MUSTERLÖSUNG

3. Aufgabe TEIL A

1. Für $t \in \mathbb{R}$ seien folgende Vektoren gegeben:

$$\vec{a}_t = \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{c}_t = \begin{pmatrix} -t \\ t+1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{d}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ t-1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) (i) Für welche Werte von t sind die Vektoren $\vec{a}_t; \vec{b}; \vec{c}_t$ linear abhängig?

(ii) Stellen Sie für diese Werte von t jeweils den Vektor $\vec{c}_t$ als Linearkombination von $\vec{a}_t$ und $\vec{b}$ dar.

Lösung:

$$\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} t & 1 & -t \\ -1 & -1 & t+1 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = -4t - 4(t+1) + 2t + 4t - 2t(t+1) + 4$$

(i)

$$\mathrm{Det}(A) = -2t - 2t(t+1) = -2t(t+2) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = 0 \quad \wedge \quad t_2 = -2$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ lin. abh. } t \in \{-2\,;0\}$$

$$t = 0: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (-1)\vec{a}_0 + 0 \cdot \vec{b}_0 = \vec{c}_0$$

(ii)

$$t = 2: \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} -2a + b = 2 \\ -a - b = -1 \\ -4a + 2b = 4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} -2(1-b) + b = 2 \\ a = 1 - b \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{4}{3} \quad \text{und} \quad a = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{1}{3}\right)\vec{a}_0 + \frac{4}{3} \cdot \vec{b}_0 = \vec{c}_0$$

b) Die Vektoren $\vec{a}_t$; $\vec{b}$; $\vec{c}_t$ seien die Spaltenvektoren der Matrix A_t mit $t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$A_3 \cdot \vec{x} = \vec{d}_3 .$$

Lösung:

Schrittweise Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{r} 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \ (1) \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \ (2) \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x_1 + 1/3\, x_2 - x_3 = 0 \ (1) \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \ (2) \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x_1 + 1/3\, x_2 - x_3 = 0 \ (1) \\ -2/3\, x_2 + 3x_3 = 2 \ (2) \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x_1 + 1/3\, x_2 - x_3 = 0 \ (1) \\ -2/3\, x_2 + 3x_3 = 2 \ (2) \\ 10/3\, x_2 = 0 \ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x_1 + 1/3\, x_2 - x_3 = 0 \ (1) \\ x_2 - 9/2\, x_3 = -3 \ (2) \\ 10/3\, x_2 = 0 \ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x_1 + 1/3\, x_2 - x_3 = 0 \ (1) \\ x_2 - 9/2\, x_3 = -3 \ (2) \\ 10/3\, x_2 = 0 \ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x_1 + 1/2\, x_3 = 1 \ (1) \\ x_2 - 9/2\, x_3 = -3 \ (2) \\ 10/3\, x_2 = 0 \ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x_1 + 1/2\, x_3 = 1 \ (1) \\ x_2 - 9/2\, x_3 = -3 \ (2) \\ 15\, x_3 = 10 \ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x_1 + 1/2\, x_3 = 1 \ (1) \\ x_2 - 9/2\, x_3 = -3 \ (2) \\ x_3 = 2/3 \ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x_1 = 2/3 \ (1) \\ x_2 - 9/2\, x_3 = -3 \ (2) \\ x_3 = 2/3 \ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x_1 = 2/3 \ (1) \\ x_2 = 0 \ (2) \\ x_3 = 2/3 \ (3) \end{array}$$

Genau eine Lösung

$x_1 = 2/3$

$x_2 = 0$

$x_3 = 2/3$

c) Bestimmen Sie die inverse Matrix zu A_{-1}.

Lösung:

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A_{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ hat das lineare inhomogene Gleichungssystem

$$A_t \cdot \vec{x} = \vec{d}_t$$

(i) keine Lösung?

(ii) genau eine Lösung?

(iii) unendlich viele Lösungen?

Lösung:

Aufgrund der Ergebnisse von Teilaufgabe a) ist bekannt, dass das Lösungsverhalten nur für die t-Werte –2 und 0 untersucht werden muss.

Fall 1: t = 0

$$t = 0: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}+\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III}-4\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ keine Lösung

Fall 2: t = - 2

$$t = -2: \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-2\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ mehrdeutige Lösung

Fall 3: $t \in \Re \setminus \{-2\,; 0\}$

=> **eindeutige Lösung**

MUSTERLÖSUNG

3. Aufgabe Teil B

Jürgen M. und seine Teilchenbäckerei.

