Berufsbildende Schule Wirtschaft I, Ludwigshafen am Rhein
Berufliches Gymnasium, Bildungsgang Wirtschaft

Abiturprüfung 2007 **Mathematik**
Leistungsfachanforderungen

Differential- und Integralrechnung Nicht-rationaler Funktionen

1. Aufgabe

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f_k(x) = \frac{2k \cdot x}{e^{\frac{1}{2}k \cdot x}} \qquad mit \quad k > 0$$

Untersuchen Sie die Funktion bezüglich folgender Aufgabenstellungen:

1.) Zeigen Sie, dass die erste Ableitung der Funktion folgendes Aussehen haben kann: **8**

$$f_k'(x) = f_k(x) \cdot \left[\frac{2 - kx}{2x} \right]$$

2.) Nun bilden wir die zweite Ableitung in folgender Form: **6**

$$f_k''(x) = f_k'(x) \cdot \left[\frac{2 - kx}{2x} \right]$$

Doch leider ist diese Vorgehensweise fehlerhaft.

=> Erläutern Sie, worin der Fehler liegt.
=> Wie müsste der o.a. Term zur Ermittlung der zweiten Ableitung korrekt dargestellt werden?

Sie müssen hier aber nicht die zweite Ableitung berechnen!

3.) Ermitteln Sie die Nullstelle(n) der Funktion. **4**

4.) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion in Abhängigkeit von **k**. **8**

Berufsbildende Schule Wirtschaft I, Ludwigshafen am Rhein
Berufliches Gymnasium, Bildungsgang Wirtschaft

Abiturprüfung 2007 **Mathematik**
Leistungsfachanforderungen

Differential- und Integralrechnung Nicht-rationaler Funktionen

5.) Prüfen und beweisen/begründen Sie das Grenzwertverhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs. | **6** |

6.) Eine mögliche zweite Ableitung der Funktion lautet: | **14** |

$$f_k''(x) = \frac{0{,}5k^2\left(kx-4\right)}{e^{\frac{1}{2}k\cdot x}}$$

a) Ermitteln Sie nun die Ortskurve der Wendepunkte.

b) Die Funktionsgleichung der Wendetangente.

Anmerkung:
Bei der Berechnung des Wendepunktes genügt die notwendige Bedingung!

7.) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptung: | **8** |
Für $k_1 \neq k_2$ besitzt die Funktion zwei gemeinsame Punkte.

Lassen Sie uns nun die Funktion ein klein wenig „entschärfen".

Für die nun folgenden Aufgaben verwenden Sie bitte folgenden Funktionsterm:

$$g_k(x) = \frac{2k\cdot x}{e^x} \qquad mit \quad k>0$$

8.) Zeigen Sie mittels Integralrechnung, dass | **8** |

$$G_k(x) = -\frac{2k\left(x+1\right)}{e^x}$$

eine Stammfunktion zu $g_k(x)$ darstellt.

