Abiturprüfung 2006 | **Mathematik Leistungsfachanforderungen**

MUSTERLÖSUNG

Aufgabe 4: Stochastik

Zur Vorbereitung auf die Abi-Feier am Wirtschaftsgymnasium der BBSW1 produzieren die Abi-Klassen Buttons mit dem Abi-Motto, die jeder Abi-Ball Teilnehmer tragen soll. Dazu werden Roh-Buttons mit einer bedruckten Folie beklebt. Das ist natürlich etwas kniffelig und es passieren Fehler. Z.B. eine schräg aufgeklebte Folie, schlechter Druck der Folie, verbeulter Button-Rohling u.s.w.

1. Inzwischen wissen die Schüler, dass jeder zehnte Button fehlerhaft ist.
   Der Produktion werden 100 Buttons rein zufällig entnommen.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich darunter

   (i) genau 20,

   (ii) mehr als 18,

   (iii) höchstens 25 fehlerhafte Buttons?

   (iv) Wie viele fehlerhafte Buttons erwartet man unter den 100?

   (Modell: Ziehen mit Zurücklegen)

Lösung:

(i) $$B_{100\,;\,0,1}(X=20) = \binom{100}{20} 0,1^{20} \cdot 0,9^{80} = 0,0012$$

(ii) $$B_{100\,;\,0,1}(X>18) = 1 - B_{100\,;\,0,1}(X \le 18) = 1 - 0,9954 = 0,0046$$

(iii) $$B_{100\,;\,0,1}(X \le 25) \approx 1$$

(iv) $$\mu = 100 \cdot \frac{1}{10} \Rightarrow \mu = 10$$

2. Wie viele Buttons müssen der Produktion mindestens entnommen werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einen fehlerhaften zu finden?

Lösung:

$$B_{n\,;\,0{,}1}(X \geq 1) \quad = \quad 1 - B_{n\,;\,0{,}1}(X = 0) \quad > \quad 0{,}95$$

$$B_{n\,;\,0{,}1}(X = 0) \quad < \quad 0{,}05$$

$$\binom{n}{0} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^n \quad < \quad 0{,}05$$

$$0{,}9^n \quad < \quad 0{,}05$$

$$n \quad > \quad 28{,}43 \quad \geq \quad 29$$

Antwort: **Es müssen mindestens 29 Buttons entnommen werden!**

3. Wie viele Buttons dürfen der Produktion höchstens entnommen werden, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 % nur einwandfreie findet?

Lösung:

$$B_{n\,;\,0{,}1}(X = 0) \quad > \quad 0{,}5$$

$$\binom{n}{0} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^n \quad > \quad 0{,}5$$

$$0{,}9^n \quad > \quad 0{,}5$$

$$n \quad < \quad 6{,}579 \quad \leq \quad 6$$

Antwort: **Es dürfen höchstens 6 Buttons entnommen werden!**

4. Die Produktion der Buttons wird von den vier Klassen zu gleichen Anteilen parallel übernommen. Dabei kann man feststellen, dass die Klasse GY 03a mit einer Fehlerquote von 5 % arbeitet, die GY 03 b hat eine von 8 %, die GY 03 c arbeitet natürlich fehlerfrei ;-) und die Gy 03 d produziert mit einer 7 %-Fehlerquote.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Button, welcher aus der Gesamtmenge entnommen wird fehlerfrei?

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein aus der Gesamtmenge entnommener fehlerhafter Button von der GY 03 d hergestellt wurde?

Lösung:

a) $$P(\text{"}fehlerfrei\text{"}) = \frac{1}{4}\cdot(0{,}95+0{,}92+1+0{,}93) = 0{,}95$$

b) $$P(\text{"}GY03d\text{"}) = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{100}}{\frac{5}{100}} = 0{,}35$$

5. Button-Produktion kommerziell

   Der Schüler **Simeon Denis Poisson** überlegt sich nach dem grandiosen Erfolg bei der Button-Aktion auf der WG-Abiturfeier das ganze Geschäft zukünftig kommerziell anzulegen.

   Dabei reduziert er die Fehlerquote der Buttons auf 2 %.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei 50 Buttons genau 4 fehlerhafte zu erhalten?

   Denis Poisson bietet seinen Kunden folgende Vereinbarung: Sollte bei einer Lieferung einer Packung Buttons (20 Stück) auch nur ein fehlerhaftes Stück darunter sein, so ist die Lieferung gratis.

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei einer Lieferung von 20 Buttons, dass der Kunde nicht bezahlen muss?

   c) Wie groß darf die Fehlerquote p bei Denis höchstens sein, damit er für seine Packungen zu mind. 95 % die Zahlung bei seinen Kunden verlangen kann?

d) Wie viele Buttons sollte Denis in seine Packungen legen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. 75 % Geld von seinen Kunden erhält (p = 2 %)?