Jürgen M. hat zu Beginn dieses Jahres eine Bäckerei eröffnet und backt nun seine Brötchen selbst. Aus drei Rohstoffen stellt er drei Zwischenprodukte her, diese in geeigneter Form (nach einem Geheimrezept) kombiniert ergeben wiederum seine drei Endprodukte Roggenbrötchen (E_1), Kaisersemmeln (E_2) und Knubbel (E_3).

Somit hat ein überschaubares Sortiment, welches seine Kunden überaus schätzen.

Die folgenden Tabellen geben den Materialfluss in Mengeneinheiten an, wobei $t \in \left]\, 0\,;5\,\right]$ ein produktionsabhängiger Parameter ist:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	**t**	**2**	**4**
R_2	**1**	**3**	**2**
R_3	**2**	**3t**	**4**

	E_1	E_2	E_3
Z_1	**t**	**5**	**3t**
Z_2	**2t**	**2**	**3**
Z_3	**4**	**t**	**2**

Die Kosten gestalten sich folgendermaßen:

Rohstoffkosten: $\vec{k}_R = \begin{pmatrix} t & t & 2 \end{pmatrix}$

Fertigungskosten der Zwischenprodukte: $\vec{k}_Z = \begin{pmatrix} 2t & t^2 & 1 \end{pmatrix}$

Fertigungskosten der Endprodukte: $\vec{k}_E = \begin{pmatrix} 3t & 1 & 2t^3 \end{pmatrix}$

Die Fixkosten der Produktion betragen ??? €.

Die Tagesproduktion beläuft sich auf 250 Roggenbrötchen, 1.000 Kaisersemmeln und 400 Knubbel. Da Jürgen M. ein cleverer Manager ist, wird das gesamte Backvolumen auch verkauft. Der Vektor der Verkaufpreise der drei Endprodukte sei gegeben durch:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 108t & 93t^2 & 10t^3 \end{pmatrix}$$

Zurzeit befinden sich 41.100 g Roggenmehl (R_1), 20.350 g Weizenmehl (R_2) und 42.000 ME von R_3 auf Lager.

Im Rahmen der Geschäftstätigkeit müssen nun einige Entscheidungen getroffen werden, woraus diverse Fragen resultieren:

1.) Zeigen Sie, dass der Rohstoffbedarf für je eine ME Endprodukt folgender Matrix entspricht:

$$\begin{bmatrix} t^2 + 4\cdot t + 16 & 9\cdot t + 4 & 3\cdot t^2 + 14 \\ 7\cdot t + 8 & 2\cdot t + 11 & 3\cdot t + 13 \\ 6\cdot t^2 + 2\cdot t + 16 & 10\cdot t + 10 & 15\cdot t + 8 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$$M_{RZ} \cdot M_{ZE} = M_{RE}$$

$$\begin{pmatrix} t & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3t & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t & 5 & 3t \\ 2t & 2 & 3 \\ 4 & t & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2+4t+16 & 9t+4 & 3t^2+14 \\ 7t+8 & 2t+11 & 3t+13 \\ 6t^2+2t+16 & 10t+10 & 15t+8 \end{pmatrix}$$

2.) Welche Rohstoffmenge ist für eine komplette Tagesproduktion notwendig?

a) allgemeine Lösung in Abhängigkeit des Parameters t

b) spezielle Lösung für Parameter t = 1

Lösung:

a)

$$\begin{pmatrix} t^2+4t+16 & 9t+4 & 3t^2+14 \\ 7t+8 & 2t+11 & 3t+13 \\ 6t^2+2t+16 & 10t+10 & 15t+8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 250 \\ 1.000 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\left(29t^2+200t+272\right) \\ 50\left(99t+364\right) \\ 100\left(15t^2+165t+172\right) \end{pmatrix}^T$$

b) $t=1: \quad \begin{pmatrix} 25.050 & 23.150 & 35.200 \end{pmatrix}$

3.) Berechnen Sie die Gesamtherstellungskosten für je ein Endprodukt.