Differential- und Integralrechnung Nicht-rationaler Funktionen

9.) Welchen Wert nimmt dann das Uneigentliche Integral an? **6**

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a g_k(x)\,dx$$

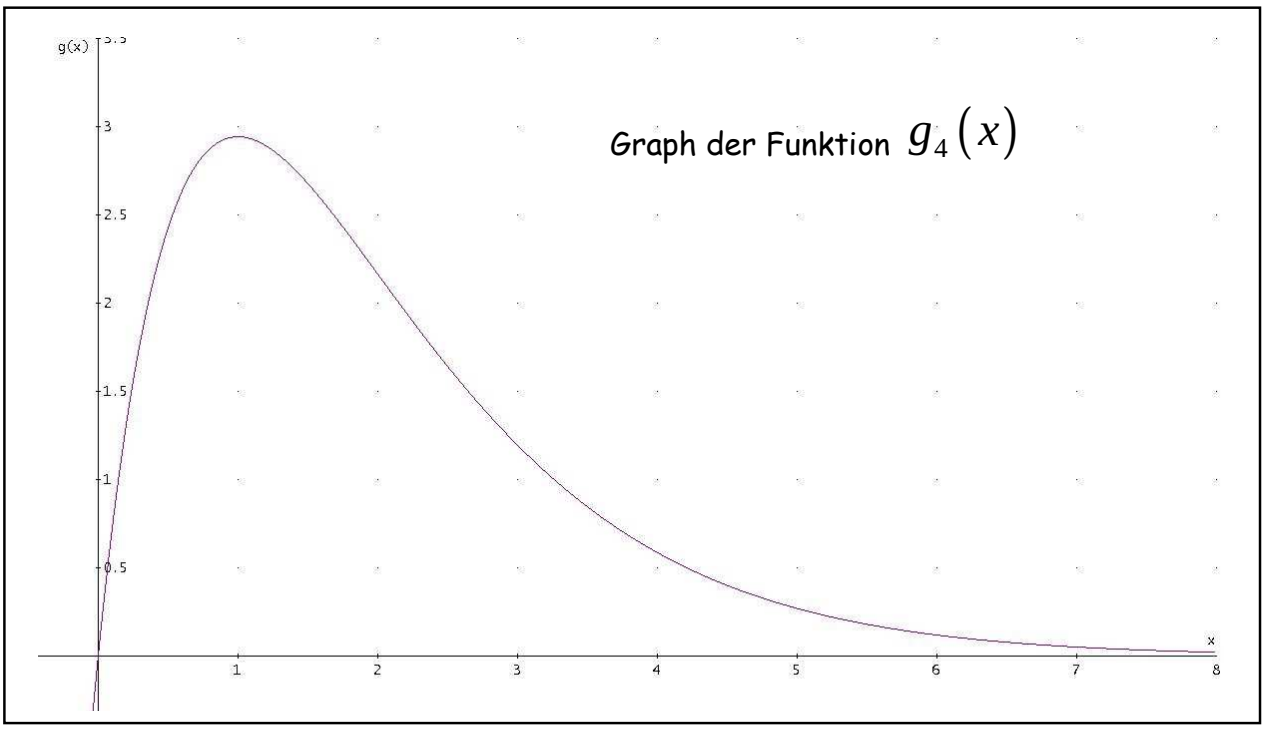
10.) Zwischen dem Graphen der Funktion $g_k(x)$ und der x-Achse soll im I. Quadranten ein rechtwinkliges Dreieck so einbeschrieben werden, dass ein Eckpunkt des Dreiecks im Koordinatenursprung liegt und eine Kathete auf der x-Achse liegt. **12**

a) Welche Seitenlängen muss dieses Dreieck haben, damit seine Fläche maximal wird?

b) Wie groß ist die Fläche?

c) Für welchen Parameterwert wird das Dreieck gleichschenklig?

Anmerkung: Es genügt dabei das notwendige Kriterium zu prüfen.



Graph der Funktion $g_4(x)$

Berufsbildende Schule Wirtschaft I, Ludwigshafen am Rhein
Berufliches Gymnasium, Bildungsgang Wirtschaft

Abiturprüfung 2007 **Mathematik**
Leistungsfachanforderungen

Differential- und Integralrechnung Nicht-rationaler Funktionen

Lösungen zu den Aufgaben bzw. Erwartungshorizont

Gegeben sei folgende Funktion: $f_k(x) = \dfrac{2k \cdot x}{e^{\frac{1}{2}k \cdot x}} \quad mit \quad k > 0$

Untersuchen Sie die Funktion bezüglich folgender Aufgabenstellungen:

