Berufsbildende Schule Wirtschaft I, Ludwigshafen am Rhein
Berufliches Gymnasium, Bildungsgang Wirtschaft

Abiturprüfung 2007 **Mathematik**
Leistungsfachanforderungen

Differential- und Integralrechnung rationaler Funktionen

2. Aufgabe

Gegeben ist die Funktionenschar: $f_k(x) = \frac{x^2 - 4x + k}{x^2 - 4} \quad mit \quad k \in \Re$

Untersuchen Sie die Funktion bezüglich folgender Aufgabenstellungen:

1.) Untersuchen Sie $f_k(x)$ auf Definitionslücken und bestimmen Sie die Näherungslinien im Unendlichen (waagrechte Asymptoten)! **5**

2.) Bestimmen Sie Lage und Anzahl der Zählernullstellen in Abhängigkeit von k. **8**

3.) Untersuchen Sie $f_k(x)$ auf behebbare Definitionslücken! **16**

Bestimmen Sie anschließend die unterschiedlichen Definitionsbereiche in Abhängigkeit von k!

4.) **Sei k = 4:** **13**

a) Zeigen Sie, dass gilt: $f_4(x) = \frac{x-2}{x+2} = 1 - \frac{4}{x+2}$

Erläutern Sie kurz ihre Vorgehensweise.

b) Bestimmen Sie anschließend mit der neuen Form Achsenschnitt-punkte, Definitionslücken, Definitionsbereich und Asymptoten.

c) Untersuchen Sie die Funktion auf Extrema und Wendepunkte.

5.) Wie lautet eine Stammfunktion von $f_4(x)$? **6**

Differential- und Integralrechnung rationaler Funktionen

6.) Erstellen Sie die Gleichung einer Parabel p(x) die durch den Punkt P(2 / 0) geht und im Punkt Q(1 / – 1) die Steigung 2 hat. | 12 |

Zeichnen Sie den Graphen von p(x) in ein Koordinatensystem.

Zwischenergebnis: ********** $p(x) = -x^2 + 4x - 4$ **********

7.) In den Graphen von p(x) wird ein Rechteck wie folgt einbeschrieben: | 20 |

Die Grundlinie [CD] liegt auf der Geraden y = – 4,
die Punkte A und B liegen auf der Parabel und haben die Koordinaten
$A\big(2-u \mid p(2-u)\big)$ und $B\big(2+u \mid p(2+u)\big)$.

Zeichnen Sie das Rechteck für den Sonderfall u = 1 in ihr Koordinatensystem aus Teilaufgabe 6.

Bestimmen Sie u so, dass die Fläche des Rechtecks maximal ist!

Berufsbildende Schule Wirtschaft I, Ludwigshafen am Rhein
Berufliches Gymnasium, Bildungsgang Wirtschaft

Abiturprüfung 2007 **Mathematik**
Leistungsfachanforderungen

Differential- und Integralrechnung rationaler Funktionen
Lösungen zu den Aufgaben bzw. Erwartungshorizont

Gegeben ist die Funktionenschar: $f_k(x) = \frac{x^2 - 4x + k}{x^2 - 4}$ *mit* $k \in \Re$

Untersuchen Sie die Funktion bezüglich folgender Aufgabenstellungen:

1.) Untersuchen Sie $f_k(x)$ auf Definitionslücken und bestimmen Sie die Näherungslinien im Unendlichen (waagrechte Asymptoten)!

Lösung:

$$\textit{Definitionsmenge}: \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = 2 \quad \Rightarrow \quad D = \Re \setminus \{-2; 2\}$$

$$\textit{Asymptote}: \quad a(x) = 1 \quad \text{weil Zählergrad = Nennergrad: } \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} \to 1$$

2.) Bestimmen Sie Lage und Anzahl der Zählernullstellen in Abhängigkeit von k.

