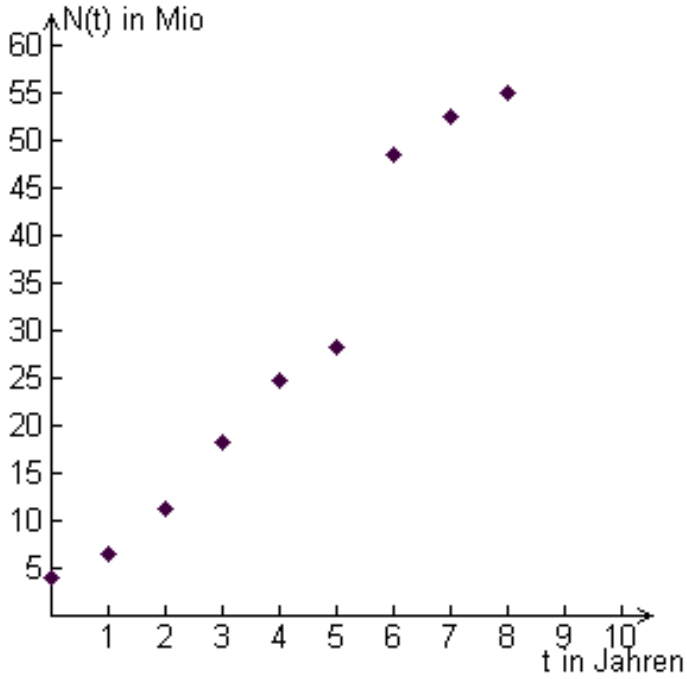
## 2. Aufgabe TEIL B

Die Redaktion ARD/ZDF-Online-Studien haben im Jahr 2002 die Zahlen der Online-Nutzer in Deutschland von 1997-2002 veröffentlicht und eine Prognose bis zum Jahr 2005 abgegeben.

Angaben in Mio. Nutzern **Prognose** 54% (real)

| 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | **2003** | **2004** | **2005** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,1 | 6,6 | 11,2 | 18,3 | 24,8 | 28,3 | **48,5** | **52,4** | **55,0** |




a) Nehmen wir an, dass die Anzahl der Online-Nutzer exponentiell zunimmt.
Bestimmen Sie eine Funktion $N(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$, wobei t die Zeit in Jahren und N(t) die Anzahl der Online-Nutzer angibt. t=0 entspricht dem Jahr 1997.

(i) Bestimmen Sie k mit den Angaben des Jahres 2000.

(ii) Skizzieren Sie den Graphen von N in das obige Koordinatensystem

(iii) Für welchen Zeitraum ist es sinnvoll diesen exponentiellen Ansatz zu wählen?

(iv) Warum versagt der exponentielle Ansatz für langfristige Prognosen (2010)?

Begründungen mit Rechnung und entsprechender Interpretation der Ergebnisse!

**Lösung:**

(i)

$$N(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$$

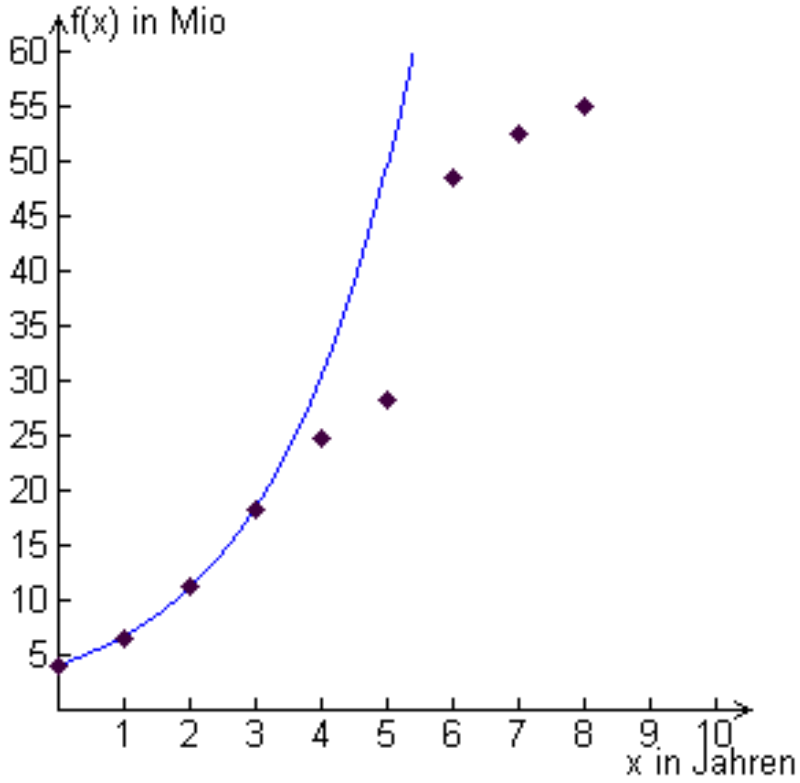
$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad N(0) = 4{,}1$$

$$\Rightarrow \quad N(3) = 4{,}1 \cdot e^{k \cdot 3} = 18{,}3 \quad \Rightarrow \quad e^{k \cdot 3} = 4{,}4634$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{\ln(4{,}4634)}{3} = 0{,}4986$$

$$\Rightarrow \quad N(t) = 4{,}1 \cdot e^{0{,}4986 \cdot t}$$

(ii)




(iii) Bis einschließlich dem Jahr 2001 ist der exponentielle Ansatz eine gute Näherung!
Nach dem Jahr 2001 wird die Abweichung von den realen Werten sehr groß.
Dies liegt in erster Linie an der oberen Grenze für die Einwohnerzahl und dem exponentiellen Ansatz!