1.) Zeigen Sie, dass die erste Ableitung der Funktion folgendes Aussehen haben kann:

$$f_k'(x) = f_k(x) \cdot \left[\frac{2 - kx}{2x} \right]$$

Lösung:

$$f_k'(x) \overset{Ableitung}{=} \frac{2k \cdot e^{\frac{1}{2}k \cdot x} - 2k \cdot x \cdot e^{\frac{1}{2}k \cdot x} \cdot 0{,}5k}{\left(e^{\frac{1}{2}k \cdot x}\right)^2} \overset{Ausklammern}{=} e^{\frac{1}{2}k \cdot x} \cdot \left[\frac{2k - k^2 x}{\left(e^{\frac{1}{2}k \cdot x}\right)^2} \right]$$

$$f_k'(x) \overset{Kürzen}{=} \frac{2k - k^2 x}{e^{\frac{1}{2}k \cdot x}} \overset{k\ ausklammern}{=} \frac{k}{e^{\frac{1}{2}k \cdot x}} \cdot (2 - kx) \overset{Erweitern: \frac{2x}{2x}}{=} \frac{2x \cdot k}{e^{\frac{1}{2}k \cdot x}} \cdot \frac{2 - kx}{2x}$$

$$f_k'(x) = f_k(x) \cdot \frac{2 - kx}{2x}$$

Differential- und Integralrechnung Nicht-rationaler Funktionen

2.) Nun bilden wir die zweite Ableitung in folgender Form:

$$f_k''(x) = f_k'(x) \cdot \left[\frac{2-kx}{2x} \right]$$

Doch leider ist diese Vorgehensweise fehlerhaft.

=> Erläutern Sie, worin der Fehler liegt.
=> Wie müsste der o.a. Term zur Ermittlung der zweiten Ableitung korrekt dargestellt werden?

Sie müssen hier aber nicht die zweite Ableitung berechnen!

Lösung:

Der Fehler liegt darin, dass die Produktregel nicht korrekt angewendet wurde.
Die korrekte Darstellung nach der Produktregel müsste lauten:

$$f_k''(x) = f_k'(x) \cdot \left[\frac{2-kx}{2x} \right] + f_k(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2-kx}{2x} \right]$$

3.) Ermitteln Sie die Nullstelle(n) der Funktion.

Lösung:

$$f_k(x) = \frac{2k \cdot x}{e^{\frac{1}{2}k \cdot x}} = 0 \xrightarrow{\cdot \text{Nenner}} 2k \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Es existiert eine Nullstelle an der Stelle x = 0.

Differential- und Integralrechnung Nicht-rationaler Funktionen

4.) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion in Abhängigkeit von **k**.

Lösung:

$$f_k'(x) = \frac{2k - k^2 x}{e^{\frac{1}{2}k \cdot x}} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 2k - k^2 x = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{k}$$

$$f_k''(x) = \frac{0{,}5k^2 (kx - 4)}{e^{\frac{1}{2}k \cdot x}}$$

$$\Rightarrow f_k''\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{0{,}5k^2 \left[k \cdot \left(\frac{2}{k}\right) - 4\right]}{e^{\frac{1}{2}k \cdot \frac{2}{k}}} = \frac{-k^2}{e} < 0 \Rightarrow Max\left(\frac{2}{k} \,\middle|\, \frac{4}{e}\right)$$

$$Funktionswert: \quad f_k\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{2k \cdot \frac{2}{k}}{e^{\frac{1}{2}k \cdot \frac{2}{k}}} = \frac{4}{e}$$

5.) Prüfen und beweisen/begründen Sie das Grenzwertverhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs.

Lösung:

$$\lim_{x \to \infty} f_k(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2k \cdot x}{e^{\frac{1}{2}k \cdot x}} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2k}{\frac{1}{2}k \cdot e^{\frac{1}{2}k \cdot x}} \to 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2k \cdot x}{e^{\frac{1}{2}k \cdot x}} = \lim_{x \to \infty} 2k \cdot (-x) \cdot e^{\frac{1}{2}k \cdot x} \to -\infty$$

Differential- und Integralrechnung Nicht-rationaler Funktionen

6.) Eine mögliche zweite Ableitung der Funktion lautet:

$$f_k''(x) = \frac{0{,}5k^2(kx-4)}{e^{\frac{1}{2}k\cdot x}}$$

a) Ermitteln Sie nun die Ortskurve der Wendepunkte.

b) Die Funktionsgleichung der Wendetangente.