Lösung:

$$x^2 - 4x + k = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4k}}{2} = 2 \pm \sqrt{4 - k}$$

$$\textit{Fall } 1: \quad k = 4 \quad \Rightarrow \quad \text{Diskriminante} = 0 \xrightarrow{\textit{eine Zählernullstelle}} x = 2$$

Aber Achtung: x = 2 ist eine behebbare Definitionslücke;
daher liegt hier keine Nullstelle vor!

$$\textit{Fall } 2: \quad k < 4 \quad \Rightarrow \quad \text{Diskriminante} > 0 \xrightarrow{\textit{zwei Zählernullstellen}} x = 2 \pm \sqrt{4 - k}$$

$$\textit{Fall } 3: \quad k > 4 \quad \Rightarrow \quad \text{Diskriminante} < 0 \xrightarrow{\textit{keine Zählernullstellen}} L = \{\quad\}$$

Differential- und Integralrechnung rationaler Funktionen

3.) Untersuchen Sie $f_k(x)$ auf behebbare Definitionslücken!

Bestimmen Sie anschließend die unterschiedlichen Definitionsbereiche in Abhängigkeit von k!

Lösung:

Fall 1: $k = 4$

$\Rightarrow$ Doppelte Zählernullstelle und Einfache Nennernullstelle bei x = 2

$\xrightarrow{\text{eine behebbare Definitionslücke}} x = 2$

$$\Rightarrow \quad f_4{}^*(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}$$

$$\Rightarrow \quad D = \Re \setminus \{-2\}$$

Fall 2: $k = -12$

Ermittlung des k-Wertes: $-2 = 2 \pm \sqrt{4-k} \xrightarrow{-2} -4 = \pm\sqrt{4-k}$

$\xrightarrow{\text{Quadrieren}} 16 = 4 - k \xrightarrow{+k-16} k = -12$

$\Rightarrow$ Zählernullstellen: $x = 2 \pm \sqrt{4-(-12)} = 2 \pm 4 \Rightarrow x_1 = 6 \vee x_2 = -2$

$\Rightarrow$ Einfache Zählernullstelle und Einfache Nennernullstelle bei x = -2

$\xrightarrow{\text{eine behebbare Definitionslücke}} x = -2$

$$\Rightarrow \quad f_{(-12)}{}^*(x) = \frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 4} = \frac{(x+2)(x-6)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-6}{x-2}$$

$$\Rightarrow \quad D = \Re \setminus \{2\}$$

Fall 3: $k \in \Re \setminus \{-12\,;\,4\}$

$\Rightarrow$ Verschiedene Zähler- und Nennernullstellen

$\xrightarrow{\text{keine behebbare Definitionslücke}} D = \Re \setminus \{-2\,;\,2\}$

Differential- und Integralrechnung rationaler Funktionen

4.) **Sei k = 4:**

a) Zeigen Sie, dass gilt: $f_4(x) = \frac{x-2}{x+2} = 1-\frac{4}{x+2}$

Erläutern Sie kurz ihre Vorgehensweise.

Lösung:

k = 4 wird ein gesetzt:

$$f_4^*(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} \overset{Binome}{=} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} \overset{Kürzen}{=} \frac{x-2}{x+2} \overset{\text{Polynomdivision mit Restterm}}{=} 1-\frac{4}{x+2}$$

b) Bestimmen Sie anschließend mit der neuen Form Achsenschnitt-punkte, Definitionslücken, Definitionsbereich und Asymptoten.

Lösung:

Achsenschnittpunkt: $y-Achse$

$$f_4(0) = \frac{0-2}{0+2} = -1 \Rightarrow S_y(0 \mid -1)$$

Achsenschnittpunkt: $x-Achse\,(=Nullstelle)$

$$f_4(x) = \frac{x-2}{x+2} = 0 \Rightarrow x=2$$

Definitionslücke: *Nennernullstelle*

$$x+2 = 0 \Rightarrow x=-2$$

Definitionsbereich: $D=\Re\setminus\{-2\}$

Asymptote:

$$\lim_{x\to\infty} f_4(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+2} = \lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x+2} \to 1-0 \Rightarrow a(x)=1$$

Differential- und Integralrechnung rationaler Funktionen

c) Untersuchen Sie die Funktion auf Extrema und Wendepunkte.

