Lineare Algebra

3. Aufgabe

Ein Betrieb stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus drei Rohstoffen (R_1, R_2 und R_3) drei Zwischenprodukte (Z_1, Z_2 und Z_3) und daraus die 3 Endprodukte (E_1, E_2 und E_3) her.

Dazu seien folgende Matrizen einer Bedarfsrechnung gegeben:

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2t & 2 & t+1 \\ 3 & t & 4 \end{pmatrix} \qquad M_{ZE} = \begin{pmatrix} t+4 & 2 & 1 \\ 3 & t & 2 \\ 4 & 2 & 2t+1 \end{pmatrix}$$

1.) Wie viele der einzelnen Rohstoffe muss man auf Vorrat haben, damit man folgende Anzahl an Zwischenprodukten herstellen kann

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 8 \end{pmatrix}^T \text{ ?}$$

4	

2.) Wir haben einen Vorrat an Zwischenprodukten von

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 81 & 58 & 81 \end{pmatrix}^T .$$

Wie viele Endprodukte können daraus hergestellt werden, wenn im Lager eine eiserne Reserve von 10 ME je Zwischenprodukttyp verbleiben soll und **t = 1** gilt?

6	

Seit einiger Zeit plagen wir uns mit den hohen Rohstoffkosten und suchen nach Alternativen bzw. neuen Angeboten.

3.) Ermitteln Sie die Höhe der Rohstoffkosten je Mengeneinheit Endprodukt bei folgenden Rohstoffpreisen in Abhängigkeit von **t**.

10	

Produkt	R_1	R_2	R_3
Kosten	**2 t**	**0,5 t**	**4**

Lineare Algebra

Gegeben seien nun die Koeffizientenmatrix A_t und der Vektor $\vec{b}_t$:

$$A_t = \begin{pmatrix} -t & 1 & -3 \\ 2 & 2 & t \\ 3t & 5 & -t \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{b}_t = \begin{pmatrix} t+3 \\ 2-t^2 \\ t^2-1 \end{pmatrix}$$

4.) Für welche Werte von $t \in \Re$ ist die Matrix A_t invertierbar? | 6 | |

5.) Für welchen Wert von $t \in \Re$ stellt der Vektor $\vec{x} = (-2 \quad -1 \quad -2)^T$ | 6 | |

eine Lösung des LGS $A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}_t$ dar?

6.) Für welche Werte von $t \in \Re$ hat das LGS $A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}_t$ | 12 | |

(i) keine Lösung? (ii) eine Lösung?

(iii) unendlich viele Lösungen?

Drei Betriebe eines Unternehmensverbunds sind nach dem Leontief-Modell miteinander verbunden und stehen zueinander in Austauschbeziehungen; zudem beliefern sie den Markt gemäß nachfolgender Darstellung:

	a	b	c	$Markt$
a	40	20	30	10
b	10	30	20	40
c	20	50	10	20

Lineare Algebra

7.) Bestimmen Sie die technologische Matrix A. | 4 | |

8.) Wie viele Einheiten könnte jeder Betrieb an den Markt abgeben, wenn die Gesamtproduktion um jeweils $\frac{1}{4}$ der Ursprungsmenge erhöht wird? | 6 | |

9.) Beweisen Sie folgende Behauptung allgemein: | 8 | |

„Eine Verdoppelung aller Mengen, die auf dem externen Markt abgesetzt werden, bedeutet eine Verdoppelung der Gesamtproduktion."

10.) Berechnen Sie die Höhe der Gesamtproduktion in den Betrieben und erstellen Sie die zugehörige Input-Output-Tabelle, wenn folgende Konstellation gegeben ist: | 12 | |

Betrieb a liefert an den Markt 20 ME und das Verhältnis der Gesamtproduktion der jeweiligen Betriebe zueinander steht im Verhältnis 3 : 2 : 4.

11.) Zeigen Sie, dass die Matrix | 6 | |

$$B = \frac{1}{47}\begin{pmatrix} 106 & 66 & 50 \\ 26 & 96 & 30 \\ 38 & 68 & 80 \end{pmatrix}$$

die Leontief-Inverse darstellt.

Lineare Algebra
Lösungen zu den Aufgaben bzw. Erwartungshorizont

Ein Betrieb stellt in einem zweistufigen Produktionsprozess aus drei Rohstoffen (R_1 , R_2 und R_3) drei Zwischenprodukte (Z_1 , Z_2 und Z_3) und daraus die 3 Endprodukte (E_1 , E_2 und E_3) her.