Lösung:

A3: Gesamtkosten für je eine ME an Endprodukten

Rohstoffkosten:

#11: $$[t,\ t,\ 2]\cdot\begin{bmatrix} t^2 + 4\cdot t + 16 & 9\cdot t + 4 & 3\cdot t^2 + 14 \\ 7\cdot t + 8 & 2\cdot t + 11 & 3\cdot t + 13 \\ 6\cdot t^2 + 2\cdot t + 16 & 10\cdot t + 10 & 15\cdot t + 8 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

#12: $$\left[4\cdot t^3 + 37\cdot t^2 + 120\cdot t + 68\right]$$

Kosten für die Zwischenprodukte:

#13: $$\left[2\cdot t,\ t^2,\ 1\right]\cdot\begin{bmatrix} t & 5 & 3\cdot t \\ 2\cdot t & 2 & 3 \\ 4 & t & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

#14: $$\left[2\cdot t^3 + 13\cdot t^2 + 11\cdot t + 6\right]$$

Kosten für die Endprodukte:

#15: $$\left[3\cdot t,\ 1,\ 2\cdot t^3\right]\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

#16: $$\left[2\cdot t^3 + 3\cdot t + 1\right]$$

Gesamtkosten:

#17: $$\left[4\cdot t^3 + 37\cdot t^2 + 120\cdot t + 68\right] + \left[2\cdot t^3 + 13\cdot t^2 + 11\cdot t + 6\right] + \left[2\cdot t^3 + 3\cdot t + 1\right]$$

#18: $$\left[8\cdot t^3 + 50\cdot t^2 + 134\cdot t + 75\right]$$

4.) Das Unternehmen „Meisels kleine Brötchen“ möchte keinesfalls Verlust machen und geht von folgender Kostenfunktion aus:

$$K(t) = 8t^3 + 50t^2 + 134t + 75$$

a) Zeigen Sie, dass die Umsatzfunktion für je eine ME der Endprodukte folgende Form annimmt: $U(t) = 10t^3 + 93t^2 + 108t$

b) Ermitteln Sie den Break-Even-Point für t.
Startwert t = 2

Lösung:

A4 a: Umsatzfunktion ermitteln

#19: $v(t) := \begin{bmatrix} 108 \cdot t, & 93 \cdot t^2, & 10 \cdot t^3 \end{bmatrix}$

#20: $m := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

#21: $v(t) \cdot m$

#22: $\begin{bmatrix} 10 \cdot t^3 + 93 \cdot t^2 + 108 \cdot t \end{bmatrix}$

A4 b: Break-Even-Point

#23: $k(t) := 8 \cdot t^3 + 50 \cdot t^2 + 134 \cdot t + 75$

#24: $u(t) := 10 \cdot t^3 + 93 \cdot t^2 + 108 \cdot t$

#25: $g(t) := u(t) - k(t)$

Gewinnschwelle und Gewinngrenze mittels Newtonverfahren

#26: $g(t) := 2 \cdot t^3 + 43 \cdot t^2 - 26 \cdot t - 75$

#27: $\frac{d}{dt} (2 \cdot t^3 + 43 \cdot t^2 - 26 \cdot t - 75)$

#28: $6 \cdot t^2 + 86 \cdot t - 26$

#29: $g1(t) := 6 \cdot t^2 + 86 \cdot t - 26$

#30: $\text{ITERATES}\left(t - \frac{g(t)}{g1(t)}, t, 2, 4\right)$

#31: [2, 1.641, 1.587, 1.586, 1.586]

5.) An welcher Stelle t maximiert das Unternehmen seinen Gewinn?

Wie hoch ist der Gewinn an dieser Stelle?

Anmerkung: $t \in \left]\, 0 ; 5 \,\right]$

Lösung:

A5: Gewinnmaximierung mittels Randextremum

#32: $g1(t) := 6 \cdot t^2 + 86 \cdot t - 26$

#33: $g1(t) = 0$

#34: APPROX(SOLVE(g1(t) = 0, t, Real))

#35: $t = 0.2962 \lor t = -14.62$

#36: $\left(\frac{d}{dt}\right)^2 (2 \cdot t^3 + 43 \cdot t^2 - 26 \cdot t - 75)$

#37: $12 \cdot t + 86$

#38: $g2(t) := 12 \cdot t + 86$

#39: g2(0.2962)

#40: 89.55

Minimum bei t = 0,2962

Prüfen der Randwerte:

#41: $\lim_{t \to 0+} g(t)$

#42: −75

#43: g(5)

#44: 1120

Maximum bei t = 5

6.) Abschließende Frage: Was sind Knubbel?

Lösung: **Freie Antwort möglich**