Anmerkung: Wir wissen dass gilt: $\mu = n \cdot p$

Lösung:

a)

$$\mu = \frac{2}{100} \cdot 50 = 1 \quad ; \quad P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$\Rightarrow \quad P(X = 4) = \frac{1^4}{4!} e^{-1} = 0{,}0153 \approx 1{,}53\,\%$$

b)

$$\mu = \frac{2}{100} \cdot 20 = 0{,}4 \quad ; \quad P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$\Rightarrow \quad P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$\Rightarrow \quad P(X \geq 1) = 1 - \frac{0{,}4^0}{0!} e^{-0{,}4} = 0{,}3297 \approx 32{,}97\,\%$$

c)

$$\mu = 20 \cdot p \quad ; \quad P(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$\Rightarrow \quad P(X = 0) \geq 0{,}95$$

$$\Rightarrow \quad P(X = 0) = \frac{(20 \cdot p)^0}{0!} e^{-(20 \cdot p)} \geq 0{,}95$$

$$\Rightarrow \quad P(X = 0) = e^{-(20 \cdot p)} \geq 0{,}95$$

$$\Rightarrow \quad P(X = 0) = -(20 \cdot p) \geq \ln(0{,}95)$$

$$\Rightarrow \quad P(X = 0) = p \leq -\frac{\ln(0{,}95)}{20}$$

$$\Rightarrow \quad P(X = 0) = p \leq 0{,}00256 \approx 0{,}256\,\%$$

d)

$$\mu = \frac{2}{100} \cdot n \quad ; \quad P(X = k) \; = \; \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$\Rightarrow \quad P(X = 0) \; = \; \frac{\left(\frac{2}{100} \cdot n\right)^0}{0!} e^{-\left(\frac{2}{100} \cdot n\right)} \quad \geq \quad 0{,}75$$

$$\Rightarrow \quad P(X = 0) \; = \; -\left(\frac{2}{100} \cdot n\right) \quad \geq \quad \ln(0{,}75)$$

$$\Rightarrow \quad P(X = 0) \; = \; n \quad \leq \quad -\ln(0{,}75) \cdot 50$$

$$\Rightarrow \quad P(X = 0) \; = \; n \quad \leq \quad 14{,}38 \quad \approx \quad 14$$

6. Die Bilder auf den Buttons haben entweder einen roten oder einen weißen Untergrund.
   Emma legt 20 Buttons gut gemischt auf einen Tisch, wobei sie weiß, dass es mehr mit rotem Untergrund sind als mit weißem.
   Dirk entnimmt auf gut Glück zwei Buttons (Ziehen **ohne** Zurücklegen).
   Die Wahrscheinlichkeit, dass er einen mit roten und einen mit weißen Untergrund erhält, beträgt $\frac{48}{95}$.
   Wie viele Figuren mit rotem Untergrund liegen auf dem Tisch?

Lösung:

$$P(X = 1) \; = \; \frac{\binom{w}{1} \cdot \binom{20-w}{1}}{\binom{20}{2}} \; \stackrel{!}{=} \; \frac{48}{95}$$

$$\frac{w \cdot (20 - w)}{190} \; = \; \frac{96}{190}$$

$$w \cdot (20 - w) \; = \; 96 \quad \Rightarrow \quad -w^2 + 20w - 96 \; = \; 0$$

$$\Rightarrow \quad w_1 = 12 \quad \wedge \quad w_2 = 8$$

Es gibt 12 Buttons mit rotem Untergrund und 8 weiße.

7. Die Firma ReadyButt produziert Rohbuttons. Die Durchmesser der Buttons haben einen mittleren Wert von 56 mm.
Die Durchmesser seien normalverteilt mit einer Standardabweichung von 1 mm.

Wie viel Prozent Ausschuss sind zu erwarten, wenn die Durchmesser der Rohbuttons

a) mindestens 55 mm betragen sollen,

b) höchstens 57 mm betragen sollen,

c) um höchstens 0,5 mm vom Sollwert 56 mm abweichen sollen?

d) Wie ist das Toleranzintervall [56-c;56+c] zu wählen, wenn man nicht mehr als 5% Ausschuss zulassen will?

Lösung:

a)

$$P(X<55) = \Phi(-1) = 1-\Phi(1) = 1-0{,}84134 = 0{,}15866$$

$$Umrechnung: \quad x=\frac{55-56}{1} \quad \Rightarrow \quad x=-1$$

---

b)

$$P(X>57) = 1-P(X\leq 57) = 1-\Phi(1) = 1-0{,}84134$$

$$P(X>57) = 0{,}15866$$

$$Umrechnung: \quad x=\frac{57-56}{1} \quad \Rightarrow \quad x=1$$

---

c)

$$P(55{,}5\leq X\leq 56{,}5) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-1$$

$$P(55{,}5\leq X\leq 56{,}5) = 2\cdot 0{,}69146-1 = 0{,}38292$$

$$P("Ausschuss") = 1-0{,}38292 = 0{,}61708$$

$$Umrechnung: \quad x=\frac{56{,}5-56}{1} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

---

d)

$$P(56-c\leq X\leq 56+c) \geq 0{,}95$$

$$\Phi(x_1)-\Phi(-x_1) = 2\cdot\Phi(x_1)-1 \geq 0{,}95 \Rightarrow \Phi(x_1) \geq 0{,}975$$

$$\Rightarrow \quad x=1{,}96$$

$$Umrechnung: \quad 1{,}96=\frac{k-56}{1} \quad \Rightarrow \quad k_1=57{,}96 \quad \wedge \quad k_2=54{,}04$$

$$\Rightarrow \quad |c|=1{,}96$$