Dazu seien folgende Matrizen einer Bedarfsrechnung gegeben:

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2t & 2 & t+1 \\ 3 & t & 4 \end{pmatrix} \qquad M_{ZE} = \begin{pmatrix} t+4 & 2 & 1 \\ 3 & t & 2 \\ 4 & 2 & 2t+1 \end{pmatrix}$$

1.) Wie viele der einzelnen Rohstoffe muss man auf Vorrat haben, damit man folgende Anzahl an Zwischenprodukten herstellen kann

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 8 \end{pmatrix}^T \; ?$$

__Lösung:__

$$M_{RZ} \cdot \vec{z} \; = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2t & 2 & t+1 \\ 3 & t & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ 18t+28 \\ 10t+47 \end{pmatrix}$$

2.) Wir haben einen Vorrat an Zwischenprodukten von

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 81 & 58 & 81 \end{pmatrix}^T .$$

Wie viele Endprodukte können daraus hergestellt werden, wenn im Lager eine eiserne Reserve von 10 ME je Zwischenprodukttyp verbleiben soll und **t = 1** gilt?

__Lösung:__

$$M_{ZE}(1) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad Ansatz: \; M_{ZE}(1) \cdot \vec{x} \; = \; \vec{z}$$

Lineare Algebra

Lösung des LGS per Gauß-Verfahren:

$$
\begin{array}{r|rrr|r|l}
I.) & 5 & 2 & 1 & 71 & \\
II.) & 3 & 1 & 2 & 48 & \xrightarrow{I-III} \\
III.) & 4 & 2 & 3 & 71 & \\
\hline
I.) & 1 & 0 & -2 & 0 & \\
II.) & 3 & 1 & 2 & 48 & \xrightarrow[III-4\cdot I]{II-3\cdot I} \\
III.) & 4 & 2 & 3 & 71 & \\
\hline
I.) & 1 & 0 & -2 & 0 & \\
II.) & 0 & 1 & 8 & 48 & \xrightarrow{III-2\cdot II} \\
III.) & 0 & 2 & 11 & 71 & \\
\hline
I.) & 1 & 0 & -2 & 0 & \Rightarrow \quad x_1 = 10 \\
II.) & 0 & 1 & 8 & 48 & \Rightarrow \quad x_2 = 8 \\
III.) & 0 & 0 & -5 & -25 & \Rightarrow \quad x_3 = 5
\end{array}
$$

Seit einiger Zeit plagen wir uns mit den hohen Rohstoffkosten und suchen nach Alternativen bzw. neuen Angeboten.

3.) Ermitteln Sie die Höhe der Rohstoffkosten je Mengeneinheit Endprodukt bei folgenden Rohstoffpreisen in Abhängigkeit von **t**.

Produkt	R_1	R_2	R_3
Kosten	**2 t**	**0,5 t**	**4**

__Lösung:__

$$Ansatz: \quad K_R \quad = \quad \vec{k}_R \cdot M_{RZ} \cdot M_{ZE} \quad = \quad \vec{k}_R \cdot M_{RE}$$

Lineare Algebra

$$M_{RZ}.M_{ZE} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} & & & t+4 & 2 & 1 \\ & & & 3 & t & 2 \\ & & & 4 & 2 & 2t+1 \\ \hline 5 & 3 & 2 & 5t+37 & 3t+14 & 4t+13 \\ 2t & 2 & t+1 & 2t^2+12t+10 & 8t+2 & 2t^2+5t+5 \\ 3 & t & 4 & 6t+28 & t^2+14 & 10t+7 \end{array}$$

$$\vec{k}_R.M_{RE} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} & & & 5t+37 & 3t+14 & 4t+13 \\ & & & 2t^2+12t+10 & 8t+2 & 2t^2+5t+5 \\ & & & 6t+28 & t^2+14 & 10t+7 \\ \hline 2t & \frac{1}{2}t & 4 & K_{E_1} & K_{E_2} & K_{E_3} \end{array}$$

$$K_{E_1} = 10t^2+74t+t^3+6t^2+5t+24t+112 = t^3+16t^2+103t+112$$

$$K_{E_2} = 6t^2+28t+4t^2+t+4t^2+56 = 14t^2+29t+56$$

$$K_{E_3} = 8t^2+26t+t^3+\frac{5}{2}t^2+\frac{5}{2}t+40t+28 = t^3+\frac{21}{2}t^2+\frac{137}{2}t+28$$

Gegeben seien nun die Koeffizientenmatrix A_t und der Vektor $\vec{b}_t$:

$$A_t = \begin{pmatrix} -t & 1 & -3 \\ 2 & 2 & t \\ 3t & 5 & -t \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{b}_t = \begin{pmatrix} t+3 \\ 2-t^2 \\ t^2-1 \end{pmatrix}$$

Lineare Algebra

4.) Für welche Werte von $t \in \Re$ ist die Matrix A_t invertierbar?