Lösung:

$$f_4(x) = 1-4(x+2)^{-1}$$

Ableitungen:

$$f_4'(x) = 4(x+2)^{-2} = \frac{4}{(x+2)^2} \qquad f_4''(x) = -8(x+2)^{-3} = \frac{-8}{(x+2)^3}$$

Extremwerte:

$$f_4'(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{4}{(x+2)^2} = 0 \xrightarrow{\cdot(x+2)^2} 4 = 0 \Rightarrow \textit{keine Extrema}$$

Wendepunkte:

$$f_4''(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{-8}{(x+2)^3} = 0 \xrightarrow{\cdot(x+2)^3} -8 = 0 \Rightarrow \textit{keine Wendepunkte}$$

5.) Wie lautet eine Stammfunktion von $f_4(x)$?

Lösung:

$$F_4(x) = \int\left(1-\frac{4}{x+2}\right)dx = x-4\ln|x+2|+c$$

Berufsbildende Schule Wirtschaft I, Ludwigshafen am Rhein
Berufliches Gymnasium, Bildungsgang Wirtschaft

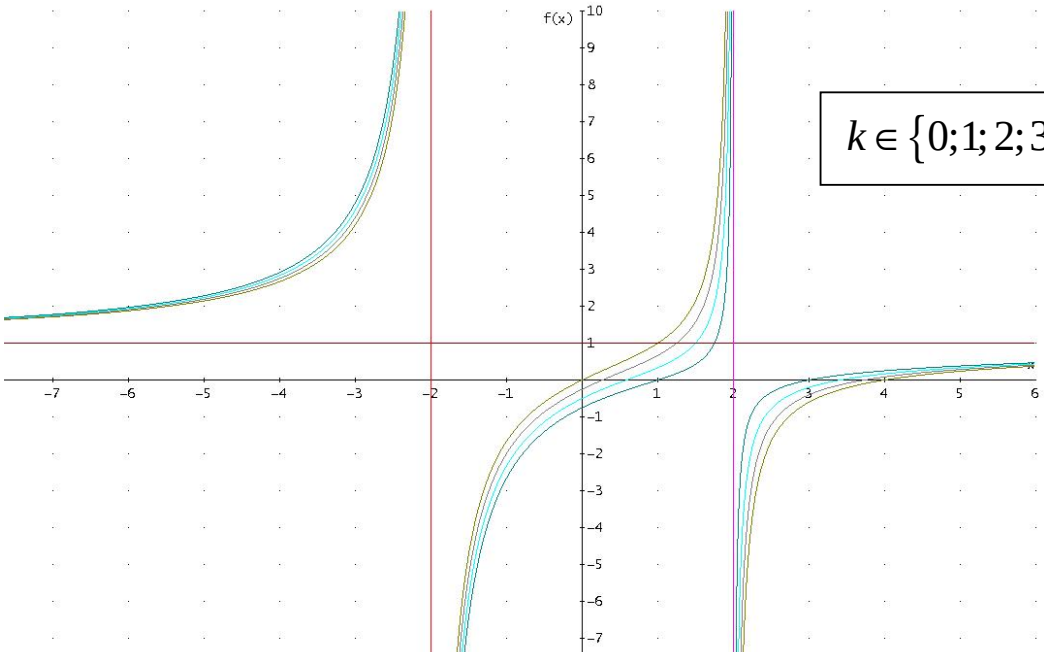
Abiturprüfung 2007

Mathematik
Leistungsfachanforderungen

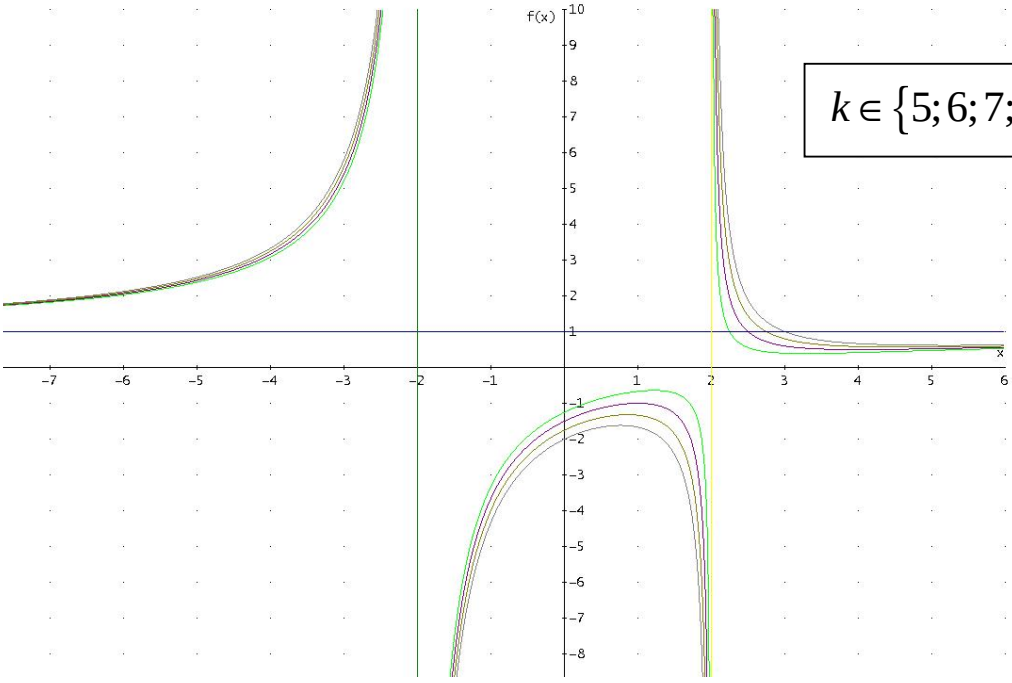
Differential- und Integralrechnung rationaler Funktionen

Graphenkaleidoskop zur Funktion $f_k(x) = \dfrac{x^2 - 4x + k}{x^2 - 4}$ $\quad mit \quad k \in \Re$

mit Fallunterscheidungen zu k:



$k \in \{0;1;2;3\}$



$k \in \{5;6;7;8\}$

Berufsbildende Schule Wirtschaft I, Ludwigshafen am Rhein

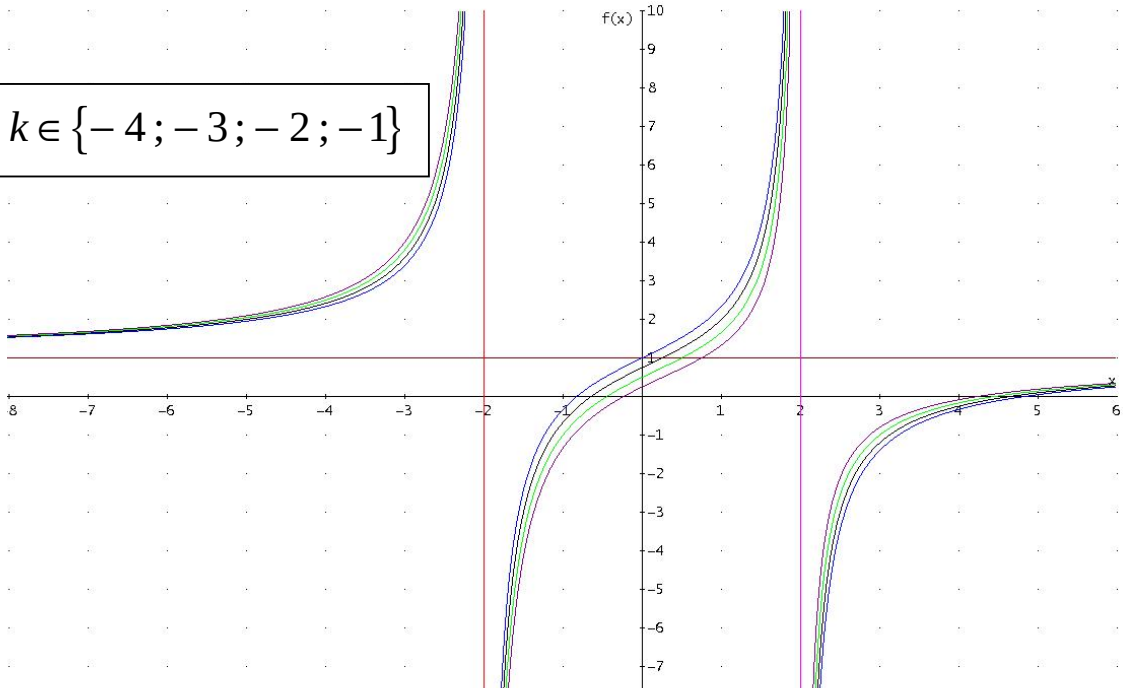
Berufliches Gymnasium, Bildungsgang Wirtschaft