Anmerkung: Bei der Berechnung des Wendepunktes genügt die notwendige Bedingung!

Lösung:

Wendepunkt ermitteln:

$$f_k''(x) = \frac{0{,}5k^2(kx-4)}{e^{\frac{1}{2}k\cdot x}} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{4}{k}$$

$$f_k\left(\frac{4}{k}\right) = \frac{2k\cdot\frac{4}{k}}{e^{\frac{1}{2}k\cdot\frac{4}{k}}} = \frac{8}{e^2} \Rightarrow W\left(\frac{4}{k}\,\middle|\,\frac{8}{e^2}\right)$$

$Ortskurve: \quad y = \frac{8}{e^2}$ (Die Ortskurve ist parameterunabhängig!)

Wendetangente: $t_k(x) = \frac{-2k}{e^2}x + \frac{16}{e^2}$

Steigung im Wendepunkt: $f_k'\left(\frac{4}{k}\right) = \frac{2k - k^2\cdot\frac{4}{k}}{e^{\frac{1}{2}k\cdot\frac{4}{k}}} = \frac{-2k}{e^2} = m_{Tangente}$

y-Achsenabschnitt: $\frac{8}{e^2} = \frac{-2k}{e^2}\cdot\frac{4}{k} + b \Rightarrow b = \frac{16}{e^2}$

Differential- und Integralrechnung Nicht-rationaler Funktionen

7.) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptung:
Für $k_1 \neq k_2$ besitzt die Funktion zwei gemeinsame Punkte.

Lösung:

$$Beweis: \quad Vor.: \; k_1 \neq k_2$$

$$f_{k_1}(x) \;=\; f_{k_2}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2k_1 \cdot x}{e^{\frac{1}{2}k_1 \cdot x}} \;=\; \frac{2k_2 \cdot x}{e^{\frac{1}{2}k_2 \cdot x}} \quad \xrightarrow{\cdot HN} \quad e^{\frac{1}{2}k_2 \cdot x} \cdot 2k_1 \cdot x \;=\; e^{\frac{1}{2}k_1 \cdot x} \cdot 2k_2 \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad e^{\frac{1}{2}k_2 \cdot x} \cdot 2k_1 \cdot x \;-\; e^{\frac{1}{2}k_1 \cdot x} \cdot 2k_2 \cdot x \;=\; 0$$

$$\xrightarrow{x \text{ ausklammern}} \quad x\left[e^{\frac{1}{2}k_2 \cdot x} \cdot 2k_1 - e^{\frac{1}{2}k_1 \cdot x} \cdot 2k_2\right] \;=\; 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \vee \quad e^{\frac{1}{2}k_2 \cdot x} \cdot 2k_1 - e^{\frac{1}{2}k_1 \cdot x} \cdot 2k_2 \;=\; 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{\frac{1}{2}k_2 \cdot x}}{e^{\frac{1}{2}k_1 \cdot x}} \;=\; \frac{k_2}{k_1} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{e^{\frac{1}{2}k_2}}{e^{\frac{1}{2}k_1}}\right)^x \;=\; \frac{k_2}{k_1} \quad \xrightarrow{\ln}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 \;=\; \frac{\ln\left(\frac{k_2}{k_1}\right)}{\ln\left(\frac{e^{\frac{1}{2}k_2}}{e^{\frac{1}{2}k_1}}\right)} \;=\; \frac{\ln k_2 - \ln k_1}{\frac{1}{2}k_2 - \frac{1}{2}k_1} \;=\; 2 \cdot \frac{\ln k_2 - \ln k_1}{k_2 - k_1}$$

Differential- und Integralrechnung Nicht-rationaler Funktionen

Lassen Sie uns nun die Funktion ein klein wenig „entschärfen".
Für die nun folgenden Aufgaben verwenden Sie bitte folgenden Funktionsterm:

$$g_k(x) = \frac{2k \cdot x}{e^x} \qquad mit \quad k > 0$$

8.) Zeigen Sie mittels Integralrechnung, dass

$G_k(x) = -\frac{2k(x+1)}{e^x}$ eine Stammfunktion zu $g_k(x)$ darstellt.