Lösung:

$$Det\left(A_t\right) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow Det\begin{pmatrix} -t & 1 & -3 \\ 2 & 2 & t \\ 3t & 5 & -t \end{pmatrix} \overset{Sarrus}{=} 2t^2+3t^2-30+18t+5t^2+2t$$

$$\Rightarrow Det\left(A_t\right) = 10\left(t^2+2t-3\right) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow t_1=-3 \vee t_2=1$$

$$Ergebnis: \quad A_t \ invertierbar \Leftrightarrow t \in \Re \setminus \{-3;1\}$$

5.) Für welchen Wert von $t \in \Re$ stellt der Vektor $\vec{x} = \left(-2 \quad -1 \quad -2\right)^T$

eine Lösung des LGS $A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}_t$ dar?

Lösung:

$$A_t \cdot \vec{x} \overset{!}{=} \vec{b}_t \Rightarrow \begin{pmatrix} -t & 1 & -3 \\ 2 & 2 & t \\ 3t & 5 & -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} t+3 \\ 2-t^2 \\ t^2-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2t+5 \\ -2t-6 \\ -4t-5 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} t+3 \\ 2-t^2 \\ t^2-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Gleichsetzen der ersten Komponenten}} 2t+5=t+3 \Rightarrow t=-2$$

Probe durch Einsetzen in die beiden anderen Komponentengleichungen ergibt wahre Aussagen!

6.) Für welche Werte von $t \in \Re$ hat das LGS $A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}_t$

(ii) keine Lösung? (ii) eine Lösung?

(iv) unendlich viele Lösungen?

Lösung: Probe durch Einsetzen der beiden kritischen **t**-Werte:

Lineare Algebra

t =1:

$$\begin{array}{r|rrr|rl}
\hline
I.) & -1 & 1 & -3 & 4 & \\
II.) & 2 & 2 & 1 & 1 & \xrightarrow[III+3\cdot I]{II+2\cdot I} \\
III.) & 3 & 5 & -1 & 0 & \\
\hline
I.) & -1 & 1 & -3 & 4 & \\
II.) & 0 & 4 & -5 & 9 & \xrightarrow{III-2\cdot II} \\
III.) & 0 & 8 & -10 & 12 & \\
\hline
I.) & -1 & 1 & -3 & 4 & \\
II.) & 0 & 4 & -5 & 9 & \\
III.) & 0 & 0 & 0 & -6 & Widerspruch \\
\hline
\end{array}$$

Für **t** = 1 gibt es keine Lösung

t = -3:

$$\begin{array}{r|rrr|rl}
\hline
I.) & 3 & 1 & -3 & 0 & \\
II.) & 2 & 2 & -3 & -7 & \xrightarrow[III+3\cdot I]{0{,}5\cdot II} \\
III.) & -9 & 5 & 3 & 8 & \\
\hline
I.) & 3 & 1 & -3 & 0 & \\
II.) & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \xrightarrow{I-3\cdot II} \\
III.) & 0 & 8 & -6 & 8 & \\
\hline
I.) & 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{21}{2} & \\
II.) & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \xrightarrow{III+4\cdot I} \\
III.) & 0 & 8 & -6 & 8 & \\
\hline
I.) & 0 & -2 & \frac{3}{2} & \frac{21}{2} & \\
II.) & 1 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} & \\
III.) & 0 & 0 & 0 & 50 & Widerspruch \\
\hline
\end{array}$$

Für **t** = - 3 gibt es keine Lösung

Lineare Algebra

Auswertung:

$$\begin{array}{rcl} \textit{keine Lösung} & \Leftrightarrow & t \in \{-3\,;1\} \\ \textit{eine bestimmte Lösung} & \Leftrightarrow & t \in \Re \setminus \{-3\,;1\} \\ \textit{unendlich viele Lösungen} & & \textit{nicht möglich} \end{array}$$

Drei Betriebe eines Unternehmensverbunds sind nach dem Leontief-Modell miteinander verbunden und stehen zueinander in Austauschbeziehungen; zudem beliefern sie den Markt gemäß nachfolgender Darstellung:

	a	*b*	*c*	*Markt*
a	40	20	30	10
b	10	30	20	40
c	20	50	10	20

7.) Bestimmen Sie die technologische Matrix A.