(iv)

$$N(t) = 4{,}1 \cdot e^{0{,}4986 \cdot t}$$

$$\Rightarrow \quad N(13) = 4{,}1 \cdot e^{0{,}4986 \cdot 13} = 2.679\,[\text{Mio.}]$$

N(13) entspricht der Teilnehmerzahl im Jahr 2010. Auch wenn man ein Bevölkerungswachstum in Deutschland voraussetzt, ist diese Teilnehmerzahl (2.679 Mio.) völlig unrealistisch.

b) **Begründen** Sie, warum die Annahme eines logistischen Wachstums mehr Erfolg verspricht.

Erstellen Sie nun eine logistische Wachstumsfunktion der Form:

$$f(t) = \frac{G \cdot f(0)}{f(0) + (G - f(0)) \cdot e^{-G \cdot k \cdot t}};$$

(Mögliches, vereinfachtes Ergebnis: $\mathrm{f(t)} = \frac{2460 \cdot \mathrm{e}^{0,6 \cdot \mathrm{t}}}{41 \cdot \mathrm{e}^{0,6 \cdot \mathrm{t}} + 559}$ )

Es sei t=0 wieder das Jahr 1997. Wählen zur Bestimmung von k das Jahr 2000 und eine obere Grenze G von 60 Mio. Online-Nutzern.

**Lösung:**

Nach dem Jahr 2001 wird die Abweichung von den realen Werten sehr groß.
Dies liegt in erster Linie an der oberen Grenze für die Einwohnerzahl und dem exponentiellen Ansatz!

$$f(t) = \frac{G \cdot f(0)}{f(0) + (G - f(0)) \cdot e^{-G \cdot k \cdot t}}$$

$$\Rightarrow \quad f(3) = \frac{60 \cdot 4,1}{4,1 + (60 - 4,1) \cdot e^{-60 \cdot k \cdot 3}} = 18,3$$

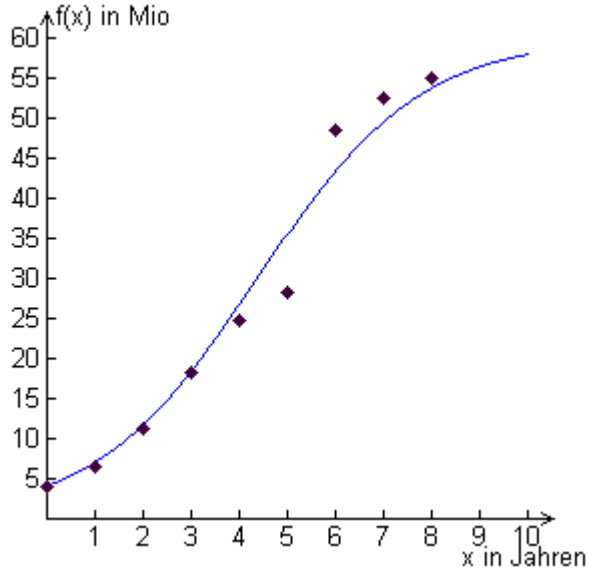
$$\Rightarrow \quad \frac{246}{4,1 + (60 - 4,1) \cdot e^{-180 \cdot k}} = 18,3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4,1 + (60 - 4,1) \cdot e^{-60 \cdot k \cdot 3}} = \frac{18,3}{246}$$

$$\Rightarrow \quad 4,1 + (60 - 4,1) \cdot e^{-180 \cdot k} = 13,44 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln(0,1671)}{-180} = 0,00994$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{246}{4,1 + 55,9 \cdot e^{-0,5963 \cdot t}}$$

c) Vergleichen Sie die Prognose (siehe Tabelle) mit den Ergebnissen, welche die logistische Wachstumsfunktion liefert und erläutern Sie das Ergebnis!

**Lösung:**




Funktionswerte:

$f(6) = 43.4518$ $f(7) = 49.5959$ $f(8) = 53.785$

Der logistische Ansatz stellt eine recht gute Näherung dar. Die Abweichungen von den Prognosen der Redaktion sind sehr klein.

$f(10) = 57.9676$ $f(11) = 58.8632$ $f(12) = 59.3684$

$f(13) = 59.6505$

Ab 2009 hat man die obere Teilnehmergrenze fast erreicht.

d) Bilden Sie eine Stammfunktion von f(t).

**Lösung:**

$$f(t) = \frac{2460 \cdot e^{0,6 \cdot t}}{41 \cdot e^{0,6 \cdot t} + 559}$$

$$\int f(t)dt = \int \frac{2460 \cdot e^{0,6 \cdot t}}{41 \cdot e^{0,6 \cdot t} + 559} dt = 2460 \cdot \int \frac{e^{0,6 \cdot t}}{41 \cdot e^{0,6 \cdot t} + 559} dt$$

$$\int f(t)dt = 100 \cdot \ln\left(41 \cdot e^{0,6 \cdot t} + 559\right) + c$$

logarithmische Integration