 90 defekte Karten findet!

(ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwischen 80 und 110 defekte Karten zu finden?

Lösung:

Normalverteilung mit Stetigkeitskorrektur

$\mu = 2.000 \cdot 0,05 = 100 \qquad \sigma = \sqrt{100 \cdot 0,95} = 9,7468$

$(i) \quad P(X \le 90) = \Phi\left(\frac{90+0,5-100}{9,7468}\right) = \Phi(-0,9747) \approx \Phi(-0,97) = 0,1660$

$(ii) \quad P(80 \le X \le 110) = \Phi\left(\frac{110+0,5-100}{9,7468}\right) - \Phi\left(\frac{80-0,5-100}{9,7468}\right)$

$P(80 \le X \le 110) = \Phi(1,08) - \Phi(-2,1) = 0,8599 - 0,0179 = 0,842$

Stochastik

4. Ein Mal in der Woche veranstaltet das Tourismusbüro für die Wintergäste einen Glücksspieleabend.

Gegen einen Einsatz von einem Euro darf man mit zwei unterscheidbaren Würfeln einmal würfeln.

Wirft man eine Zwei und eine Eins („Mäxchen"), so erhält man 10 €, bei einem Pasch erhält man 5€, ansonsten verliert man seinen Einsatz.

Erstellen Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung zu diesem Spiel!

Für wen bringt das Spiel langfristig Vorteile?

Lösung:

	Mäxchen	*Pasch*	*sonst*
$Nettogewinn:\ x$	9	4	-1
Wahrscheinlichkeit	$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{36}$	$\frac{6}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{6}{36}$	$1-\frac{2}{36}-\frac{6}{36}=\frac{28}{36}$

$$Erwartungswert:$$

$$E(x) = 9\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{6}{36}-1\cdot\frac{28}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} \approx 0{,}39$$

Das Tourismusbüro verliert auf lange Sicht etwa 39 Cent, d.h. der Spieler ist im Vorteil, da er auf lange Sicht 39 Cent gewinnen würde.