Lösung:

$$Partielle\ Integration: \quad g_k(x) = \frac{2k \cdot x}{e^x} = 2kx \cdot e^{-x}$$

$$\left.\begin{array}{ll} u = 2kx & v = -e^{-x} \\ u' = 2k & v' = e^{-x} \end{array}\right\} \quad \int g_k(x)\,dx = -2kx\,e^{-x} - \int 2k\left(-e^{-x}\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad \int g_k(x)\,dx = -2kx\,e^{-x} + 2k\int e^{-x}dx$$

$$\Rightarrow \quad \int g_k(x)\,dx = -2kx\,e^{-x} - 2ke^{-x} = -\frac{2k(x+1)}{e^x}$$

9.) Welchen Wert nimmt dann das Uneigentliche Integral an?

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a g_k(x)\,dx$$

Lösung:

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a g_k(x)\,dx = \lim_{a \to \infty} \left[-\frac{2k(x+1)}{e^x} \right]_0^a = \lim_{a \to \infty} \left[-\frac{2k(a+1)}{e^a} \right]_0^a + \frac{2k}{e^0} = 2k$$

Der Grenzwert strebt nach L'Hospital
für a $\to \infty$ gegen den Wert 0.

Berufsbildende Schule Wirtschaft I, Ludwigshafen am Rhein
Berufliches Gymnasium, Bildungsgang Wirtschaft

Abiturprüfung 2007 **Mathematik**
Leistungsfachanforderungen

Differential- und Integralrechnung Nicht-rationaler Funktionen

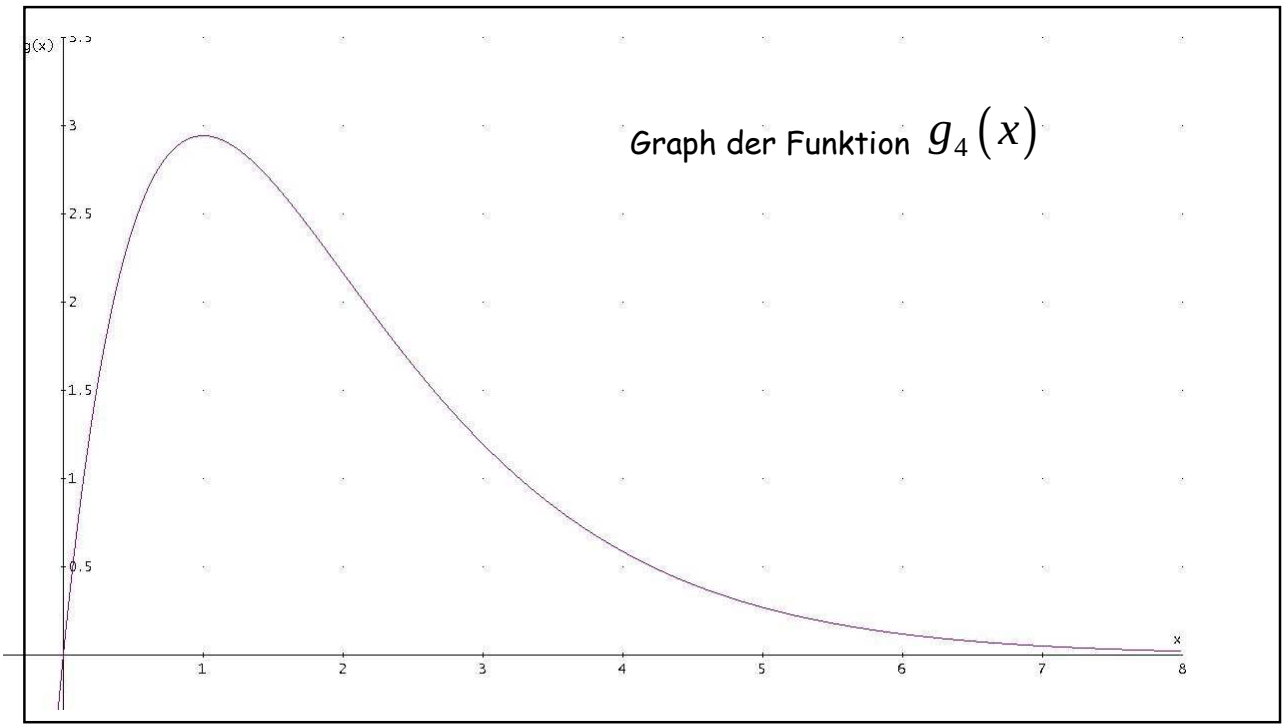
10.) Zwischen dem Graphen der Funktion $g_k(x)$ und der x-Achse soll im I. Quadranten ein rechtwinkliges Dreieck so einbeschrieben werden, dass ein Eckpunkt des Dreiecks im Koordinatenursprung liegt und eine Kathete auf der x-Achse liegt.