Abiturprüfung 2007

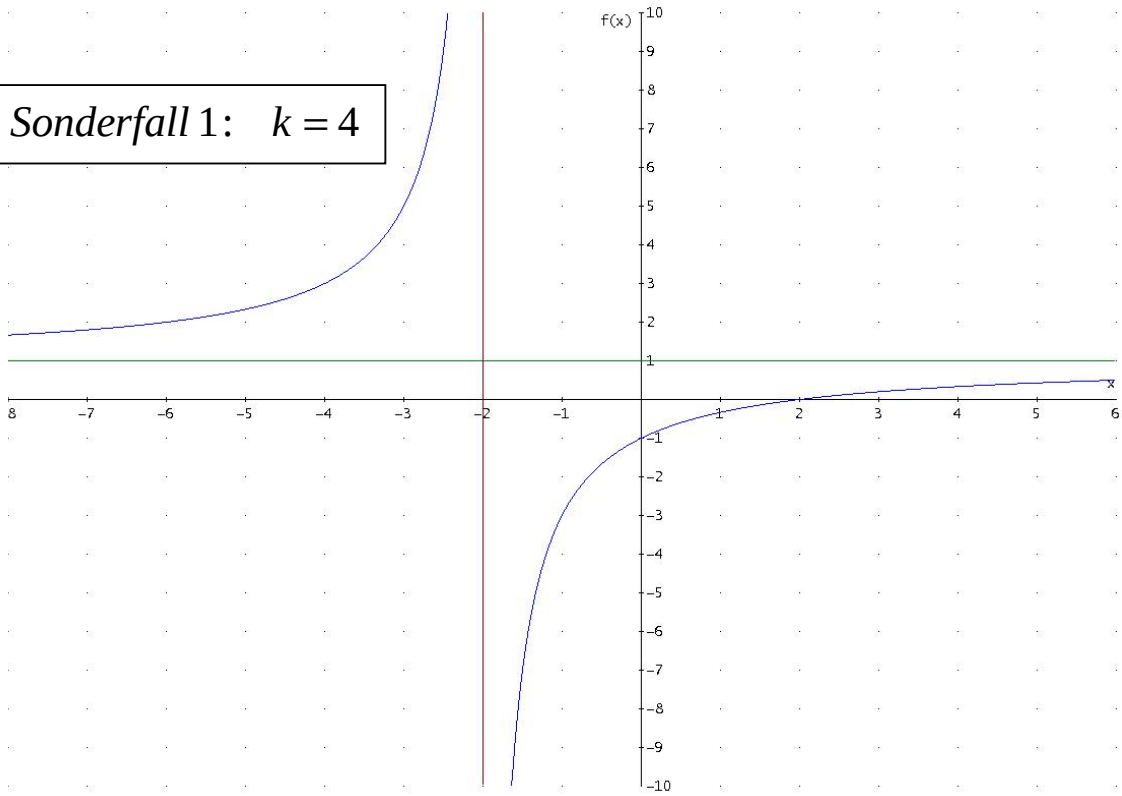
Mathematik
Leistungsfachanforderungen

Differential- und Integralrechnung rationaler Funktionen

$k \in \{-4; -3; -2; -1\}$



Sonderfall 1: $k = 4$



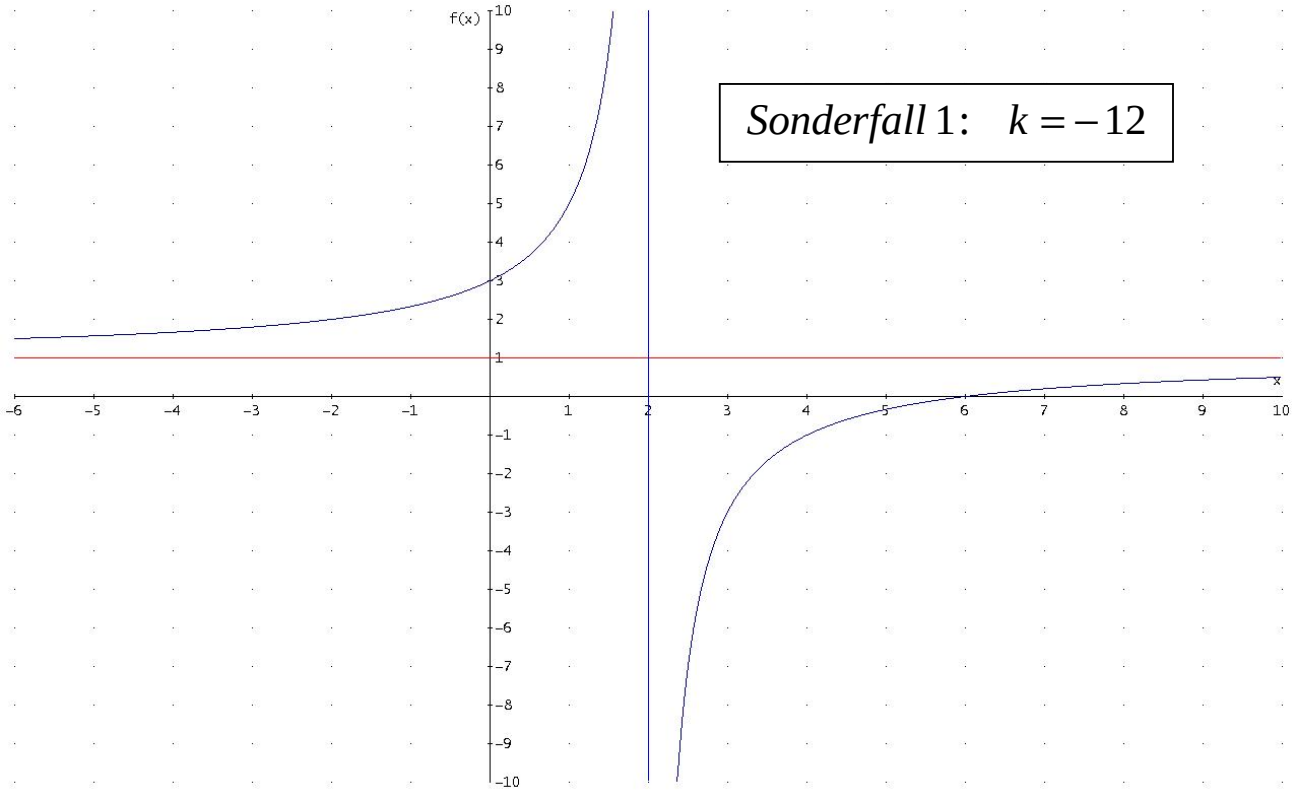
Berufsbildende Schule Wirtschaft I, Ludwigshafen am Rhein

Berufliches Gymnasium, Bildungsgang Wirtschaft

Abiturprüfung 2007

Mathematik
Leistungsfachanforderungen

Differential- und Integralrechnung rationaler Funktionen



$$Sonderfall\,1: \quad k = -12$$

Differential- und Integralrechnung rationaler Funktionen

6.) Erstellen Sie die Gleichung einer Parabel p(x) die durch den Punkt P(2 / 0) geht und im Punkt Q(1 / – 1) die Steigung 2 hat.

Zeichnen Sie den Graphen von p(x) in ein Koordinatensystem.