<u>Lösung:</u>

	a	*b*	*c*	*Markt*	*Gesamt*
a	40	20	30	10	100
b	10	30	20	40	100
c	20	50	10	20	100
	:100	:100	:100		

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Algebra

8.) Wie viele Einheiten könnte jeder Betrieb an den Markt abgeben, wenn die Gesamtproduktion um jeweils $\frac{1}{4}$ der Ursprungsmenge erhöht wird?

__Lösung:__

$$A\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{x} \Rightarrow \vec{y} = \vec{x} - A\vec{x} \Rightarrow \vec{y} = (E-A)\cdot\vec{x}$$

$$\Rightarrow \quad (E-A)\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{6}{10} & -\frac{2}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{2}{10} & -\frac{5}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 125 \\ 125 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,5 \\ 50,0 \\ 25,0 \end{pmatrix}$$

9.) Beweisen Sie folgende Behauptung allgemein:

„Eine Verdoppelung aller Mengen, die auf dem externen Markt abgesetzt werden, bedeutet eine Verdoppelung der Gesamtproduktion.“

__Lösung:__

$$A\vec{x} + \vec{y} = \vec{x}$$
$$\Rightarrow \vec{y} = \vec{x} - A\vec{x}$$
$$\Rightarrow \vec{y} = (E-A)\cdot\vec{x}$$
$$\Rightarrow (E-A)^{-1}\cdot\vec{y} = \vec{x}$$

$$\text{Verdoppelung von } \vec{y}: \quad \vec{y}_{neu} = \left(2\vec{y}\right)$$
$$\Rightarrow (E-A)^{-1}\cdot\vec{y}_{neu} = \vec{x}_{neu}$$
$$\Rightarrow (E-A)^{-1}\cdot\left(2\vec{y}\right) = \vec{x}_{neu}$$
$$\Rightarrow 2\cdot(E-A)^{-1}\cdot\vec{y} = \vec{x}_{neu}$$
$$\xrightarrow{(E-A)^{-1}\cdot\vec{y}=\vec{x}} 2\cdot\vec{x} = \vec{x}_{neu}$$

Lineare Algebra

10.) Berechnen Sie die Höhe der Gesamtproduktion in den Betrieben und erstellen Sie die zugehörige Input-Output-Tabelle, wenn folgende Konstellation gegeben ist:

Betrieb a liefert an den Markt 20 ME und das Verhältnis der Gesamtproduktion der jeweiligen Betriebe zueinander steht im Verhältnis 3 : 2 : 4.

Lösung:

$$\vec{y} = (E-A)\cdot\vec{x}$$

$$\Rightarrow (E-A)\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}5 & 0{,}9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3x \\ 2x \\ 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2x \\ 0{,}3x \\ 2x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0{,}2\cdot\vec{x} = 20 \Rightarrow x = 100$$

Input-Output-Tabelle:

$$\xrightarrow{A\cdot\vec{x}_{neu}} \quad A\cdot\vec{x}_{neu} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 40 & 120 \\ 30 & 60 & 80 \\ 60 & 100 & 40 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{neue Input-Output-Tebelle:}}$

	a	b	c	Markt	Gesamt
a	120	40	120	20	300
b	30	60	80	30	200
c	60	100	40	200	400

Lineare Algebra

11.) Zeigen Sie, dass die Matrix B die Leontief-Inverse darstellt.

$$B = \frac{1}{47}\begin{pmatrix} 106 & 66 & 50 \\ 26 & 96 & 30 \\ 38 & 68 & 80 \end{pmatrix}$$

<u>Lösung:</u>

Beweis: (E – A) * B = E

$$\begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 & -0,3 \\ -0,1 & 0,7 & -0,2 \\ -0,2 & -0,5 & 0,9 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{47} \cdot \begin{pmatrix} 106 & 66 & 50 \\ 26 & 96 & 30 \\ 38 & 68 & 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$