a) Welche Seitenlängen muss dieses Dreieck haben, damit seine Fläche maximal wird?

b) Wie groß ist die Fläche?

c) Für welchen Parameterwert wird das Dreieck gleichschenklig?

Anmerkung: Es genügt dabei das notwendige Kriterium zu prüfen.



Graph der Funktion $g_4(x)$

Differential- und Integralrechnung Nicht-rationaler Funktionen

Lösung:

$$A_k(g,h) = \frac{1}{2}gh \Rightarrow A_k(x) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot g_k(x) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{2kx}{e^x} = \frac{kx^2}{e^x}$$

$$A_k'(x) = \frac{2kx\cdot e^x - kx^2\cdot e^x}{e^{2x}} = kx\cdot\frac{(2-x)}{e^x} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2$$

$$A_k''(x) = \frac{(2k-2kx)\cdot e^x - (2kx-kx^2)\cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2k-4kx+kx^2}{e^x}$$

$$A_k''(0) = \frac{2k}{e^0} = 2k > 0 \Rightarrow Min(0\mid 0)$$

$$A_k''(2) = \frac{2k-8k+4k}{e^2} = -\frac{2k}{e^2} < 0 \Rightarrow Max\left(2 \,\middle|\, \frac{4k}{e^2}\right)$$

$$\Rightarrow Fläche: A_k(2) = \frac{4k}{e^2}$$

Länge der Seiten:

Kathete 1 auf der x – Achse: $a = 2$ *Kathete 2 (Höhe):* $b = g_k(2) = \frac{4k}{e^2}$