Lösung:

$$Ansätze: \quad p(x) = ax^2 + bx + c \quad und \quad p'(x) = 2ax + b$$

$$I.) \quad P(2 \mid 0) \qquad 0 = 4a + 2b + c$$

$$II.) \quad Q(1 \mid -1) \qquad -1 = a + b + c$$

$$III.) \quad m = 2 \; in \; x = 1 \qquad 2 = 2a + b$$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{I.)-II.)} \; 1 = 3a + b \\ \xrightarrow{III.)} \; b = 2 - 2a \end{array}\right\} \xrightarrow{eingesetzt} 1 = 3a + 2 - 2a \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow b = 2 - 2 \cdot (-1) = 4$$

$$\Rightarrow c = -1 - a - b = -1 - (-1) - 4 = -4$$

$$\Rightarrow p(x) = -x^2 + 4x - 4$$

Zwischenergebnis: ********** **p(x) = – x² + 4 x – 4** **********

7.) In den Graphen von p(x) wird ein Rechteck mit wie folgt einbeschrieben:

Die Grundlinie [CD] liegt auf der Geraden y = – 4,
die Punkte A und B liegen auf der Parabel und haben die Koordinaten
$A(2-u \mid p(2-u))$ und $B(2+u \mid p(2+u))$.

Zeichnen Sie das Rechteck für den Sonderfall u = 1 in ihr Koordinaten-system aus Teilaufgabe 6.

Bestimmen Sie u so, dass die Fläche des Rechtecks maximal ist!

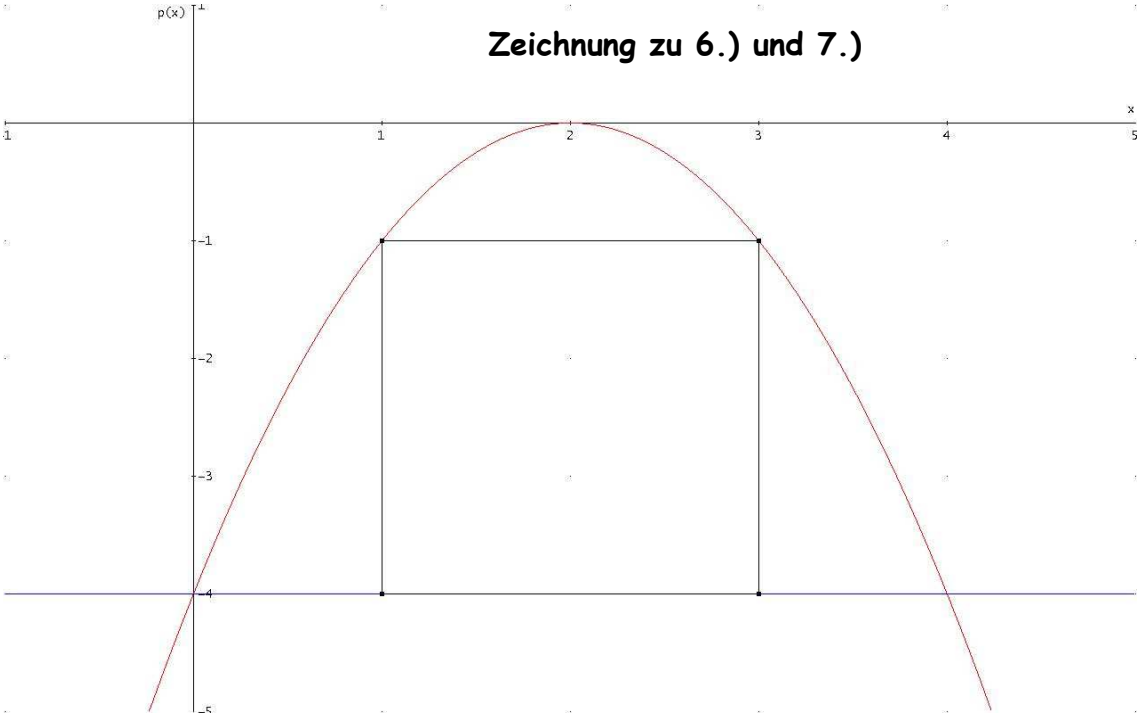
Berufsbildende Schule Wirtschaft I, Ludwigshafen am Rhein
Berufliches Gymnasium, Bildungsgang Wirtschaft