Hypotenuse (Pythagoras): $c = \sqrt{4+\frac{16k^2}{e^2}}$

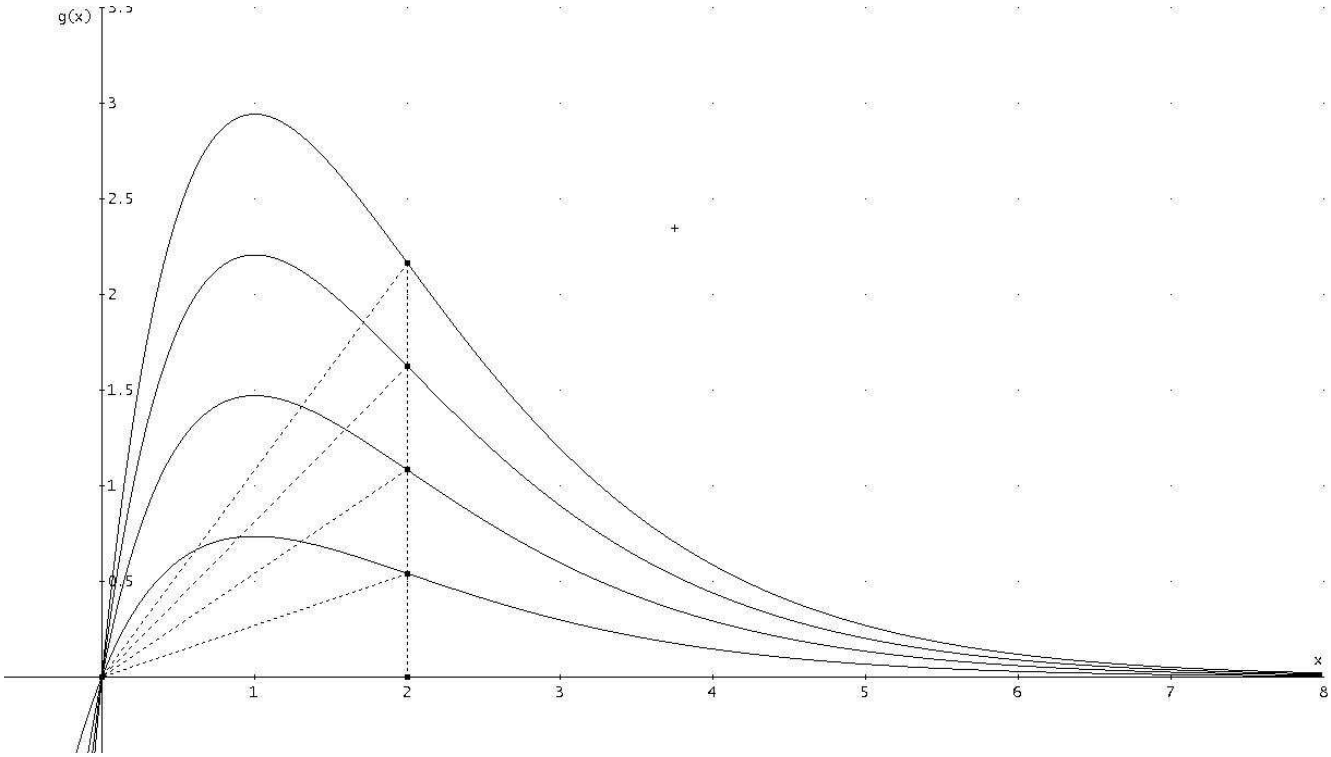
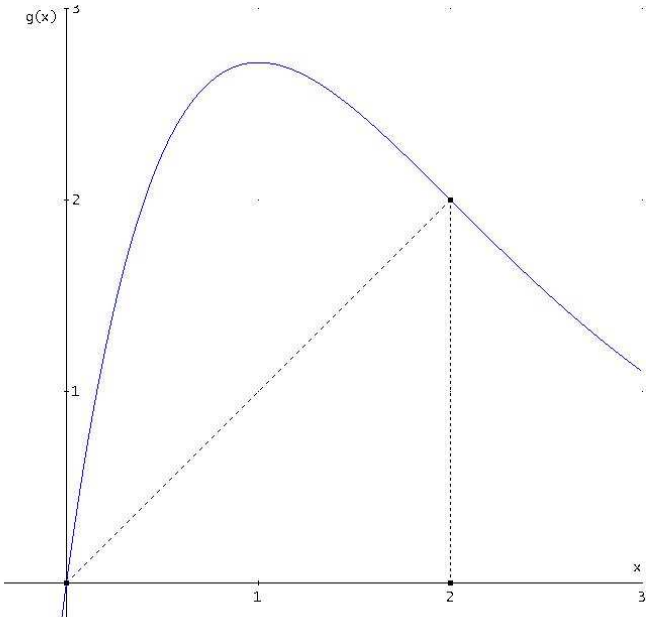
Wann gleichschenklig: $a = b \Rightarrow 2 = \frac{4k}{e^2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}e^2$

Berufsbildende Schule Wirtschaft I, Ludwigshafen am Rhein
Berufliches Gymnasium, Bildungsgang Wirtschaft

Abiturprüfung 2007

Mathematik
Leistungsfachanforderungen

Differential- und Integralrechnung Nicht-rationaler Funktionen



Sonderfall: Katheten gleich lang