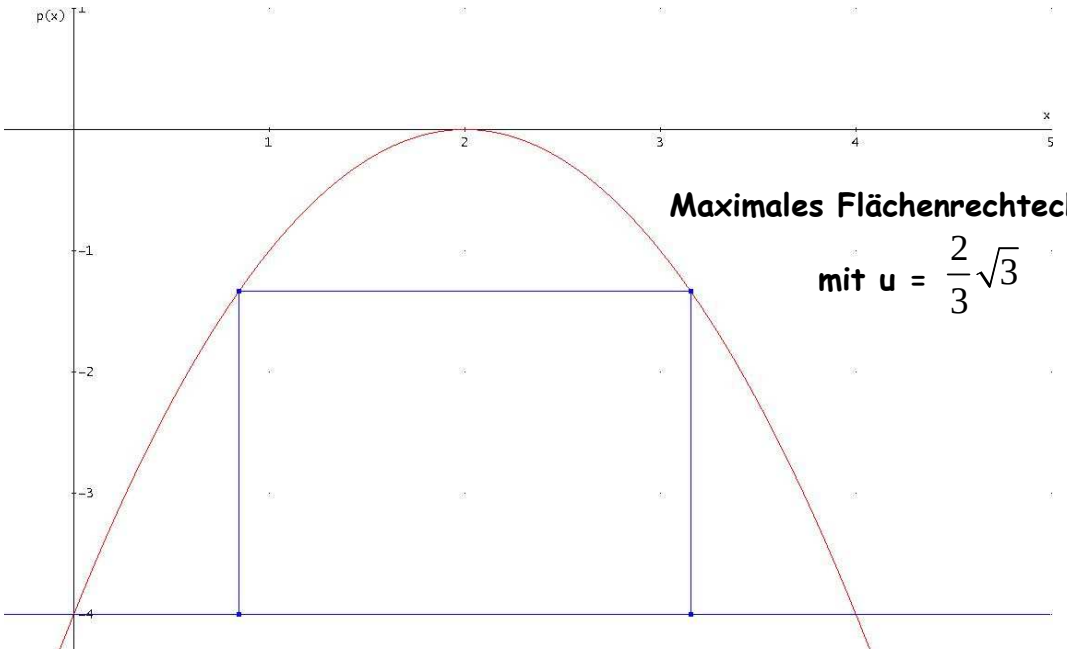
Abiturprüfung 2007 **Mathematik**
Leistungsfachanforderungen

Differential- und Integralrechnung rationaler Funktionen

Lösung:

Zeichnung zu 6.) und 7.)





Maximales Flächenrechteck

mit u = $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

Differential- und Integralrechnung rationaler Funktionen

$$A_{\text{Rechteck}}(a,b) = a \cdot b$$

$$A_{\text{Rechteck}}(u) = \left[(2+u)-(2-u)\right] \cdot \left[p(2+u)-(-4)\right]$$

$$A_{\text{Rechteck}}(u) = 2u \cdot \left\{\left[-(2+u)^2+4(2+u)-4\right]+4\right\}$$

$$A_{\text{Rechteck}}(u) = 2u \cdot \left(-4-4u-u^2+8+4u\right) = 2u \cdot \left(-u^2+4\right) = -2u^3+8u$$

$$A_{\text{Rechteck}}'(u) = -6u^2+8 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow |u| = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$A_{\text{Rechteck}}''(u) = -12u$$

$$A_{\text{Rechteck}}''\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = -12 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = -\frac{8}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \textit{Max bei } u = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ Für u muss gelten: $u > 0$

$$A_{\text{Rechteck}}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -2 \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^3 + 8 \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$A_{\text{Rechteck}}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} + \frac{24}{3} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{16}{3} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 6{,}16$$